

区間型マルコフ決定過程の推移行列の推定について

(On a way of estimating the transition probabilities in controlled Markov set-chains)

神奈川大学・理学部・堀口正之

Masayuki HORIGUCHI

Professor of Department of Mathematics,

Faculty of Science,

Kanagawa University

Abstract

推移法則未知のマルコフ決定過程において、状態観測に基づき推移法則を推定しながら適応型最適政策を求める学習問題がある。その推移法則の推定と最適化問題を構成するとき事前区間測度を用いた区間型マルコフ決定過程による解決アプローチの方法がある。本報告では、ディリクレ分布による区間型推定と推定に用いられるベータ関数比における方程式の解と不動点について考察する。

1 はじめに

有限マルコフ決定過程(Finite MDPs)は、次の4つの項目で構成される。

$$\{S, A, Q, r\}$$

ここで、 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ は状態空間を表し $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ は決定空間(行動空間) $Q = (q_{ij}(a))$ の各要素 $q_{ij}(a)$ は状態 i において決定 a を選択した時の次の期の推移状態が j である確率を表し $q_{ij}(a) \in P(S|S \times A)$ であるような確率核の集まりで Q を単に推移確率行列と呼ぶ。 $r = r(i, a)$ は $S \times A$ 上の利得関数として定義される。システムの状態が $i \in S$ で $a \in A$ を選択した時、次の期の状態へは $q(\cdot|(i, a))$ に従って推移し期待利得は $r(i, a)$ となる。また本稿のマルコフ決定過程(uncertain MDPs)では、推移法則 $Q = (q_{ij}(a))$ が未知である場合を考察する。状態観測によって未知の推移確率行列の各要素 $q_i(a)$ はそれぞれ区間表現 $[q_{i.}(a), \bar{q}_{i.}(a)]$ される。ここでは推移法則推定の具体的な区間値の導出について考察するが、区間型推移法則をもつマルコフ決定過程 (controlled Markov set-chain models) については、Kurano et al. [24]などの先行研究が挙げられる。

推移法則の推定は, 各決定選択に応じた推移結果の状態観測数に基づいて行われるためここでは簡略して推定する行列を $Q = (q_{ij})$ と表すことにする. さらに, マルコフ決定過程での状態推移は, 現在の状態 i に対してその推移法則 $q_{i\cdot}$ に従って次の期の状態が確率的に定まる. そこで, 以後, 事前区間測度を用いて Q の第 i 行目 $q_{i\cdot}$ についてベイズ推定を行う.

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} & \cdots & q_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

現在の状態が i のときに次の期に推移した状態 j への推移回数 σ_j を記録したデータセットを $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ とおく. このとき, $P_n = P(S) = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) | p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ に対して我々が知りたいのは以下のような σ 多項分布の超パラメータ $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n$ であってディリクレ分布とも呼ばれる多次元分布の推定の方法である.

$$f(\sigma | \hat{\sigma}, p) = \frac{(\sigma_1 + \cdots + \sigma_n)!}{\sigma_1! \cdots \sigma_n!} p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \cdots p_n^{\sigma_n}. \quad (1)$$

ここで $\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^n \sigma_i$ である.

P_n 上のルベーク測度を $L(\cdot)$ とし, 定数 $k \geq 1$ に対して $[L, kL]$ によって事前区間測度を表す. データセット σ から, $[L_\sigma, kL_\sigma]$ による事後区間測度は以下のようにして得られる (cf. [31] DeRobertis and Hartigan (1981)):

$$L_\sigma(A) = \int_A f(\sigma | \hat{\sigma}, p) L(dp) \quad \text{for } A \in \mathcal{B}, \quad (2)$$

ただし $\mathcal{B}$ は P_n の部分集合による σ -集合体である.

DeRobertis and Hartigan ([31]) の結果により, 推定する推移確率の第 i 成分 p_i の区間表現は以下のような積分比の範囲として得られる:

$$\left\{ \int_{P_n} p_i Q(dp) / \int_{P_n} Q(dp) \mid L_\sigma \leq Q \leq U_\sigma \right\}.$$

この p_i の事後区間を $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ と表すことにする.

次が成り立つ.

