

C^* -代数の multiplier と derivation について

山形大 理 富 山 淳

§ 1 Multiplier について.

von Neumann 代数の時と違って、 C^* -代数は単位元をもたない時が普通である。このことから与えられた C^* -代数 A を含む単位元をもつ C^* -代数 B を、どのようにとれば議論が自然に行なえるかといふことが問題になる。例えば $A = C_0(X)$ (X は locally compact space, C_0 は $\mathbb{C}$ の上で 0 になる連続関数。以下この記号を使う。又有界連続関数環の時は C^b とかく) の時は B としては A に単位元を添加した環より $C^b(X)$ をとる方が自然な時が多いであろう。これを非可換に拡張して与えられたのが C^* -代数の multiplier である。ここでは multiplier 及びそれと derivation との関係について最近の C. Akemann - G. Elliott - G. K. Pedersen 及び筆者による研究を紹介する。前年については詳細は C. Akemann, G. K. Pedersen, 富山: Multipliers of C^* -algebras (コペン

ハーゲンタヨリの preprint), 後半は前記々層による preprint が近頃中に出る筈である。

C^* -代数 A の second dual を A'' とかく。 A の multiplier を

$$M(A) = \{x \in A'', xa, ax \in A \text{ for any } a \in A\}$$

と定義する。 $M(A)$ は定義より A'' の C^* -部分代数であり、 A を ideal として含み、単位元をもつ。これは通常の写像の組による定義と一致するが更に次のことが検証出来る。

Proposition 1. π を A の non-degenerate かつ faithful 表現とすると、 π は $M(A)$ より $\widetilde{\pi(A)}$ 内の idealizer への同型対応に一意に拡大出来る。

即ち $M(A)$ の定義としては A'' と限らずどこか弱閉包の中で idealizer をとつても本質的に変わりはない。 $M(A)$ の大きさについて次は次の結果が成立つ。

定理 2. 次のどの条件からでも A は dual ring になる。

(i) $M(A) = A''$

(ii) A が separable で $M(A)$ が von Neumann 代数。

一般には $M(A)$ が von Neumann 代数になる例は決まらず。

次に A に対する $M(A)$ の大きさとしては、一般には $M(A)/A$ が 1 次元になる場合もあるが ([5] 参照)。

定理 3. A が separable で単位元をもたないならば C^* -

代数 $M(A)/A$ は separable な空間上へは表現出来る。

$M(A)$ の strict topology とは普通, semi-norm

$$\|x\|_a = \|xa\| + \|ax\| \quad a \in A$$

で生成された位相を言い, こゝとき $M(A)_\beta$ とかく。 A が単位元をもつとき, こゝは norm 位相と一致する。 又 $M(C(H)) = B(H)$

($C(H)$ はヒルベルト空間 H での compact 作用素の代数, $B(H)$ は有界線型作用素全体をつくる代数) であるが $B(H)_\beta$ は strong $*$ -位相による $B(H)$ のことである。 X を locally compact とし, C^* -代数 $A(t)$ をつけた fibred space $\{X, A(t)\}$ を与える。

それらの上での cross-section の集りとし, 更に次の条件をみたすものとする。

(i) 各 t での作用で $\mathcal{A}$ は $*$ -代数となる。

(ii) $\mathcal{A}(t) = \{a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$ は各 t にあって $A(t)$ で dense,

(iii) 各 $a \in \mathcal{A}$ について関数 $t \rightarrow \|a(t)\|$ は $C_0(X)$ に入る。

今 cross-section x が t で連続であるといふことと,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(t_0), a \in \mathcal{A}; \quad \|x(t) - a(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in U,$$

と定義すると, $\{X, A(t), \mathcal{A}\}$ による ∞ で 0 に収束する連続な cross section 全体 $C_0(X, A(t), \mathcal{A})$ は C^* -代数となる。 次に有界な cross section x が strictly continuous といふことと,

$$\forall \varepsilon > 0, a \in \mathcal{A} \quad \exists U(t_0), b \in \mathcal{A};$$

$$\|(x(t) - b(t))a(t)\| + \|a(t)(x(t) - b(t))\| < \varepsilon \quad \forall t \in U(t_0)$$

