

面積の領域における Laplacian の固有値分布

京大理大学院 浅倉史興

§ 0. 序. 次の問題の固有値の新近分布を考える.

$$(0.1) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } G \\ u = 0 & \text{on } \partial G \end{cases} \quad G \subset \mathbb{R}^2$$

∂G は十分滑らか.

$N(\lambda) = \{ \lambda \text{ を越えない固有値の数 (重複度を込めて)} \}$ として, $N(\lambda)$ の $\lambda \nearrow \infty$ における挙動を考察する. G が有界のとき Δ の spectrum は discrete となり

$$(0.2) \quad N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} (G \text{ の面積}) \quad (\text{Weyl の公式})$$

が成立する. 我々は G が非有界で, ときに G の面積が有限でないときの $N(\lambda)$ の挙動に興味を持つ. この問題に対するひとつの解答として H. Tamura [7] が挙げられる. 田村氏は

$G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < b(x) \}, \frac{A}{(1+|x|)^a} \leq b(x) \leq \frac{B}{(1+|x|)^a}$ ($0 < a \leq 1$) の形の領域に対して (= の場合 Δ の spectrum は discrete となる. § 1 参照),

$$(0.3) \quad N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda \geq \frac{n^2 \pi^2}{b^2(x)}} (\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2(x)})^{1/2} dx$$

を得た. ときには $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a b(x) = a$, $\frac{n^2 \pi^2}{b^2(x)}$ のとき

[1]

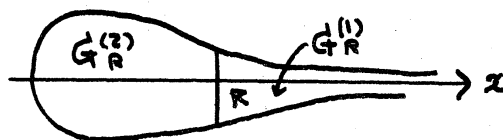
$$(0.4) \quad N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi d} \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{d}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{d}{2d}\right) \zeta\left(\frac{1}{d}\right) \lambda^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2d}} \quad (0 < d < 1) \\ \sim \frac{a}{2} \lambda \log \lambda \quad (d=1) \text{ となる.}$$

この小論において我々は少く古典的な方法でこの問題を考察する。対象となる領域は方法論的に、岡村氏とは異なる、な形に強い制限を受ける。

§1. 主定理.

$$G_R^{(1)} = \{(x, y) \in G \mid x > R\}$$

$$G_R^{(2)} = \{(x, y) \in G \mid x < R\}$$



と表わすことにする。我々は次の性質をもつ領域を考えよう。

仮定 (A). i) $\exists R_0 > 0$, $G_R^{(1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) < y < f(x)\}$,
 $G_R^{(2)}$ = 有界, for all $R > R_0$. と表わさる。(上図参照)
 ii) $b(x) = f(x) - g(x)$ (領域の中) とし、
 $\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = 0$ となる。

仮定 (B). $\int_{R_0}^{\infty} b(x) dx = \infty$. (面積が ∞)

仮定 (C). i) $f'(x), g'(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$.

ii) $A/x \leq -b'(x)/b(x) \leq B/x \quad A, B > 0$.

iii) $|b''(x)| \leq C b(x)/x^2, \quad |b'''(x)| \leq C b(x)/x^3, \quad C > 0$.

注意 (1.1). i) 領域 G が仮定 (A) をみたせば問題 (0.1) の spectrum は discrete になる (H. Rellich [6], D.S. Jones [5] を参照). 二つは次の不等式が成り立つことによる (Courant-

Hilbert [3] Kap 17 では Friedrichs の不等式 と云われている。

(1.1) $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \omega_1, \dots, \omega_N \in L^2(G)$ が存在して
 $\forall \phi \in H_0^1(G)$ について

$$\|\phi\|_{L^2}^2 \leq \sum_{j=1}^N |(\phi, \omega_j)|^2 + \varepsilon D[\phi]$$

$$= \text{すなわち } D[\phi] = \iint_G \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

