

Weyl 和と van der Corput の方法

(山梨大. 教員) 中井 喜信

0° 解析数論において指数和の方法と呼ばれるものについて
 今粗で解説をするの¹⁾の研究集巻の目的の一つで、筆者
 はそのうちのいわゆる「van der Corput の方法」と言われる
 のについて述べる。van der Corput が [v.d.C-1, 2] に
 見つけた方法(一変数型)は、その後 [T], [Ra] などにより、
 ある程度改良され、又、二変数型(あるいは多変数型)につ
 いても [T], ..., [K-1, 2], ([M-1, 2] には和と²⁾領域の影響も
 調べる試みがある)などに拡張されているが、本質的な所にお
 いては、後述の van der Corput が見つけたものの形の [系 1])
 で推察されることが多く、いわゆる二次形式のテータ級数の互換
 公式の域を超えず、その点では、[久], [Vo] などにも示唆される
 方向としての、例えば αx^k ($\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$) についての
 「高次テータ級数」と称すべきものはまだ見つけられていないと見
 る。([M] には 3 次の場合が試みられているが、いわゆる反

転公式としてはいさな不十分。対応すべき高次の連分教展開とは何者であろうか)

そこで、ここでは van der Corput が最初に見つけた事の本質的取所のみを解説する事にしたい。方法であるので、文献として挙げるべきものは各分野にあたり、筆者の見落しも多い事であるから、well-known なもの、及び新しいものを挙げて、あとは筆者の式にたぐってゆけるもののみとしたい。

1° この集合の最初の語であるので、まず指数和 (Weyl 和) とは何の、及び、その比較を行、てみたい。

例えば、 $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$) により

$$S_n = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{L}_n} F(\mathbf{x}) = n$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{L}_n \subset \mathbb{R}^n$$

を調べたいとき、 F , n , $\mathcal{L}_n$ の組合せに依りていろいろの方法が用意されるわけであるが、指数和は

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n \text{ は、degree of } F \text{ に依りてある程度大きい} \\ \mathcal{L}_n \text{ は } \mathcal{L}_n \text{ 次元空間下の「区間」の形} \end{cases}$$

の時に、主には有効な道具である。

F が与えられたときに、個々の n に対し (適当に $\mathcal{L}_n$ を選んで) S_n が非零かどうかを判定したいとき、原理的には次

のようになる。

① 直接 $\#J_n \geq 1$ を示す方法。例としては Waring の問題における Davenport の lemma ([Van], 第6章) や、いわゆる篩の方法など。

② 母函数を用いる方法。いま

$$f(z) = \sum_{\substack{x \in J_n \cap \mathbb{Z}^n}} p_x \cdot z^{F(x)} \quad \begin{array}{l} z \in \mathbb{C} \\ p_x: \text{適当な重み} \end{array}$$

とおいて、 $f(z)$ が $z=0$ のまわりで正則ならば

$$J_n = \sum_{\substack{x \in J_n \cap \mathbb{Z}^n \\ F(x)=n}} p_x$$

は

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \cdot \frac{dz}{z^{n+1}}$$

となる。右辺の Cauchy 積分からいかにして non-trivial な情報を得るか (少なく、所定の n と適当な z で $J_n \neq \emptyset$ を示す) が難物であり、この一方法として、Hardy-Littlewood の circle-method がある。([Van] に良い解説あり)。右辺で (もし成功すれば手法から) いわゆる Singular Series と呼ばれる「局所解」の $\mathbb{Z}$ -数密度の無限積に相等する因子が、丁度 Hasse の原理に関連するものである。現実には、各種問題で局所解はよく調べられてゐるが、肝心の、Hasse の原理そのものに対応する上記情報ととりあつた部分は、限られた場合にしか成功し難い。