Theorem 1 ([31] DeRobertis and Hartigan (1981)). 事後区間測度 $[L_\sigma, kL_\sigma]$ によって, 推移確率成分 p_i の下限値 $\underline{\lambda}_i$ と上限値 $\bar{\lambda}_i$ は次のそれぞれの方程式のただ一つの解である:

$$kL_\sigma(p_i - \underline{\lambda}_i)^- + L_\sigma(p_i - \underline{\lambda}_i)^+ = 0, \quad (3)$$

$$kL_\sigma(p_i - \bar{\lambda}_i)^+ + L_\sigma(p_i - \bar{\lambda}_i)^- = 0, \quad (4)$$

ここで, $x^+ = \max\{0, x\}$, $x^- = x - x^+ = \min\{0, x\}$ である.

2 方程式の解とディリクレ分布

事後区間 $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ のそれぞれの端点は, 具体的には, 次のようにディリクレ分布, とくにベータ分布による方程式の解として特徴づけられる.

以下に, ベータ分布とディリクレ分布の性質をまとめておく (cf. [41] Wiiks 1962).

パラメータ $a, b (> 0)$ と $x \in [0, 1]$ に対して $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$, $B(a, b, x) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ とおく. $\Gamma(\cdot)$ によってガンマ関数を表すことにする, すなわち, パラメータ a に対して $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ とおく. 前節の p_1 の事後区間を求めるための方程式 (3) と (4) は以下のようにディリクレ積分によって表される:

下限値 $\underline{\lambda}_i$:

$$k \int \cdots \int_{0 \leq p_1 \leq \lambda, p \in P_n} (p_1 - \lambda) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp + \int \cdots \int_{\lambda \leq p_1 \leq 1, p \in P_n} (p_1 - \lambda) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp = 0, \quad (5)$$

上限値 $\bar{\lambda}_i$:

$$k \int \cdots \int_{\lambda \leq p_1 \leq 1, p \in P_n} (p_1 - \lambda) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp + \int \cdots \int_{0 \leq p_1 \leq \lambda, p \in P_n} (p_1 - \lambda) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp = 0. \quad (6)$$

ディリクレ積分を $D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1})$ と $D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}, \lambda)$ ($k \geq 1, 0 \leq \lambda \leq 1$) によって表す. 第2番目の関数は積分領域の第1変数 x_1 に制約が付けられ λ の関数として定義される:

$$\begin{aligned} D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) \\ := \int \cdots \int_{S_k} x_1^{\nu_1-1} \cdots x_k^{\nu_k-1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_k)^{\nu_{k+1}-1} dx_1 \cdots dx_k, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D(\nu_1, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}, \lambda) \\ := \int \cdots \int_{S_k \cap \{0 \leq x_1 \leq \lambda\}} x_1^{\nu_1-1} \cdots x_k^{\nu_k-1} (1 - x_1 - \cdots - x_n)^{\nu_{k+1}-1} dx_1 \cdots dx_k \end{aligned} \quad (8)$$

ただし, $S_k := \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k x_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^k$.

累次積分によって以下が得られる.

$$D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) = B(\nu_1, \nu_2 + \cdots + \nu_{k+1}) D(\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}), \quad (9)$$

$$D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}, \lambda) = B(\nu_1, \nu_2 + \cdots + \nu_{k+1}, \lambda) D(\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}). \quad (10)$$

また, 以下のように帰納的にディリクレ積分はベータ関数の積分として得られることがわかる.

$k = 1$ のとき: $D(\nu_1; \nu_2) = B(\nu_1, \nu_2)$ は定義から得られる.

$k \geq 2$ のとき: ベータ関数 $B(a, b)$ とガンマ関数 $\Gamma(a)$ から

$$\begin{aligned} D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) \\ = \frac{\Gamma(\nu_1 + \cdots + \nu_{k+1})}{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \cdots \Gamma(\nu_{k+1})} B(\nu_1, \nu_2 + \cdots + \nu_{k+1}) B(\nu_2, \nu_3 + \cdots + \nu_{k+1}) \cdots B(\nu_k, \nu_{k+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

ここで

$$D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) = \frac{\Gamma(\nu_1) \cdots \Gamma(\nu_{k+1})}{\Gamma(\nu_1 + \cdots + \nu_{k+1})}, \quad (12)$$