ii) 仮定 (C) の ii) より $b(x)$ は単調減少である。このことは以下の議論で本質的である。

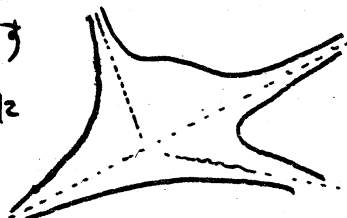
定理 (1.2). 仮定 (A), (B), (C) をみたす領域において,

$$(1.2) \quad N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda \geq n^2 \pi^2 / b^2(x)} (\lambda - n^2 \pi^2 / b^2(x))^{1/2} dx$$

$$(1.2)' \quad = \frac{\lambda}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_{n+1}}^{X_n} b(x) \sum_{j=1}^n \left[1 - \frac{(\pi j)^2}{b^2(x) \lambda} \right]^{1/2} \left[\frac{\pi}{b(x) \lambda^{1/2}} \right] dx$$

$$= \text{すなわち } X_n = X_n(\lambda) \text{ であって } \lambda = n^2 \pi^2 / b^2(X_n) \text{ をみたす.}$$

注意 (1.3). i) 仮定 (A), (B), (C) をみたす領域の有限個で表される領域 (左図) について同様である。



ii) ある平面曲線の管状近傍と表わされる領域についても、その曲線の曲率が適当に 0 に減少していればよい。

iii) (1.2)' は (1.2) の積分と和とを交換したもので、

$\sum_{j=1}^n \left[1 - \frac{(\pi j)^2}{b^2(x) \lambda} \right] \left[\frac{\pi}{b(x) \lambda^{1/2}} \right]$ は半径 1 の円の $1/4$ の Riemann 部分和と考えられ、このことから $N(\lambda) \leq \frac{\lambda}{4\pi} \int_{x \in X_1(\lambda)} b(x) dx$ がわかる。

[3]

以下定理(1.2)の証明の概要を述べる.

§2. 変分法による考察.

次の4, の固有値問題を考える.

$$(I)_j: \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } G_R^{(j)} \\ u = 0 & \text{on } \partial G_R^{(j)} \cap \overline{G} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \{x=R\} \cap G \end{cases}$$

$$(II)_j: \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } G_R^{(j)} \\ u = 0 & \text{on } \partial G_R^{(j)} \end{cases} \quad j=1, 2.$$

$$\text{また, } A_R^{(j)}(\lambda) = \{(I)_j \text{ の固有値で } \lambda \text{ を越えなものの}\} \\ B_R^{(j)}(\lambda) = \{(II)_j \text{ の固有値で } \lambda \text{ を越えなものの}\}$$

と表わすと次の命題が成り立つ.

命題(2.1)

$$B_R^{(1)}(\lambda) + B_R^{(2)}(\lambda) \leq N(\lambda) \leq A_R^{(1)}(\lambda) + A_R^{(2)}(\lambda).$$

∴) Courant の minimax principle による.

$B_R^{(2)}(\lambda), A_R^{(2)}(\lambda) = O(\lambda)$ より, $N(\lambda)$ の挙動は $A_R^{(1)}(\lambda), B_R^{(1)}(\lambda)$ により支配されることが予想される. 変数変換と未知関数変換により $G_R^{(1)}$ を strip $(R, \infty) \times (0, 1)$ に写して考察する.

$$(2.1) \begin{cases} \xi = x & \psi = b^{1/2} u \text{ の中} \\ \eta = b^{1/2}(x) \{y - g(x)\}, \end{cases}$$

とすると次が成り立つ.

命題(2.2) R を十分大とする.

$$D_R[\Phi] = \iint_{x>R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 dx dy,$$

$$\tilde{D}_R[\Psi] = \int_0^1 \int_R^\infty \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{b^2(\xi)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2 d\xi d\eta \quad \text{と置く.}$$

$$i) \quad \|\Psi\|_R^2 = \int_0^1 \int_R^\infty \Psi^2 d\xi d\eta = \|\Phi\|_{G_R^{(1)}}^2.$$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists R_0$ が存在して $R \geq R_0$ のとき

$$(1-\varepsilon)\tilde{D}_R[\Psi] - \varepsilon\|\Psi\|_R^2 \leq D_R[\Phi] \leq (1+\varepsilon)\tilde{D}_R[\Psi] + \varepsilon\|\Psi\|_R^2,$$

が成り立つ.