③ 原理的には、②の方法と同様であるが、③では通常 J_n は正の自然数 (または 0) の全体を覆うるや下まゝな set を使うので

収束の問題がからむ。そこで、 Ω_n は、はじめから「有限区間」
 として、 $P_X = 1$, $z = e^{2\pi i \alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) の形で

$$f(\alpha) = \sum_{X \in \Omega_n \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i \alpha F(X)} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

の形の和と指えれば、良いであらう。そこで歴史的言葉として、

$$F(X) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d : \text{区間型}$$

により

$$\sum_{X \in \Omega \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i F(X)}$$

の形の和を、通常 Weyl 和と呼び、更に松竹で、

$F(X)$ は適当な(例えば C^∞ -級)の変数実数値函数

のとき、同様の形の和を指数和と呼んでいる。

広く言えば、 $F(X) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$ なら、Weyl 和は

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i \alpha m}, \quad a_m = \# \{ X \in \Omega \cap \mathbb{Z}^d \text{ st. } F(X) = m \}$$

と見て、Fourier 級数論の一部分と言えそうだが、そこはそれ。
 マニヤ的に個所の工夫がなされてきていふわけである。
 Fourier 級数論の立場からは、本報告集で、倉坪氏の解説があ
 る。

それから、例えば、Riemann のゼータ函数の解説に使うため
 に (参、[T], 中 4, 5 章)

$$\sum_x g(x) \cdot e^{2\pi i F(x)}$$

$g(x)$ + 実数延取数

の形の和を扱う事がある事が多い。 $\sum_x e^{2\pi i F(x)}$ の事から、
上記の和の情報を得るのに、いわゆる Abel 和法 (部分和法) や
I. M. Vinogradov の方法などがある。(本報告集の本橋氏の論文)

2° $F(x)$ については、

$\left\{ \begin{array}{l} \text{一変数型の和になる (additive type)} \\ \text{本質的に多変数の子変数分離が効く事} \end{array} \right.$

と分れる。(勿論中間状態も可能)。しかし最初と最後で
目標とすべきものは、Waring の問題に関する Weyl 和では
なからうか。現在は、勿論、子に証明されてる事であるが
期待しきれない評価は、Weyl 和について述べれば、一変数型で

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x \quad \in \mathbb{Z}[x] \quad (k \geq 2 \text{ 自然数})$$

$$N \gg 1$$

について、

[[local $\frac{1}{2}$]] $\alpha \in \mathbb{R}$, 既約分数 $\frac{a}{b}$ ($b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$) の

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b N^{k-1}}, \quad 1 \leq b \leq N^{k-1}$$

のとき ($N \rightarrow \infty$ について)

$$\sum_{n: 1 \leq n \leq X+N} e^{2\pi i \alpha f(n)} = \left(\frac{1}{b} \sum_{1 \leq n \leq b} e^{2\pi i \frac{a}{b} f(n)} \right) \times \int_X^{X+N} e^{2\pi i (\alpha - \frac{a}{b}) f(x)} dx + O_k(N^{1-\frac{1}{k}})$$

但し $1 \leq b \leq N$ のとき

及ぶ

注) 講演中の N, P の関係は 240頁

$$O_k(N^{-\frac{1}{k}}) \quad (??) \quad \text{但し } N < 7 \leq N^{k-1} \text{ のとき}$$

であらう。次に

[[平均値型]] $\lambda > k$ (λ 実数) で $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \leq X} e^{2\pi i \alpha f(n)} \right|^\lambda d\alpha \ll_{(\lambda, \lambda \varepsilon)} N^{\lambda - k + \varepsilon} \quad (??)$$

であらう。②)

以下同様。 $k \geq 3$ では、まだ不十分で ($k=2$ は $[N]$, $[N-T, N]$ など) (かつ、[[平均値型]] では、現今の手法では、 $\lambda = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$) の形でないと実際には扱えない。一般の指数和型の場合は、 f と区間の組合せがいろいろ可能である。例えば $f^{(k)}$ (高階導函数) や、van der Corput の手法では f'' (多変数型なら Hessian) など、 α の役を果たすことになる。