であるので

$$\begin{aligned} & D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) \\ &= \frac{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2 + \cdots + \nu_{k+1})}{\Gamma(\nu_1 + \cdots + \nu_{k+1})} \frac{\Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3) \cdots \Gamma(\nu_{k+1})}{\Gamma(\nu_2 + \cdots + \nu_{k+1})} \\ &= B(\nu_1, \nu_2 + \cdots + \nu_{k+1}) D(\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) \\ &= \dots \\ &= B(\nu_1, \nu_2 + \cdots + \nu_{k+1}) B(\nu_2, \nu_3 + \cdots + \nu_{k+1}) \cdots B(\nu_{k-1}, \nu_k + \cdots + \nu_{k+1}) D(\nu_k; \nu_{k+1}) \\ &= \prod_{n=1}^{n=k} B\left(\nu_n, \sum_{l=n+1}^{k+1} \nu_l\right). \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} D(\nu_1, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}, \lambda) &= B(\nu_1, \nu_2 + \cdots + \nu_{k+1}, \lambda) \cdot \\ &\quad B(\nu_2, \nu_3 + \cdots + \nu_{k+1}) B(\nu_3, \nu_4 + \cdots + \nu_{k+1}) \cdots B(\nu_k, \nu_{k+1}) \end{aligned}$$

であるので, 方程式 (3) と (4) は関数 $K(s, t, \lambda)$, $G(s, t, \lambda)$ によって次のように表すことができる:

$$K(s, t, \lambda) := B(s+1, t) - \lambda B(s, t) + (k-1) (B(s+1, t, \lambda) - \lambda B(s, t, \lambda)) \quad (13)$$

$$= \left(\frac{s}{s+t} - \lambda \right) B(s, t) + (k-1) (B(s+1, t, \lambda) - \lambda B(s, t, \lambda)), \quad (14)$$

$$G(s, t, \lambda) := k (B(s+1, t) - \lambda B(s, t)) - (k-1) (B(s+1, t, \lambda) + \lambda B(s, t, \lambda)) \quad (15)$$

$$= k \left(\frac{s}{s+t} - \lambda \right) B(s, t) - (k-1) (B(s+1, t, \lambda) - \lambda B(s, t, \lambda)), \quad (16)$$

ただし, $s = \sigma_i + 1, t = \hat{\sigma} + n - s, \lambda \in [0, 1]$ である.

次を得る.

Theorem 2. データセット $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ と $\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^n \sigma_i$ と事前区間測度 $[L, kL]$ によって超パラメータ $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ の第 i 成分 p_i の事後区間 $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ のそれぞれの限界値 $\underline{\lambda}$ (下限値) と $\bar{\lambda}$ (上限値) はそれぞれ関数 $K(s, t, \lambda)$ と $G(s, t, \lambda)$ による方程式のただ一つの解である.

$$K(s, t, \underline{\lambda}) = 0, \quad (17)$$

$$G(s, t, \bar{\lambda}) = 0. \quad (18)$$

3 関数 $K(s, t, \lambda)$ と $G(s, t, \lambda)$ の性質と反復法

本節では、関数の性質と方程式の解を求めるための反復法についてまとめる。

Proposition 1. 定数 $s > 0$ と $t > 0$ を固定しておく. Then, $K(s, t, \lambda)$ は $\lambda \in [0, 1]$ に関して上に凸かつ狭義単調減少関数である. $G(s, t, \lambda)$ は $\lambda \in [0, 1]$ に関して下に凸かつ協義単調減少関数である.

一般に、自然数 m, n に対して

$$B(m, n, \lambda) = \int_0^\lambda x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i \frac{\lambda^{m+i}}{m+i} \quad (19)$$

が成り立つから、方程式の解を反復的に求めるためにニュートンラフソン法を用いることができる。

Algorithm A:

Step 1. $m := 0$ と $n := 0$ とおく. $\varepsilon > 0$ を決める. 2実数 $0 < x, y < 1$ を $K(s, t, x) < 0$ と $G(s, t, y) > 0$ を満たすようにとる. $x_m := x$ と $y_n := y$ とおく.

$$2(a). W(s, t, x_m) := -\frac{(\frac{s}{s+t} - x_m)B(s, t) + (k-1)(\frac{s}{s+t} - x_m)B(s, t, x_m) - \frac{k-1}{s+t}x_m^s(1-x_m)^t}{B(s, t) + (k-1)B(s, t, x_m)} \text{ と}$$

おく.