命題(2.2)により $(I)_1, (II)_1$ の固有値分布は, $\tilde{D}_R[\Psi]$ と $\|\Psi\|_R^2$ の変分問題のそれに漸近的に等しいであろうことがわかる.

(但し数学的に厳密な証明は少しく細かな配慮が必要である.

Fr. Asakura [1] を参照). 従って次の固有値問題(2.2)を考察する.

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{b^2(\xi)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \lambda \Psi = 0 & \text{in } (R, \infty) \times (0, 1) \\ \Psi_\xi = 0 & \text{on } \xi = R, \quad \Psi = 0 \quad \text{on } \eta = 0, 1 \\ \Psi = 0 & \text{on } \xi = R, \quad \eta = 0, 1 \end{cases}$$

$\Psi(\xi, 0) = \Psi(\xi, 1) = 0$ より $\Psi(\xi, \eta) = \Phi_n(\xi) \sin n\pi\eta$ と分離すると. Φ_n は次の固有値問題の解である.

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Phi_n'' + \{\lambda - n^2 q(\xi)\} \Phi_n = 0 & \text{in } (R, \infty) \\ \Phi_n'(R) = 0 \quad \text{or} \quad \Phi_n(R) = 0 \end{cases}$$

[5]

$q(\xi) = \frac{\pi^2}{b^4(\xi)}.$

注意(2.3). i) (2.3)の固有値の漸近分布は仮定の下で

$N_n(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int_{\lambda \geq n^2 q(x)} (\lambda - n^2 q(x))^{1/2} dx$ となる, 我々が求めたいのは $N_*(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(\lambda)$ でありながら $N_n(\lambda)$ の剰余項の n についての一様な評価が必要である.

ii) 田村氏も証明の途中で $\Psi_n'' + \{\lambda - \alpha n^2 |x|^{2\alpha}\} \Psi_n = 0$ の固有値の漸近分布 (n に n^2 一樣な) を用いておられるが, この場合は x の変数変換により n^2 を係数から消去できる. 従ってこの考察は必要ない.

§3. 特異 Sturm-Liouville 問題.

$\Psi_n(x, \lambda)$ と

$$(3.1) \quad \begin{cases} \Psi_n'' + \{\lambda - n^2 q(x)\} \Psi_n = 0 & \text{in } (R, \infty) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_n(x, \lambda) = 0 \end{cases}$$

の解とする (これは定数倍を除いて一意に定まる).

命題(3.1) $\lambda_m^{(n)}$ が (2.3) の固有値であるためなら

$\Psi_n'(R, \lambda_m^{(n)}) = 0$ かつ $\Psi_n(R, \lambda_m^{(n)}) = 0$ となる
ことが必要十分である.

注意(3.2) $\lambda - n^2 q(x) \leq 0, \forall x \geq R$ とみれば固有値は存在しない, 従ってとくに $\lambda/n^2 \leq q(R)$ とみれば固有値は存在しない.

Langer-Titchmarsh の方法 (又は WKB 法) により $\Psi_n(x, \lambda)$

の $\lambda \rightarrow \infty$ とし π とする漸近形を求めよ.

定理 (3.3) $x \leq X_n$ において $\Phi_n(x, \lambda)$ は次の漸近形をもつ.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Phi_n(x, \lambda) &= (\phi_n'(x))^{-1/2} \left\{ \text{Ai}(\lambda^{1/3} \phi_n) + O(\lambda^{-1/2} X_n^{-1}) \right\} \\ \Phi_n'(x, \lambda) &= \lambda (\phi_n'(x))^{1/2} \left\{ \text{Ai}'(\lambda^{1/3} \phi_n) + O(\lambda^{-1/3} X_n^{-2/3}) \right\}. \end{aligned}$$

== 2° i) X_n は $\lambda = n^2 q(x)$ の解, n は $q(x) (b(x))$ の単調性により一意的に定まる, 又 $X_n \geq R$ である.