3° ここで試みに指数和についての著名な三手法の比較を行ってみよう。(参. [T], 第5, 6章)

	一変数型 (指数和 $\sum_{X < n \leq X+N} e^{2\pi i f(n)}$ または Weyl 和 $\sum_{X < n \leq X+N} e^{2\pi i \alpha f(n)}$ ($f: k$ 次))		
	Weyl-Hardy-Littlewood の手法	van der Corput の手法	I.M. Vinogradov の手法
不等式	• Schwartz の不等式 • 三角不等式	• 積分の平均値定理 $\int_X^X f(x) g(x) dx = f(x) \int_X^X g(x) dx$ • 単減 • 利用した区間の評価	• Hölder の不等式 (和, 積分の両方) • double sum method

②) $\lambda - k + \varepsilon$ の $+\varepsilon$ は λ が十分大きければ不要

道 具	差分 (多項式形式) 極化形式	Euler の和公式 (有限和形の Poisson 和公式) 特に $\langle x \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i v x}}{v}$ (鋸歯型函数)	中和と基本対称式との関係の Newton の公式 L, -) ルンとしてのあり型の連立一次方程式の整数解の个数
対象	主に Weyl 和	F' (一定) (∴ F' 単調) のもの	Weyl 和と各次数の係数の一般的事象の多様性。指数和に4. 有力
証明 とその 各 段階 の 変化	$ (-) $ の中では区間は一定連続した整数とわける。 $ (-) $ の外では区間長は相乗的に増す	F' (一定の区間) に絞る。 和は連続整数の上とわける	$ (-) $ の中では区間長は $x \mapsto x^{1-\frac{1}{k}}$ となり外では区間長が $x^{\frac{1}{k}} \times (-)$ で増す。
更に得られる 評価	local 型	local 型	平均型
使用した Diophantus 近似の 評価	$\# \{x \in \mathbb{Z} \mid x < X \leq X+N, \ \alpha x \ \leq \frac{1}{\sigma}\}$ の上界	$ F''(x) \leq \lambda$ on $[X, X+N]$ (実用には差分を利用して) $ F^{(k+1)} \leq \lambda_{k+1}$ として利用	$ F^{(k+1)} \leq \lambda_{k+1}$ on $[X, X+N]$ $\# \{x \in \mathbb{Z} \mid x < X \leq X+N, \ \alpha x \ \leq \frac{1}{\sigma}\}$
実効 local 型 評価	$O(N^{1-\frac{1}{2k-1}})$ $k > 2^k$	Weyl 和と St 2 と同様に 0-公理的に使用した効果的	$O(N^{1-\frac{1}{k^2 \log k}})$ $k \gg k^2 \log k$
感想	最も一般的に成立。総て能率が悪く。	2次可以外は未開発	最も能率的。 たに(上記「平行移動」を利用する所から一般の定数多項式を対象とすべき事(弱)弱集の原因

(注) H. B. Antikuk (Yu. V. Linnik) Mat. 1993. T. 12. 28-39. (本稿の御指摘に43)

対応する多変数型で見るとするのは

[B], [D], etc	[k ₀ -2, 3], [T] etc	本報告集全巻の解説
---------------	---------------------------------	-----------

という具合であらう。他に D. J. Lewis や G. L. Watson の諸論文も参考とあろう。

証明においては、すべて、実又は複素解析で、いわゆる p -adic の手法は、本質的には未見と言えよう。

以上、方法であるので、いろいろ組合せて使うわけであるが、
各々の特徴は、見えてくる事であらう。

4°. さて、van der Corput の方法であるが、以下

$$\sum_{x \text{ s.t. } x < x \leq x+N, x \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i f(x)}$$

$f(x)$: 実数値函数

について、

① 積分の平均値定理を利用した推測の評価

② いわゆる van der Corput の lemma.