$x_{m+1} := x_m - W(s, t, x_m)$ を求める

2(b). もし $|x_{m+1} - x_m| < \varepsilon$ ならば、 $\Delta_i := x_{m+1}$ として停止する. そうでなければ m のステップ数を1つ増加させて Step 2(a) へ戻る.

$$3(a). H(s, t, y_n) := -\frac{k(\frac{s}{s+t} - y_n)B(s, t) + (k-1)(\frac{s}{s+t} - y_n)B(s, t, y_n) - \frac{k-1}{s+t}y_n^s(1-y_n)^t}{kB(s, t) - (k-1)B(s, t, y_n)}.$$

とおく. $y_{n+1} := y_n - H(s, t, y_n)$ を求める.

3(b). もし $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$ ならば、 $\bar{\lambda}_i := y_{n+1}$ として停止する. そうでなければ n のステップ数を1つ増加させて Step 3(a) へ戻る.

4 方程式の解と不動点

本節では、前節のAlgorithm A に対して、変形された関数の不動点を求めることを考える。

次の命題が成り立つ. ただし、 K', G' はそれぞれ1次導関数を表す.

Proposition 2.

$$K(s, t, \lambda) = K'(s+1, t, \lambda) - \lambda K'(s, t, \lambda), \quad (20)$$

$$G(s, t, \lambda) = G'(s+1, t, \lambda) - \lambda G'(s, t, \lambda). \quad (21)$$

$\lambda \in [0, 1]$ に対して, $K'(s, t, \lambda) < 0$ と $G'(s, t, \lambda) < 0$ が成り立つから, 次も得られる.

Proposition 3. For $\lambda \in [0, 1]$

$$\frac{K(s, t, \lambda)}{K'(s, t, \lambda)} = \lambda - \frac{K'(s+1, t, \lambda)}{K'(s, t, \lambda)}, \quad (22)$$

$$\frac{G(s, t, \lambda)}{G'(s, t, \lambda)} = \lambda - \frac{G'(s+1, t, \lambda)}{G'(s, t, \lambda)}. \quad (23)$$

ここで, $x \in [0, 1]$ に対してそれぞれ $\phi(x) = \frac{K'(s+1, t, x)}{K'(s, t, x)}$ と $\psi(x) = \frac{G'(s+1, t, x)}{G'(s, t, x)}$ とおくと Proposition 3 から,

$$\phi(x) = x - \frac{K(s, t, x)}{K'(s, t, x)} \quad (24)$$

$$\psi(x) = x - \frac{G(s, t, x)}{G'(s, t, x)} \quad (25)$$

を得る. よって, $K(s, t, \alpha) = 0$ ($G(s, t, \alpha) = 0$) は $\phi(\alpha) = \alpha$ ($\psi(\alpha) = \alpha$) と同値である. また, **Algorithm A** での反復 (22) と (23) は ϕ, ψ によって次のように表すことができる.

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{K'(s+1, t, x_n)}{K'(s, t, x_n)} = \frac{B(s+1, t) + (k-1)B(s+1, t, x_n)}{B(s, t) + (k-1)B(s, t, x_n)}, \quad (26)$$

$$x_{n+1} = \psi(x_n) = \frac{G'(s+1, t, x_n)}{G'(s, t, x_n)} = \frac{kB(s+1, t) - (k-1)B(s+1, t, x_n)}{kB(s, t) - (k-1)B(s, t, x_n)}. \quad (27)$$

次の定理と反復法を得る.

Theorem 3. 定数 $0 < \alpha, \beta < 1$ に対して以下が成り立つ.

$$(i) \quad K(s, t, \alpha) = 0 \text{ iff } \phi(\alpha) = \alpha.$$

$$(ii) \quad G(s, t, \beta) = 0 \text{ iff } \psi(\beta) = \beta.$$

Algorithm B:

Step 1. $m := 0, n := 0$ とおき $\varepsilon > 0$ を決める. 実数 $0 < x, y < 1$ を $K(s, t, x) < 0$ と $G(s, t, y) > 0$ を満たすように選ぶ. $x_m := x, y_n := y$ とおく.

2(a). $x_{m+1} := \phi(x_m)$ を求める.

2(b). $|x_{m+1} - x_m| < \varepsilon$ ならば, $\underline{x} := x_{m+1}$ において Step 3(a) へ. そうでなければ m を1つ増加させて Step 2(a) へ戻る.

3(a). $y_{n+1} := \psi(y_n)$ とおく.