ii) $\phi_n = \phi_n(x, \lambda)$ は

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (\phi_n)^{3/2} &= \int_{X_n}^x \left(\frac{n^2 q(t)}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} dt \quad x \geq X_n \\ \frac{2}{3} (-\phi_n)^{3/2} &= \int_x^{X_n} \left(1 - \frac{n^2 q(t)}{\lambda} \right)^{1/2} dt \quad x \leq X_n \end{aligned}$$

定義される.

iii) $\text{Ai}(x)$ は所謂 Airy 関数で, $\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(\frac{1}{3}t^3 + xt) dt$ である. $\text{Ai}(x)$ は $y'' = xy$ の解であって $x \rightarrow \infty$ とき $1/\pi$ へと減少する.

iv) 剰余項の O -symbol は n に ∞ と同様である.

注意 (3.4) $x \geq X_n$ のときも同様の漸近形をもつが, 注意 (3.2) により我々の考察には必要ない.

定理 (3.3) の証明の方針を述べる. A. Hadelyi [4] に沿う.

$A_n(x) = (\phi_n')^{-1/2} \text{Ai}(\lambda^{1/3} \phi_n)$ とおくと A_n は

$$(3.3) \quad A_n''(x) + \lambda p_n A_n(x) + \frac{1}{2} \{ \phi_n, x \} A_n(x) = 0 \quad \text{とみたす.}$$

== 2° $p_n(x, \lambda) = 1 - \frac{n^2 q(x)}{\lambda}$, $\frac{1}{2} \{ \phi, x \} = \phi''' / \phi' - \frac{3}{2} (\phi'' / \phi')^2 =$

[7]

$\frac{p_n''}{4p_n} - \frac{5}{16} \left\{ \frac{p_n'}{p_n^3} + \left(\frac{p_n'}{p_n} \right)^2 \right\}$, 所謂 Schwarzian 微分.

従って $\Phi_n'' + \lambda p_n(x) \Phi_n + \frac{1}{2} \{ \phi_n, x \} \Phi_n = \frac{1}{2} \{ \phi_n, x \} \Phi_n$ と考え
 Φ_n を積分方程式で解く. 積分核 $K_n(x, t, \lambda) = -\pi \lambda^{1/2} \{ A_n(x, \lambda) \times$
 $B_n(t, \lambda) - A_n(t, \lambda) B_n(x, \lambda) \}$ ($B_n = (\phi_n')^{-1/2} B_0(\lambda^{1/2} \phi_n)$)

とあわせて Φ_n は積分方程式

$$(3.4) \quad \Phi_n(x, \lambda) = A_n(x, \lambda) - \frac{1}{2} \int_{R_0}^{\infty} K_n(x, t, \lambda) \{ \phi_n, t \} \Phi_n(t, \lambda) dt$$

の解である.

積分核が $|K_n(x, t, \lambda)| \leq \frac{\text{const} \times (\phi_n'(x))^{1/2} (\phi_n'(t))^{1/2} e^{\frac{2}{3} |R_0(-\lambda^{1/2} \phi_n(x))^2 - R_0(-\lambda^{1/2} \phi_n(t))^2|}}{\lambda^{3/2} (1 + |\lambda|^{1/2} |\phi_n(x)|^2) (1 + |\lambda|^{1/2} |\phi_n(t)|^2)}$ の評価を
 とする (A. Erdélyi, [4] Chap 4 参照) と考えれば.

$$C_n = \int_{R_0}^{\infty} |\{ \phi_n, t \}| |p_n(t, \lambda)|^{-1/2} dt \quad \text{とあわせて}$$

$$(3.5) \quad \Phi_n(x, \lambda) = A_n(x, \lambda) \{ 1 + O(\lambda^{-1/2} C_n) \} \\ + O(B_n(x, \lambda) C_n \lambda^{-1/2}) \quad x \leq x_n$$

と示すことがわかる. A. Erdélyi [4] chap 4 にあるのは有
 界な区間のときのみを扱っているがその方法を一字一句その
 まま我々の場合に当てはまる. C_n の評価については,

補題 (3.4) $q(x)$ が

- i) $q(x) > 0$. ii) $A/x \leq q'(x)/q(x) \leq B/x$. iii) $|q''(x)|/q(x) \leq C/x^2$
 $|q'''(x)|/q(x) \leq C/x^3$. とおけると

$$\int_{R_0}^{\infty} |\{ \phi_n, t \}| |p_n(t, \lambda)|^{-1/2} dt \leq C/\lambda^{1/2}$$

と示す.