一般のものと、 $|f'| \leq \frac{1}{2}$ のものと。

③ 差分を利用する平均化

④ exponent pairs

を説明する。① ~ ④ (除く③?) のいづれも van der Corput の lemma(s) と呼ばれるものを得るが特に③のものが有名である。

3. (A, B) は [u.d.C-1], (D) は [u.d.C-2] 以降)

5° 以下 (A) についで、以下 $f(x)$ は、所定の条件を満たす
実数値函数とする。

[Lemma (1)] $f(x)$ 実数値, 微分可能, $f'(x)$ 単調かつ > 0
ならば

$$\left| \int_x^{x'} e^{if(x)} dx \right| \ll_{\text{abs.}} \pi \left(\frac{1}{|f'|} \right) \quad (2)$$

を得る。

[Lemma (2)] $f(x)$ 実数値, 2階微分可能, $f''(x) > 0$. ならば

$$\left| \int_x^{x'} e^{if(x)} dx \right| \ll_{\text{abs.}} \sqrt{\pi \left(\frac{1}{|f''|} \right)}$$

を得る。

(5) 以下れい [7] の 4 章のほかに)

同に発想で $f^{(k)}(x)$ の事で、評価と得るが、利点は少い。

[Lemma (1)] $f(x)$ 実数値, C^3 -級.

$$\lambda_2 \gg f'' \geq \lambda_2 \quad (> 0) \quad \sim [x, x']$$

$$|f'''| \leq \lambda_3 \quad \sim "$$

$$C \text{ s.t. } f'(c) = 0, (\forall \exists), (c \in [x, x'] \text{ は高々 } 1 \text{ 点})$$

とすると、

$$\chi(c) = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in [x, x'] \\ 0 & \text{if } c \notin [x, x'] \end{cases}$$

$$(2) \quad \pi \tau(f''-1) = \max_{\text{所定の範囲}} (f''-1) \quad \text{の意}$$

$$\chi \text{ に対して } \int_{\chi}^{\chi'} e^{if(x)} dx = \chi(c) \cdot \sqrt{2\pi} e^{2\pi i \frac{1}{2}} \frac{e^{if(c)}}{\sqrt{|f''(c)|}}$$

$$+ O\left(\sum_{\xi=\chi, \chi'} \min\left(\frac{1}{|f'(\xi)|}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\right)$$

$$+ O\left(\lambda_2^{-\frac{4}{5}} \lambda_3^{\frac{1}{5}}\right)$$

と得る。 $O(\cdot)$ の定数は絶対定数。

(*) [T] の Lemma 4.6)

この誤差項のうち 2 の 1 のは、望 (< 2) の形 7-ある 0^+ へ同
改良され下により 0^+ 解析性 を 決定する なる

[Lemma (11')] (Колесник. [K0-1]) ($z = x + \sqrt{-1}y$, $x < 0$)

$$f(z) : \text{analytic for } \begin{cases} |z-x| \leq \sqrt{M \cdot \lambda_f x_0} \\ A \leq x \leq B \end{cases} \quad (B = A + U, U \geq 1)$$

$f(x)$ は実数値 ($x \in [A, B]$) で

$$\begin{cases} M^{-1} \leq f''(x) \leq C_0 M^{-1} \\ |f^{(k+2)}(x)| < C_0 k! \cdot M U^{-k} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

と仮定 (. (1)) 同様に

$$c \in \mathbb{R} \text{ at } f'(c) = 0 \quad (\forall \exists c)$$

$$\chi(c) = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in [A, B] \\ 0 & \text{if } c \notin [A, B] \end{cases}$$