3(b). もし $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$ ならば, $\bar{\lambda} := y_{n+1}$ において停止する. そうでなければ n を1つ増加させて Step 3(a) へ戻る.

方程式の解が **Algorithm B** によって関数 ϕ と ψ のそれぞれの不動点として得られることは次の性質による.

集合 X を $\mathbb{R}$ の閉部分集合とする. $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数で g はすべての $x \in X$ に対して $g(x) > 0$ であるとする. 実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $T(x) = f(x) - \lambda g(x)$ と $T_\lambda = \max_{x \in X} \{f(x) - \lambda g(x)\}$ とおく.

Theorem 4. 定数 $\lambda \in [0, 1]$ に対して, $T_\lambda = 0$ iff $\max_{x \in X} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \lambda$.

Corollary 1. 定数 $\lambda \in [0, 1]$ に対して, $\min_{x \in X} \{f(x) - \lambda g(x)\} = 0$ iff $\min_{x \in X} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \lambda$.

定数 $\lambda \in [0, 1]$ に対して, $\phi_\lambda = \min_{x \in [0, 1]} \{K'(s, t, x) - \lambda K'(s + 1, t, x)\}$ と $\psi_\lambda = \max_{x \in [0, 1]} \{G'(s, t, x) - \lambda G'(s + 1, t, x)\}$ とおくと Theorem 4 と Corollary 1 とから次が得られる.

Theorem 5. Let $\lambda \in [0, 1]$.

(i) If $\phi(\lambda) = \lambda$, then $K(s, t, \lambda) = 0$.

(ii) If $\psi(\lambda) = \lambda$, then $K(s, t, \lambda) = 0$.

この Theorem 5 から, 推移法則の事後区間を求めるための方程式 (3) と (4) の解は $[0, 1]$ 上の関数 ϕ と ψ のそれぞれの不動点として特徴づけられることが示された.

5 数値例

本節では, 不動点としての方程式の解の特徴を数値例で確認する.

マルコフ決定過程での推移確率行列 $Q = (q_{ij}(a))$ の第 i 行目 $q_i(a)$ の事前区間測度 $[L, 2L]$ による推定問題である. 問題の簡略化のため $a \in A$ は1つに固定する.

状態集合を $S = \{1, 2, 3\}$ とし, 固定された状態 i においてデータセット $\sigma = (4, 2, 4)$ が観測されたとする. このとき, 推定対象は $p = (p_1, p_2, p_3)$ と表されて, p のディリクレ分布の確率密度関数は標準化定数の $C > 0$ も用いると

$$f(p|\sigma) = C p_1^3 p_2 (1 - p_1 - p_2)^3 \quad (p_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 p_i = 1) \quad (28)$$

と表されて, (p_1, p_2) 平面を底面にもつ密度関数の曲面は Figure 1 のようになる.

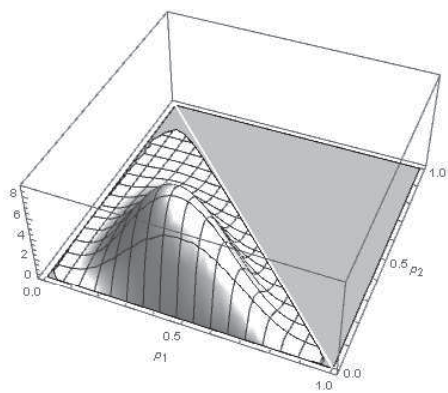


Figure 1: $p = (p_1, p_2, p_3)$ のディリクレ分布の密度関数の例

$p = (p_1, p_2, p_3)$ のMLEは, $p = (2/5, 1/10, 2/5)$ である.

次に, 方程式 (3) と (4) の解を関数 $\phi(x), \psi(x)$ から求めた時の点劣の軌跡と得られる区間を図示する (Figures 2,3,4). p_1 と p_3 については, $k = 2, s = 5$ and $t = 8$ において, Algorithm B を初期値 $x_1 = 1$ と $y_1 = 0$ で求めている. 反復法によって得られる点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ はそれぞれ

$$\{x_n\} = \{1, .384615, .349871, .348629, .348627, .348627, \dots\}, \tag{29}$$

$$\{y_n\} = \{0, .384615, .420188, .421493, .421494, .421494, \dots\} \tag{30}$$

であって, 関数の特徴から $\phi(0) = \phi(1) = \psi(0) = \psi(1) = \frac{s}{s+t}$ であるのだがこれはFigure 2 から2直線 $y = x$ と $y = \frac{s}{s+t}$ の交点として見てとれる.

