

# Schur 多重ゼータ値の双対公式とその拡張

東北大学理学研究科 大野 泰生

Yasuo Ohno

Mathematical Institute, Tohoku University

多重ゼータ値の双対公式とその一般化 (Okada) およびその変数補間が知られている。Schur 多重ゼータ値について同様の 3 定理を得たので報告する。前半 2 定理は、中筋麻貴氏 (上智大学, 東北大学) との共同研究 [NO] であり、最後の定理は、中筋氏と武田渉氏 (東京理科大学) との共同研究 [NOT] である。

## Schur 多重ゼータ値

整数の分割  $\lambda, \mu$  は  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0, \mu_1 \geq \dots \geq \mu_r \geq 0, \lambda_i \geq \mu_i$  を満たすとする。shape  $\delta = \lambda/\mu$  の skew Young diagram の集合を  $D_\delta$  とし、shape  $\delta$  の Young 盤の集合を  $T_\delta(\mathbb{Z})$ , shape  $\delta$  の半標準 Young 盤の集合を  $SSYT(\delta)$  とする。

Schur 多重ゼータ値は次のように定義される。

$$\zeta_\delta(k) = \sum_{M \in SSYT(\delta)} \prod_{(i,j) \in D_\delta} m_{ij}^{-k_{ij}} \quad k = (k_{ij})_{(i,j) \in D_\delta} \in W_\delta(\mathbb{Z})$$

ここで  $M = (m_{ij})_{(i,j) \in D_\delta}, W_\delta(\mathbb{Z}) = \left\{ k \in T_\delta(\mathbb{Z}) \mid \begin{array}{l} k_{ij} \geq 2 \text{ if } (i,j) \text{ is corner} \\ k_{ij} \geq 1 \text{ o.w.} \end{array} \right\}$  とする。corner とは Young diagram の右下角のことである。

$W_\delta(\mathbb{Z})$  が  $\zeta_\delta$  の収束 index であるが、双対公式を考える上では、 $W_\delta(\mathbb{Z})$  の部分集合  $I_\delta^D$  に制限する必要がある。 $I_\delta^D$  の定義のために、収束片を導入する。多重ゼータ値の高さ 1 の収束インデックス  $A(a,b) = \underbrace{1, \dots, 1}_{a-1}, b+1$  を

収束片と呼び、縦 1 列の Young 盤  $A(a,b) = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline 1 \\ \hline b+1 \\ \hline \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline 1 \\ \hline b+1 \\ \hline \end{array}} \right\} a-1$  とみなす。このとき

多重ゼータ値の双対公式は次のように書ける。

$$\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1-1}, b_1+1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_n-1}, b_n+1) = \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{b_n-1}, a_n+1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{b_1-1}, a_1+1)$$

$$\zeta \left( \begin{array}{c} \vdots \\ A(a_1, b_1) \\ \vdots \\ A(a_n, b_n) \end{array} \right) \quad \parallel \quad \zeta \left( \begin{array}{c} A(b_n, a_n) \\ \vdots \\ A(b_1, a_1) \end{array} \right)$$

例えば  $a_1=1, b_1=1, a_2=2, b_2=1$  とすれば

$$\zeta_{\square} \left( \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right) = \zeta(2, 1, 2) = \zeta(3, 2) = \zeta_{\square} \left( \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) \text{ である.}$$

indexの集合  $W_{\delta}^{diag}$ ,  $I_{\delta}^D$  を以下で定義する.

$$W_{\delta}^{diag} = \{ k \in W_{\delta} \mid k_{\lambda+1, j+1} = k_{\lambda, j} \}$$

$$I_{\delta}^D = \left\{ k \in W_{\delta}^{diag} \mid \begin{array}{l} k \text{ は収束片に分解でき、収束片を用いて記した場合に} \\ \text{その } (i, j) \text{ 成分と } (i+1, j+1) \text{ 成分が一致する.} \end{array} \right\}$$

$I_{\delta}^D \ni k$  に対し、 $k$  の双対 index  $k^{\dagger} \in I_{\delta^{\dagger}}^D$  を次で定める.

$k$  を収束片で表記したものを、180度回転し、各収束片を双対に取りかえ、元の表記に戻したものを  $k^{\dagger}$  とする.