とあり、 (H) へ

$$(H) = \min(|f'(A)|, |f'(B)|)$$

と 1. 2. 更に 下 2 の 諸 仮 定 と 1. 2

$$U \equiv B - A \text{ は } \geq 1,$$

$$\log D < c_2 \log \lambda_0,$$

$$D^2 > 6c_2 c_0 \cdot M^{\frac{3}{2}} (\log \lambda_0)^3,$$

$$M > M_0 \text{ (ある程度大さく } \frac{1}{\varepsilon} \text{ の } \frac{1}{\varepsilon} \text{)},$$

$$\textcircled{C} < c \cdot \frac{D}{M} \sqrt{\log \lambda_0},$$

よって

$$\int_A^B e^{if(x)} dx = \chi(c) \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{2\pi i \frac{f(c)}{M}} \cdot \frac{e^{if(c)}}{\sqrt{|f''(c)|}} + O\left(\min\left(\frac{(\log \lambda_0)^2}{c^2}, \sqrt{M}\right)\right)$$

を得る。(ここは c, c_0, c_2, M_0 は定数とす)

(⑤) $[K_0-1]; [T]$ p72 であるように、ある γ の contour 上の積分を使用

6. ③ 127 へて.

[Lemma (=)] $f(x)$ 実数値, 積分可能, $f'(x)$ 単調減少 in $[X, X']$,

よって, 今 $[Y, Y'] = f([X, X'])$ (区間) とおき, 更に

$\gamma \in \frac{1}{2} > \eta > 0$ とする.

$$\sum_{X < x \leq X'} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{Y-\eta < y \leq Y'+\eta} \int_X^{X'} e^{2\pi i (f(x) - yx)} dx$$

$$+ O(\log(Y'-Y+2)) + O\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

を得る.

[Lemma (4.1)] 特に, $f(x)$ 実数値, 微分可能. $f'(x)$ 単調減少で

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{on } [x, x']$$

とす.

$$\left| \sum_{x \leq n \leq x'} e^{2\pi i f(n)} - \int_x^{x'} e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}} \right)$$

を得る.

(5) (i) は [T] の Lemma 4.7. (ii) は [T] の Lemma 4.8 に
弱く形がある. 正確な形は [J-L.] にある

(ii) は, 一般に, 和と積分との積分で近似したものに似ている.

[系 (1)] $f(x)$: 実数値, C^3 -級 on $[x, x']$

$f'(x)$ 単調減少, $\lambda_2 \ll (-f'') \ll \lambda_2$,

$$|f^{(3)}| \ll \lambda_3,$$

とすると,

$$[Y, Y'] = f'([x, x']) \quad (\bar{x} \text{ 間})$$

とすると $y \in [Y, Y']$ に対して

$$x_y \text{ により } f'(x_y) = y,$$

$$g(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_y) - y \cdot x_y$$

とすると,

$$\sum_{x < x \leq x'} e^{2\pi i f(x)} = e^{-2\pi i \frac{1}{8}} \sum_{Y < y \leq Y'} |f''(x_y)|^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i g(y)}$$

$$+ O(\lambda_2^{-\frac{1}{2}}) + O(\log(2 + (x' - x)\lambda_2)) + O((x' - x)(\lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{5}})$$

を得る。

(5) [T] Theorem 4.9.

$f(x)$ が 2 次式 ならば [W] (1927年) は 理想的 127, 7
 いる。この系は Колесник ([同前]) 1284.

[系 (A)'] $f(x)$ が 127 の仮定を満たす解析函数ならば
 上に (A) の誤差項は

$$+ O(\log x \cdot (D^2 M)^{\frac{1}{2}}) + O(M^{\frac{1}{2}})$$

の形である。

以上のことから (除 (A)') (通常の) van der Corput の Lemma と
 呼ばれていて。特に (A) の右辺が $O(1)$ の形のものがあ
 るである。

7° (C) について。

[Lemma (H)] $f(x)$ 実数値函数。 $q \in \mathbb{N}$ st. $q \leq x' - x$.