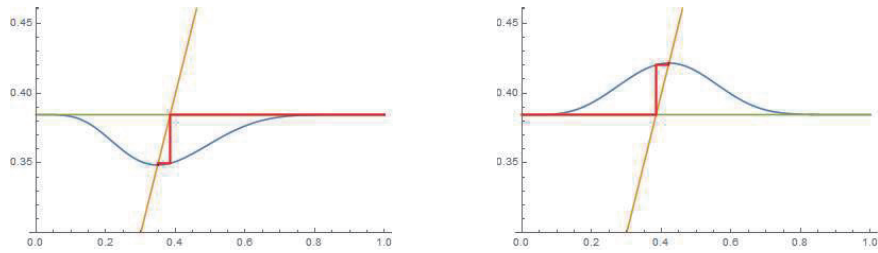


Figure 2: $\phi(x), \psi(x)$ と反復によって得られる点列 x_n, y_n の軌跡の例

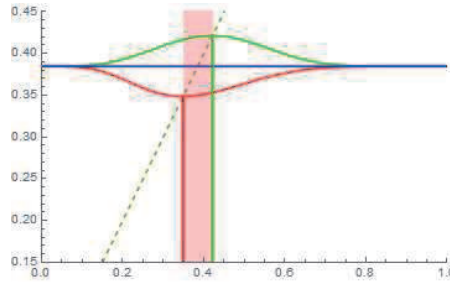


Figure 3: $\phi(x)$ と $\psi(x)$ の不動点と p_1, p_3 の事後推定区間 $[0.349, 0.421]$

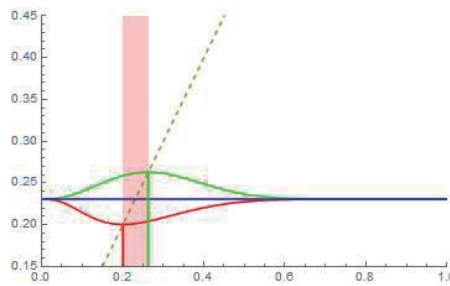


Figure 4: $\phi(x)$ と $\psi(x)$ の不動点と p_2 の事後推定区間 $[0.201, 0.263]$

References

- [1] M. H. DeGroot. *Optimal statistical decisions*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1970.
- [2] T. S. Ferguson. *Mathematical Statistics*. Academic Press, New York - London. 1967.
- [3] D. J. Hartfiel. *Markov set-chains*, volume 1695 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [4] M. Horiguchi. Newton-Raphson Iteration for Uncertain Markov Decision Processes. In *Proceedings of the 2018 International Conference on Management and Operations Research, Yan Xianbin et al. Ed. ARPUB(2018)*, pages 42–52.
- [5] 伊喜哲一郎, 堀口正之, 安田正實 and 蔵野正美. 不確実性の下でのマルコフ決定過程に対する区間ベイズ手法. In *数理解析研究所講究録1636「不確実性と意思決定の数理」*, pages 1–8.

- [6] Masami Kurano, Masami Yasuda, and Jun-ichi Nakagami. Interval methods for uncertain Markov decision processes. In *Markov processes and controlled Markov chains (Changsha, 1999)*, pages 223–232. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [7] Masami Kurano, Masayuki Horiguchi, and Minoru Sasaki. Flexibly structured Bayesian methods and their applications to quality control. (in Japanese) In *Shogaku Ronkyu*, Vol. 61(3), pages 181–192. Kwansei University, 2014.
- [8] L. De Robertis and J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Ann. Statist.*, 9:235–244, 1981.
- [9] M. Sasaki, M. Horiguchi and M. Kurano. Adaptive methods for multivariate bayesian control chart. *RIMS kokyuroku No. 1912 (In Japanese)*, pages 181–192, 2014.
- [10] Samuel S. Wilks. *Mathematical statistics*. A Wiley Publication in Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1962.

Masayuki Horiguchi
 Department of Mathematics,
 Faculty of Science, Kanagawa University
 Address: Tsuchiya 2946, Hiratsuka City,
 Kanagawa Prefecture, 259-1293, Japan
 E-mail address: horiguchi@kanagawa-u.ac.jp

神奈川県大学・理学部 堀口正之