以上により定理(3.3) が証明される.

命題(3.1)と定理(3.3) を考え合わせると(2.3)の固有値分布を調べることはAiry関数とその導関数の零点の分布を調べることに帰着されることになった。Airy関数について以下のことは基本的である, (A. Erdélyi [4], E.C. Titchmarsh [8] Chap 7)

i) $x(>0)$ が十分大ききとき

$$Ai(-x) = \pi^{-1/2} x^{-1/4} \left\{ \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}) \right\}$$

が成り立つ.

ii) n が十分大ききとき, $Ai(-x)$ は $0 < x < \left\{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{4})\pi\right\}^{2/3}$ に丁度 n 個の零点をもつ.

iii) $Ai(-x)$ の零点と $Ai'(-x)$ の零点は互に他を分離する。
(これは $Ai(x)$ が二階の方程式をみたして n 番目に $x=0$ による).

i), ii), iii) により次の定理を得る.

定理(3.5)

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Psi'' + \{\lambda - n^2 q(x)\} \Psi = 0 & \text{in } (R, \infty) \\ \Psi'(R) = 0 & \text{または } \Psi(R) = 0 \end{cases}$$

の固有値の漸近分布は(どちらの場合にも)

$$(3.6) \quad N_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_R^{x_n} (\lambda - n^2 q(x))^{1/2} dx + O(1)$$

となる, 二重 O -symbol は n に n^2 同様である.

証明は H. Asakura [1], E.C. Titchmarsh [8] Chap 7) を参照.

[9]

(3.6) の $N_n(\lambda)$ をこれについて加え合わせると作用素 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ に対する (2.2) の固有値分布は

$$(3.7) \quad N_*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_R^{X_n} \left(\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2(x)} \right)_+^{\frac{1}{2}} dx + O(\lambda^{\frac{1}{2}})$$

となる。(3.7) の和は形式的には無限和であるが、注意(3.2)

より $n \leq \sqrt{\frac{\lambda}{1(R)}}$ とおいたそれについての $N_n(\lambda)$ を加えればよい。(剰余の order が $\lambda^{\frac{1}{2}}$ となる、という)

あと $N_*(\lambda)$ を詳しく見ておけば (H. Asakura [1] 参照) 定理(1.2) が証明される。

§4 余計なこと。

以上説明してきたことは変数分離をして固有値の漸近分布を調べる方法としては古典的なるものである。直接的には E.C. Titchmarsh による corrected Bohr-Sommerfeld quantization condition の厳密な証明の方法に負う (E.C. Titchmarsh [8] Chap 7)

この問題の高次元への拡張は、たとえば G が x 軸を含むとして x 軸に直交する超平面で G を切、たときの切り口がすべてひとつの有界な領域に相似である場合は全く平行な議論により可能である。他の場合は難かしい。

又仮定(A), (C) を満たす面積有限の領域については以上の証明をたどると (とくに命題(2.1)の $B_R^{(2)}, A_R^{(2)}$ をそのまゝ残すと) $N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} (G \text{ の面積})$ が証明されている。

参考文献

- [1] F. Asakura ; to appear in J. Math. Kyoto. Univ.
- [2] R. Courant, D. Hilbert ; 数理物理学の方法 第一巻 (東京図書)
- [3] " " 第四巻 "
- [4] A. S. Erdelyi ; Asymptotic Expansions . (Dover)
- [5] D. S. Jones ; Proc. Camb. Phil. Soc, 49 (668~684)
- [6] H. Rellich ; Studies and Essays Presented to R. Courant
329 ~ 344 (1948)
- [7] H. Tamura ; Nagoya. Math. J. Vol 60, 7~33 (1976)
- [8] E. C. Titchmarsh ; Eigenfunction Expansions. Vol I
2nd edition (1962) .