のとき

$$\left| \sum_{x < x \leq x'} e^{2\pi i f(x)} \right| \ll \frac{x' - x}{\sqrt{q}} + \sqrt{\frac{x' - x}{q}} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{x < x \leq x' - r} e^{2\pi i f_r(x)} \right|}$$

$$f_r(x) =_{\text{def}} f(x+r) - f(x)$$

である。

(5) [T] Lemma 5.10. 初出は van der Corput (1929) ([T] 文庫中)
 a.v.d. Corput の (6). = M. Z. 29, (1929), p. 398~ のようにある。

8° ① に ついて.

[定義 (b)] 実数の組 (k_p, l_p) $p=1, 2, \dots, m$.

$$0 \leq k_p \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq l_p \leq 1$$

6° $\forall \Delta$ 実数 > 0 , $\exists r \in \mathbb{N}$ (≥ 3), $\exists c$ ($0 < c \leq \frac{1}{2}$)

such that $\left[\begin{array}{l} t > 1, \quad 1 \leq a < b < at, \quad y > a^\Delta, \\ \end{array} \right.$

$f(x)$ $[a, b]$ 上の実数値函数で $f^{(r)}$ が存在

$$0 \leq f^{(p+1)}(x) = (-1)^p y \cdot \frac{\Delta(\Delta+1)\dots(\Delta+p-1)}{x^{\Delta+p}} (1+\theta)$$

$$\text{但し } \left\{ \begin{array}{l} \theta \text{ は } |\theta| < C \text{ (誤差項)} \\ x \in [a, b], \quad p = 0, 1, \dots, r-1, \end{array} \right.$$

とすれば

$$\left| \sum_{x \text{ s.t. } a \leq x \leq b} e^{2\pi i f(x)} \right| \ll_{(r,t)} \sum_{p=1}^m z^{k_p} a^{l_p}$$

(他に k_p, l_p, m の関数 (得る))

$\square$ の形の不等式を得る ; 但し $\geq \frac{1}{a^c} y \cdot a^{-\Delta} (> 1)$

と成ることを、この (k_p, l_p) ($p=1, \dots, m$) は exponent pairs の一組と言う。

7° 4. [ud.C-2] p.57 に示された如く、 $f(x)$ は < 1 (C^2 級) として、

$$f(x) \equiv \begin{cases} \frac{y \cdot x^{1-\Delta}}{1-\Delta} & (\Delta+1, \Delta > 0) \\ y \log x & \Delta = 1 \end{cases}$$

と同じ挙動をする f の χ は 2 つだけである。ここで自明な

exponent pair χ として

$$m=1, \quad (k_1, l_1) = (0, 1)$$

を得るので、定義は non-void である。

いま (11) に示された $f(x)$ と $g(y)$ の対について (1) の定義にでてくる諸記号を

$$\Delta, r, c, t, y \quad \text{for } f(x) \text{ on } [a, b]$$

$$\sigma, v, \gamma, \tau, \eta \quad \text{for } g(y) \text{ on } f'([a, b])$$

$$\sigma = \Delta^{-1}, \quad \tau \leq t^*, \quad \eta = y^{\sigma}$$

と対応させて読むことにすれば

[Lemma (4)] $\forall v, \gamma, \Delta$ (in (11)), $\exists C$ (in (11)) such that 「上記の関係を」。

(5) [u.d.C-2], Hilfestat 7)

を得る。そして (11) とみれば

[系 (11)] $(\kappa_p, \lambda_p) \quad p=1, \dots, \mu$, 但し $\lambda_p \geq \frac{1}{2}$

なる exponent pairs がある

$$(k_p, l_p) \quad \begin{cases} k_p = \lambda_p - \frac{1}{2}, & l_p = \kappa_p + \frac{1}{2} & p=1, \dots, \mu \\ k_{\mu+1} = \frac{2}{5}, & l_{\mu+1} = \frac{1}{2} & (m=\mu+1) \end{cases}$$