例えば以下ようになる.

$$(i) \quad k = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline A(1,1) \\ \hline A(2,1) \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline A(2,1)^{\dagger} \\ \hline A(1,1)^{\dagger} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline A(1,2) \\ \hline A(1,1) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = k^{\dagger}$$

$$(ii) \quad k = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline A(1,2) & A(2,1) \\ \hline A(1,1) & A(1,2) \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline A(2,1) & A(1,1) \\ \hline A(1,2) & A(2,1) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} = k^{\dagger}$$

注意として、 $k^{\dagger}$  の shape  $\delta^{\dagger}$  は  $k$  に依っており、 $\delta$  だけでは決まらない.

## 双対公式とその一般化

以上の定義の下、Schur 多重ゼータ値の双対公式とその一般化 ( $\mathcal{O}$ -rel) およびその変数補間を得た。

定理 1 (双対公式; Nakasugi- $\mathcal{O}$  [NO])  $k \in I_{\delta}^D$  とその双対  $k^+ \in I_{\delta^+}^D$  に対して、次が成立する。

$$\zeta_{\delta}(k) = \zeta_{\delta^+}(k^+)$$

次に、Schur 版の  $\mathcal{O}$  和を  $k \in W_{\delta}(\mathbb{Z})$ ,  $\varepsilon \in T_{\delta}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し

$$\mathcal{O}(k; \ell) = \sum_{|\varepsilon|=\ell} \zeta_{\delta}(k + \varepsilon) \quad \left( |\varepsilon| = \sum_{(i,j) \in D_{\delta}} \varepsilon_{i,j} \right)$$

で定義する。

定理 2 (一般双対公式; Nakasugi- $\mathcal{O}$  [NO])  $k \in I_{\delta}^D$  とその双対  $k^+ \in I_{\delta^+}^D$  と、 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して、次が成立する。

$$\mathcal{O}(k; \ell) = \mathcal{O}(k^+; \ell)$$

定理 1, 定理 2 は系統 1 列の Young 盤に制限すると、通常の高重ゼータ値における双対公式と一般双対公式 ( $\mathcal{O}$ -rel.) となる。

高重ゼータ値の  $\mathcal{O}$  和の複素補間は、Hirose-Murahara-Onozuka [HMO] において導入され、双対性がそのまま補間されることか示された。今回の研究では、Kamano-Onozuka [KO] によって得られた積分表示を拡張して Schur 版の  $\mathcal{O}$  和の複素補間を定義した。

定義  $k \in I_{\delta}^D$  と複素変数  $s \in \mathbb{C}$  に対し、関数  $I_k(s)$  を次で定義する。

$$I_k(s) = -\frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{(m_{ij}) \in SSYT(\delta)} \prod_{(i,j) \in D_{\delta}} \frac{1}{m_{ij}^{k_{i,j}-1}} \int_0^{\infty} \frac{w^{-s-1}}{\prod_{(i,j) \in D_{\delta}} (w + m_{ij})} dw$$

関数  $I_k(s)$  に対して、次の定理を得た。

定理3 (一般双対公式の複素補間; Nakasuji - O - Takeda [NOT])

(1)  $k \in I_\delta^D$ ,  $\varepsilon \in T_\delta(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  と  $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して、次の関係が成り立つ。

$$I_k(l) = \sum_{|\varepsilon|=l} \zeta_\delta(k+\varepsilon) = O(k; l)$$

(2)  $k \in I_\delta^D$  とその双対  $k^\dagger \in I_{\delta^\dagger}^D$  と、 $s \in \mathbb{C}$  に対して、次が成り立つ。

$$I_k(s) = I_{k^\dagger}(s)$$

謝辞

この度のRIMS「多重ゼータ値の諸相」にて講演機会を頂きありがとうございます。本研究において筆者は、科学研究費 21H04430, 16H06336, 18H01110, 19K03437 から一部支援を受けました。

参考文献

- [KO] K.Kamano-T.Onozuka, Analytic properties of Ohno function, *Mathematica Scandinavica* 127 (2021) 600-616.
- [HMO] M.Hirose-H.Murahara-T.Onozuka, An interpolation of Ohno's relation to complex functions, *Mathematica Scandinavica* 126 (2020) 293-297.
- [NO] M.Nakasuji-Y.Ohno, Duality formula and its generalization for Schur multiple zeta values, (arXiv: 2109.14362).
- [NOT] M.Nakasuji-Y.Ohno-W.Takeda, An interpolation of the generalized duality formula for the Schur multiple zeta values to complex functions, (arXiv: 2204.04839)
- [NPY] M.Nakasuji-O.Phuksuwan-Y.Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Adv. Math.*, 333 (2018) 570-619.
- [O] Y.Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory* 74 (1999) 39-43.