

複素領域における singular solutions の積分表現について

上智大 理工 文内 忠

§0. $L(z, \partial)$ を Ω ($C^{n+1} \supset \Omega \ni 0$) の上の正則微分作用素とする $K = \{\varphi(z) = 0\}$ と $L(z, \partial)$ の特性曲面とする. $O(\Omega - K)$ で $(\Omega - K)$ の単連結被覆面 $(\Omega - K)$ 上の正則函数の集合を表わす.

$L(z, \partial) u(z) = 0$ $u(z) \in O(\Omega - K)$ なる $u(z)$ を積分で表示するのが目的である. K の多重度が一定 ($=k$) であるという条件のもとで考察する. このような解の存在については Hamada [1], Hamada Leray Wajshel [2] 及び多くの人により研究されている.

K が Levi 条件を満たさない場合, K は常微分方程式における不確定特異点に類似していると考えられる. このことは上述の論文等で考察された singular Cauchy 問題において初期条件が pole であっても, 解は真性特異点をもつことに表われている.

特異点 K の近くでの $u(z)$ の漸近的挙動が考察できるような表現を得ることを目的とする.

§1. $C^{n+1} \ni z = (z_0, z') = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ とし,

$\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ とする. 作用素 $A(x, \partial)$ に
 対して, その主シンボルを $q(x, \xi)$ で表わす. 考察する作
 用素 $L(x, \partial)$ の条件を述べる.

(a). $L(x, \partial)$ の主シンボル $l(x, \xi)$ は

$$(1.1) \quad l(x, \xi) = g(x, \xi) p(x, \xi)^k$$

と分解できる. $p(x, \xi), g(x, \xi)$ は, それぞれ m_1 次,
 m_2 次の ξ について q 斉次多項式である, ($m = k m_1 + m_2$)

(b) $K = \{ \varphi(x) = 0 \}$ は $\varphi(0, x') = x_1$ ととり, $L(x, \partial)$
 の特性曲面で

$$(1.2) \quad \begin{aligned} p(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}) &\equiv 0, & g(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}) &\neq 0 \\ \frac{\partial p(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x})}{\partial \xi_0} \Big|_{x_0=0} &\neq 0 \end{aligned}$$

を満す.

$$\Sigma_p = \{ (x, \xi) ; p(x, \xi) = 0, \xi \neq 0 \} \quad \text{とおく.}$$

条件 (a) より

$$(1.3) \quad L(x, \partial) = \sum_{i=0}^m Q_i(x, \partial) P(x, \partial)^{k_i}$$

と表示できる, ここで

$$(1.4) \quad g_{m_i}(x, \xi) = g(x, \xi)$$

$$(1.5) \quad k_i < \infty \Rightarrow \begin{cases} \text{and } Q_i(x, \partial) P(x, \partial)^{k_i} = 0 \\ g_{m_i}(x, \xi) \neq 0 \text{ on } \Sigma_p \end{cases}$$

$$k_i = \infty \Rightarrow g_{m_i}(x, \xi) \equiv 0$$

(1.3) を用いて, Komatsu [3] により導入された非正則度 σ を定義する

$$(1.6) \quad \sigma = \max_{m-k+1 \leq i \leq m-1} \left\{ 1, \frac{k-k_i}{m-i} \right\}$$

以下 $\sigma > 1$ とする

$$(1.7) \quad \alpha = (\sigma - 1)/\sigma = \ell/g \quad \ell, g \in \mathbb{N} \quad (\ell, g) = 1$$

とおく,

$L(z, \partial)$ の subcharacteristic polynomial $l_{\text{sub}}(p; z, \xi, \eta)$ を次のように定義する.

$$(1.8) \quad l_{\text{sub}}(p; z, \xi, \eta) = \sum_{i \in \Delta_0} g_i(z, \xi) \eta^{k_i} \quad (z, \xi) \in \Sigma_p,$$

$$\text{ここで } \Delta_0 = \{m\} \cup \{m-k+1 \leq i \leq m-1; \sigma = \frac{(k-k_i)}{(m-i)}\}.$$

$l_{\text{sub}}(p; z, \xi, \eta)$ について次の仮定をおく.