と定義する。但し fibre としては $M(A(t))_\beta$ をとる。X 上で連続なものの全体を $C^b(X, M(A(t))_\beta, \mathcal{A})$ とおく。この集合と $M(A)$ も共に fibred space $\{X, A(t)\}$ 上の有界な cross-section の集りとなることから両者の包含関係も示すことができるが結果は

$$\text{定理 4. } C^b(X, M(A(t))_\beta, \mathcal{A}) = M(C_0(X, A(t), \mathcal{A})).$$

従ってこの系として、おじいちゃんぜんぜんちゃん場合には

$$\text{系 1. } M(C_0(X, A)) = C^b(X, M(A)_\beta).$$

例えば $M(C_0(X, C(H))) = C^b(X, B(H)_{s*})$ である。

系 2. A が n -homogeneous C^* -代数の時、 $M(A)$ は A の structure bundle ([9]参照) の有界連続な cross section の全体である。

一般に各 fibre が単位元をもつても、strict continuity は通常連続性と一致せず一致するのは cross section $t \rightarrow 1_t$ ($A(t)$ の単位元) が連続になるような時である。

その他 multiplier の lifting の問題、フニソル積の multiplier など論じらるべき問題は沢山あるがここでは略すことにする。

3.2. Derivation との関係.

C^* -代数 A の derivation δ は常に A の弱位相による閉包に拡大出来るから、 δ として A' に拡大出来る。そして von Neumann 代数での derivation は inner になるから、ある $h_\delta \in A'$ が存在して

$$\delta(a) = h_\delta a - a h_\delta \quad a \in A$$

となる。この時は常に $\delta(a) \in A$ が保証されるのみだが、 h_δ が A の multiplier の時は、 $h_\delta a, a h_\delta$ が共に A に属しているわけである。そこで次の様な値同を考えるとみる。

Q.1. A の derivation がすべて multiplier で与えられるものか？

Q.2. 1 つの derivation が multiplier で与えられるのは、どんな時か？

Q.3. A, δ が与えられたとき、 A の non-zero ideal I が存在して $\delta|_I$ が multiplier で与えられるように出来るか？

Q.3. が要求としては 簡単 かも知れようが、一般には状況はもっとひどく、次のようになっている。即ち

" A を UHF-代数としたとき、 $C([0,1], A)$ の中にはどのような non-zero ideal に制限しても、 δ で multiplier で与えられる derivation δ_0 が存在する。" δ_0 のつくろひ方は少し厄

任意の λ であるが用するに $[0, 1]$ の ~~任意の~~ 開集合の上で h_δ をどんな調整しても連続にちみちりする δ を採してくるのである。

h_δ の性質がある意でもければ議論上よりなることは起る。

この目安として簡単な計算より次のことがわかる。

Proposition 5. (i) h_δ^2 が又 A の derivation を与えれば h_δ は $\delta(A)$ より生成された A の ideal の multiplier である。

(ii) $\forall a \in A$, $h_\delta a$ が又 A の derivation を与えれば h_δ は A の commutator ideal の multiplier である。

単位元をもつ単純な C^* -代数の derivation がすべて inner であることを証明した境氏は更に (4) にありて単位元をもたない場合ととり扱い、 A に対して次のような C^* -代数 $D(A)$ の存在を証明した。
(derived algebra)

(i) $D(A)$ は A を ideal として含む primitive C^* -代数

(ii) A の derivation はすべて $D(A)$ の元により与えられる。

(iii) $D(A)$ は上記2条件をみたす単位元をもつ C^* -代数として一意に定まる。

しかし $M(A)$ の定義とこの性質 (idealizer) を与えれば上の $D(A)$ が実は $M(A)$ に等しくなることは容易にわかるであろう。

一般に $M(A)$ は A が primitive な時は primitive な C^* -代数になる。以上から単純 C^* -代数に関する境氏の derivation の

結果は次のようにまとめることが出来る。

"単純 C^* -代数は $Q1$ の 1 つの答である。"

もともと $\text{prop} \sim$ な C^* -代数と云うのは、単位元をもたないものが普通とも言えるであろうから、以上から考えても C^* -代数の derivation では inner と outer と云うとり扱い方は弁想として強すぎるように感じられる。^{最近の} Elliott [1] の議論を以てしても、そこで outer として出てきた derivation は殆んど multiplier で与えられるものばかり(従って本来的には outer ではないとも言えるもの)である。

さて $Q3$ について前にあげた例は $NGCR$ -代数における現象であった。では I 型の C^* -代数についてはどうであろうか?