なる exponent pairs を得る。

多変数型の対応物は [K0-3] にある。

(1) (1), (11), (11) にあいて、直接くり返し適用すると、元に戻すわけであるから、(C) の段階をくりしめて、函数をとりかえて、及転公可を適用してゆくわけである。筆者の感想では、(1) (1) - 一頁目の下に述べた如く「高次のテータ級数」を見つける方が先決問題と見たら、いかげつであろう。(以上)

文 献

単行本として

- [Sa] Ra. Salem : Essais sur les séries trigonométriques , Hermann ,1940 .
 [T] E.C.Titchmarsh : The theory of the RIEMANN zeta-function , Oxford,1951.
 [Vau] R.C.Vaughan The HARDY-LITTLEWOOD method Cambridge Tracts in Math.
 Vol.80 ,1981.

- [I.M.V] И.М.Виноградов : Метод тригонометрических сумм в теории чисел , Наука,1971. (英訳あり I.M.Vinogradov : Trigonometrical sums in number theory , Indian Statistical Institute , Statistical Publishing Society , 1975.)

京都大学数理解析研究所講究録より

- [徳] 鹿野 健 : 「van der Corput の Lemma の応用について」 , No.157,
 解析的数論の話題 , 1972年8月.

- [中-1] 中井 喜信 : 「 ϑ -Weyl 和」 , No.222, 数論と調和解析 , 1974年9月.

- [中-2] " : 「 $\overline{\pi}$ -タ.ワイル和」 , No.274, 数論的関数の特性 , 1976年7月.

論文として.

- [B] B.J.Birch : Forms in many variables, Proc.Roy.Soc.London, A265,1962.
 [v.d.C-1] [T] 文庫中の $\wedge$ van der Corput の (1) (Math. Ann. 84, 1921).
 [v.d.C-2] " " の (2) (Math. Ann. 87, 1922).
 [D] H. Davenport : Cubic forms in 16 variables, Proc. Roy. Soc. London,
 A.272,1963.
 [F.-J.-K] H.Fiedler, W.Jurcat and O.Körner : Asymptotic expansions of finite
 theta series, Acta Arith., 32,1977,129-146.
 [J-L] [T] 文庫中の $\wedge$ V.Jarník-E.Landau (Math. Z.,39,1935,745-767.)
 [久] T.Kubota : 高次中剰余記号に関する " $\overline{\pi}$ -タ級数 " についての一連の仕事

- A.
- [Ko-1] Г. Колесник (G. Kolesnik): О распределений простых чисел в последовательностях вида $[n^c]$, Матем. заметки, 2, 1967, 117-128.
- [Ko-2] " : Об оценке некоторых тригонометрических сумм, Acta Arith., 25, 1973, 7-30.
- [Ko-3] G. Kolesnik : On the estimation of multiple exponential sums, Recent progress in analitic number theory, Vol.1, ed. by H. Halberstam and C. Hooley, Acad. Press, 1981.
- [N] Y.-N. Nakai : On a θ -Weyl sum, Nagoya Math. J., 52, 1973, 163-172.
- [Pa] S. J. Patterson : A cubic analogue of the theta series, I-II, J. reine angew. Math. 296, 1977, 125-161, 217-220.
- [Ra] R. A. Rankin : Van der Corput's method and the theory of exponent pairs, Q. J. of Math., 26, 1955, 147-153.
- [T] 本 [T] 中の Titchmarsh の諸論文 (8)-(12), 多変数型は (24), (15) など.
- [Vo] G. Voronoï : Sur une fonction transcendente et ses applications a la sommation de quelques séries, Ann. de l'Ecole Norm. Sup., (3) 21, 1904, 207-267 et 459-533.
- [Wi] J. R. Wilton: J. London M. Soc., 2, 1927, 177-180, 9, 1934, 194-201, 247-254.
- [M] W. Maier : Transformation der kubischen Thetafunction, Math. Ann. 111, 1935.