$l_{\text{sub}}(p; 0, \frac{\partial \varphi^{(10)}}{\partial z}, \eta) = 0$ は k 個の相異なる根をもつ.

§2. §1 で述べた仮定のもとで次の主定理が得られる.

定理

$$(2.1) \quad \begin{aligned} L(z, \partial) u(z) &= 0 \\ u(z) &\in \mathcal{O}(\sqrt[k]{\Omega}) \end{aligned}$$

を満たす $u(z)$ は $\sqrt[k]{\Omega'}(\subset \sqrt[k]{\Omega})$ において次の様に表現できる;

$$(2.2) \quad \Omega_\theta = \{ z \in \Omega' ; |\arg \varphi(z) - \frac{\theta}{\alpha}| < \frac{\pi}{2} \}$$

よって

$$(2.3) \quad u(z) = \sum_{i=1}^k u_{I,i}^\theta(z) + u_{\frac{\theta}{2}}^\theta(z) + u_{\frac{\theta}{\alpha}}^\theta(z) + \bar{u}^\theta(z),$$

ここで

$$(2.4) \quad u_{I,i}^\theta(z) = \int_{\Gamma(\theta_i)} \exp(-\lambda \varphi(z)) F_i(z, \lambda, \theta) (\log \lambda) d\lambda$$

$$(2.5) \quad u_{\frac{\theta}{2}}^\theta(z) = \int_{\Gamma(\theta)} \exp(-\lambda \varphi(z)) G(z, \lambda, \theta) (\log \lambda) d\lambda$$

$$(2.6) \quad u_{\frac{\theta}{\alpha}}^\theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma(\theta_i)} \exp(-\lambda \varphi(z)) H_n(z, \lambda, \theta) (\log \lambda) d\lambda,$$

$$(2.7) \quad \bar{u}^\theta(z) \text{ は } \Omega' \text{ で正則}$$

である. また $\theta_i = -\frac{\theta}{\alpha}$.

$\Gamma(\theta_i)$ は $\infty e^{i\theta_i}$ から出発して $\lambda=0$ のまわり正の向きに $\frac{1}{\alpha}$ 回まわり $\infty e^{i(\theta_i + 2\pi \frac{1}{\alpha})}$ へ行く道.

$F_i(z, \lambda, \theta)$, $G(z, \lambda, \theta)$, $H_n(z, \lambda, \theta)$ は $|\lambda| > R$ で正則な函数.

$F_i(z, \lambda, \theta)$, $G(z, \lambda, \theta)$, $H_n(z, \lambda, \theta)$ の構成, 及びその性質は長くなるので省略する. 詳細は Ouchi [4] を見られたい.

$u_{I,i}^\theta(z)$ ($1 \leq i \leq k$) が特異点 K の近くでの $u(z)$ の

挙動の本質的な部分を示す。 $u_{z,1}^0(z)$ の構成に subcharacteristic polynomial の性質が大きくかかわってくる。

この表現式の応用として $u(z)$ の $z_0=0$ における $(\frac{\partial}{\partial z})^s u(z)$, $0 \leq s \leq k-1$, がすべて $z_0=0$ において極をもつ点のとき, 上で得られた式と解析することにより, 漸近挙動を調べると, 常微分方程式における Stokes 現象に対応することが起こることもわかる。 これら詳細は Ouchi [4] をみればよい。

References

- [1] Hamada, C.R. 276 (1973) 1681-1684
- [2] Hamada, Leray, Wagshal, J. Math. Pure Appl., 55 (1976) 297-352
- [3] Komatsu, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23. (1976) 297-342
- [4] Ouchi, Integral representations of singular solutions of linear partial differential operators in complex domains.