次の結果はこの部分について $Q3$ が肯定的であること、及び $Q1$ の解答を大体与えてゐる。

定理 6. A を連続な trace をもつ C^* -代数, $\hat{A}$ をその dual とする。もし $\hat{A}$ が paracompact ならば A の derivation はすべて multiplier で与えられる。

証明. A は CCR 代数であるから, $\hat{A}$ は A の primitive ideal の空間と同一視できる。 $t \in \hat{A}$ について $A(t) = A/t$ とおく。仮定から $\hat{A}$ の locally finite な open covering $\{G_\alpha\}$ と、 A の元の集合 $\{a_\alpha\}$ が存在して $a_\alpha(t)$ は $t \in G_\alpha$ のとき $A(t)$ の minimal projection であるように出来る。 $\hat{c}(t)$ を derivation

δ から $A(t)$ 上に δ を δ として δ derivation とする. 各 $A(t)$ の性質から cross section $x_r(t) \in M(A(t))$ の値をとる

$$\delta(a)(t) = \delta(t)(a(t)) = x_r(t)a(t) - a(t)x_r(t) \quad a \in A$$

で且つ $\|x_r(t)\| \leq \|\delta\|$ ととれる. 又更に $t \in G_r$ について

$$a_r(t)x_r(t)a_r(t) = 0 \quad \text{と与えられたと仮定する。} \{f_r\}$$

は $\{G_r\}$ に対する 1 の分解とする. 今 $t_0 \in G_r \cap G_\beta$ とする

と $\lim [] \delta \exists U(t_0), v \in A$;

$$v^*(t)v(t) = a_r(t), \quad v(t)v^*(t) = a_\beta(t) \quad \forall t \in U(t_0).$$

従って

$$\begin{aligned} x_r(t)a_\beta(t) &= \delta(v)(t)v^*(t) + v(t)x_r(t)v^*(t) \\ &= \delta(v)(t)v^*(t) \end{aligned}$$

と与えて cross-section $t \rightarrow x_r(t)a_\beta(t)$ は t_0 で連続になる.

$y_r = f_r x_r, \quad b_\beta = f_\beta a_\beta \in A$ とおけば, 以上から

$$t \rightarrow y_r(t)b_\beta(t) \in A(t)$$

は ∞ で 0 になる連続な cross section とする. 但し

連続性を求めるには A の元による cross section の全体を用いる.

$$x = \sum_r y_r \quad \text{とおけば, } x \text{ は } \{\hat{A}, M(A(t))\} \text{ での}$$

有限な cross-section で, 且つ δ を δ として. 更に

$$I = \{a \in A; xa \in A\}$$

とおけば I は閉イデアルで, $b_r (\forall r)$ を含む δ である δ の δ の

primitive ideal にも含まれる. 即ち $I = A$, Q.E.D.

Q 2. 12つについては次のことが証明出来る。

定理 7. $\delta \in A$ の derivation. 今 $t \in \hat{A} \rightarrow \|\delta(t)\|$ が連続ならば δ は multiplier で与えられる。

A が単純環の時は $\|\delta(t)\| = \|\delta\|$ で定数であるから、すべての derivation が上の仮定を満たしていることになる。このように上の結果は $\hat{A}$ が Hausdorff であるか否かが本問題になっている。証明は少し長いがで概略をのべる。矢張り

補題 7.1. $\mathfrak{M}$: von Neumann 代数, δ derivation.

今 x が δ を与え、且つ任意の $\mathfrak{M}$ の central projection e について

$$\|xe\| = \frac{1}{2} \|\delta\| me \|$$

とすると $x \in \mathfrak{M}$ となる。

上の補題性質をもつ x が (δ が self-adjoint でなくとも) $\mathfrak{M}$ の中に与えられる(一意)ことは最近 Halpern [2] によって証明されたが上のことはそのより少しだけ $\mathfrak{M}$ の外にはない、というものである。証明は [1] による $\mathfrak{M}$ の x の x_0 とし $x = x_0 + x_1$ ($x_1 \in \mathfrak{M}'$) とかいて $x_1 = 0$ となる。今 $x_1 \neq 0$ とすると

$\exists$ projection $f \in \mathfrak{M}'$; $f x_1^* x_1 f \geq \beta f$ $\beta > 0$

とと、vector z $z = fz$ とすると

$$\begin{aligned} \|xz\|^2 &= \|x_0 z\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x_0 z, x_1 z) + \|x_1 z\|^2 \\ &\geq \|x_0 z\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x_0 z, x_1 z) + \beta \end{aligned}$$

となるから、 $x_2 = f_2 x f_2$ を partial isometry で近似すると
 よより m' の projection $g \leq f$ をとって

$$\exists z = gz; \|xz\|^2 > \|x \cdot g\|^2$$

と出来るようにするわけである。 g の central cover e をと
 るわけが値が出る。 $x_2 = 0$ の時はより単純に e を f の central
 cover にとればよい。

補題 7.2. $A \subset B$, $p \in p(A)$ が non-degenerate になるように
 B の表現をとるとき、 $p(A)$ の弱閉包 $\widehat{p(A)}$ が常に $\widehat{p(B)}$ の
 ideal になっているならば A 自身が B の ideal である。

定理の

証明の鍵になるのは次のことである。 必ず atomic な表現
 を与えることにより A を $\hat{A}$ 上の有界な cross section のつくる
 代数と考える。 fibre は既約表現 $t \in \hat{A}$ による H_t 上の C^* -
 代数 $A(t) = A$ の像である。 $\{\hat{A}, B(H_t)\}$ での有界な
 cross section の代数 m は von Neumann 代数であるから、
 $M(A)$ も m の中で考えて差支えない。 各 t について $x(t)$
 $\in B(H_t)$ を、 $\delta(t)$ と書きあらわす。

$$\|x(t)\| = \frac{1}{2} \|\delta(t)\|$$

となるようにとる。 x は cross section として m の元と考
 える。 A で δ を書きあらわす。 $\{x\}$ で今 $B \in A$ と x と $M(A)$ の

center から生成された C^* -代数とすると、 $p \in B$ の表現で $p(A)$ が non-degenerate となることを示せば常に

$$\|p(x)\| = \frac{1}{2} \|p \circ \delta\|$$

が成立つ。

(*)

上のことが成立すれば補題 7.1 より $p(x) \in \widehat{p(A)}$ となり、結局補題 7.2 より A が B の ideal となり、上の x が A の multiplier になることがわかる。ここで (*) を使うのに注意の要があるが、 $\varepsilon > 0$ により

$$f(t) = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon + \|p \circ \delta\|}{\|\delta(t)\|} \right\} \quad t \in \hat{A}$$

と置く。(但し $\|\delta(t)\| = 0$ の時は $\delta = 0$ が成り立つので $f(t) = 1$ とする)。 $f(t)$ は $\hat{A}$ 上の連続関数であるから、Dauns - Hofmann の定理によつて $M(A)$ の center 上にとらえられる。そしてつくりかから $p(x) = p(fx)$ となることがわかり、更に $t \in \hat{A}$ により

$$\|f \cdot x(t)\| = |f(t)| \|x(t)\| = \frac{1}{2} |f(t)| \|\delta(t)\|$$

$$\leq \frac{1}{2} (\|p \circ \delta\| + \varepsilon)$$

より $\varepsilon \rightarrow 0$ とし $\|p(x)\| \leq \frac{1}{2} \|p \circ \delta\|$ 。よつて

$$\|p(x)\| = \frac{1}{2} \|p \circ \delta\|.$$

文献

1. G. A. Elliott; Some C^* -algebras with outer derivations, preprint.
2. H. Halpern; The norm of an inner derivation of an AW^* -algebra, preprint.
3. R. Kadison, E. C. Lance, J. R. Ringrose, Derivations and automorphisms of operator algebras II, J. Functional Analysis 1, 204-221 (1967)
4. S. Sakai; Derivations of simple C^* -algebras. II., Bull. Soc. Math. France 99, 259-263 (1971).
5. S. Sakai; Derivations of simple C^* -algebras III, to appear in Tôhoku Math. J.
6. G. K. Pedersen, Applications of weak $*$ -semi-continuity in C^* -algebra theory, Duke Math. J. 39, 431-450 (1972).
7. J. G. Stampfli; The norm of a derivation, Pacific J. Math., 34³, 737-747 (1970)
8. J. Tomiyama; Topological representation of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 14, 187-204 (1962)
9. J. Tomiyama & M. Takesaki; Applications of fibre bundles to the certain class of C^* -alg-

ebiras, Tôhoku Math. J. 13, 498-523 (1961).