

クラス A の縮小作用素について

札幌医大 高橋勝利 (Katsutoshi Takahashi)

$\mathcal{H}$ を可分 Hilbert 空間, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上有界線形作用素全体, $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ を trace class 作用素全体とする. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ の dual である:
 $\langle T, K \rangle = \text{tr}(TK)$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $K \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対し
 $\mathcal{A}_T$ を T で生成される weak* closed algebra とする. $Q_T = \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) / \mathcal{A}_T^\perp$ は $\mathcal{A}_T$ の predual である. $A = A(\mathcal{H})$ を Sz. Nagy - Foias functional calculus $\Phi_T: H^\infty \rightarrow \mathcal{A}_T$, $f \mapsto f(T)$ が isometric である (このとき Φ_T は onto, weak* homeomorphism) 縮小作用素 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ の全体とし, $A_1 = A_1(\mathcal{H})$ を任意の $[L]_T \in Q_T$ に対し $[L]_T = [x \otimes y]_T$ なる $x, y \in \mathcal{H}$ が存在するような $T \in A$ の全体とする. ここで $K \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ に対し $[K]_T \in Q_T$ は K の同値類, $x \otimes y$ は $(x \otimes y)(z) = (z, y)x$, $z \in \mathcal{H}$, で定義される rank one 作用素である. S. Brown はクラス A のある条件をもつ subnormal 作用素が A_1 であることを示して subnormal 作用素の不変部分空間の存在を証明した. 以後クラス A の一般の作用素への Brown の方法の拡張が研究され

てきた. ここでは Chevreau-Exner-Pearcy の analytic invariant subspace についての結果を紹介する.

定義. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: 縮小作用素, $M \in \text{Lat } T (= T\text{-不変部分空間全体})$ とする. coanalytic function $e: \mathbb{D} = \{|\lambda| < 1\} \rightarrow M$ が $e(\lambda) \in \ker(T|_{M-\lambda})^*$, $\lambda \in \mathbb{D}$, となるようにとれるとき, M は analytic であるといい, さらに $e(\lambda)$ が $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{D}} e(\lambda) = M$ を満たすとき, M は full analytic であるという.

命題 1. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: 縮小作用素, もし dense set $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$ が存在し, 各 $x \in \mathcal{D}$ に対して $M_x = \bigvee_{n \geq 0} T^n x$ が full analytic invariant subspace for T ならば, T は reflexive である. (i.e. $\{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}); \text{Lat } T \subseteq \text{Lat } A\} = T$ に付随する weak op. top. で closed な subalgebra)

証明. $\mathcal{H}$ が full analytic のときを示す. $e(\lambda)$: coanalytic on $\mathbb{D}$ $T^* e(\lambda) = \bar{\lambda} e(\lambda)$, $\bigvee_{\lambda} e(\lambda) = \mathcal{H}$ とする. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: $\text{Lat } A \supseteq \text{Lat } T$ とする. $\lambda \in \{\lambda; e(\lambda) \neq 0\}$ に対して, $\{\alpha e(\lambda); \alpha \in \mathbb{C}\} \in \text{Lat } T^* \subseteq \text{Lat } A^*$ より, $A^* e(\lambda) = \overline{f(\lambda)} e(\lambda)$ となる $f(\lambda) \in \mathbb{C}$ が一意に存在. $\lambda \in \mathbb{D}$, $f(\lambda)$ は $\{\lambda; e(\lambda) \neq 0\}$ で bounded analytic であり, $\{\lambda; e(\lambda) = 0\}$ は isolated point から成るから $f \in H^\infty$, 且つ $A^* e(\lambda) = f(\lambda)^* e(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{D}$) $\therefore A^* = f(T)^*$. $\therefore A \in \mathcal{A}_T$

$T \in \mathcal{A}_1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $[C_0^{(n)}]_T \in \mathcal{Q}_T$ 且

$$\langle h(T), [C_0^{(n)}]_T \rangle = \int_0^{2\pi} h(e^{it}) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}, \quad h \in H^\infty$$

で定義する.

命題 2. $T \in A$, 次の条件 (i) ~ (iv) をみたす $x \in \mathcal{H}$, $\{t_j\}_{j=0,1,2,\dots}$, $\{s_j\}_{j=0,1,2,\dots} \subseteq \mathcal{H}$ が存在するとする: (i) $[C_0^{(j)}]_T = [x \otimes t_j]_T$ ($j=0,1,2,\dots$), (ii) $\overline{\lim_{j \rightarrow \infty} \|t_j\|^{\frac{1}{j}}} \leq 1$, (iii) $[x \otimes s_j]_T \in \text{algebraic linear span of } \{[C_0^{(j)}]_T; j=0,1,2,\dots\}$ ($j=0,1,2,\dots$), (iv) $\bigvee_{j \geq 0} s_j = \mathcal{H}$. このとき M_x は full analytic.

証明. $\tilde{t}_j = P_{M_x} t_j$ (P_{M_x} は M_x への projection),

$e(\lambda) = \sum_0^\infty \bar{\lambda}^j \tilde{t}_j$ とする. (ii) より, $e(\lambda)$ は $\mathbb{D}$ で coanalytic.

(i) より, $e(\lambda) \in \ker(T|_{M_x} - \lambda)^*$. (i), (iii), (iv) より $M_x = \bigvee_{\lambda \in \mathbb{D}} e(\lambda)$ が成り立つ.

定義. $T \in A$, $\theta \geq 0$ とする. $\mathcal{E}_\theta(T)$ を次の条件 (a), (b), (c) をみたす $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq \mathcal{H}$ が存在するような $[L]_T \in Q_T$ の全体とする: (a) $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \|[L]_T - [x_n \otimes y_n]_T\|} \leq \theta$, (b) $\|x_n\|, \|y_n\| \leq 1$, (c) $\|[x_n \otimes w]_T\| \rightarrow 0$, $\forall w \in \mathcal{H}$.

定理 1. $T \in A$, ある θ, γ ($0 \leq \theta < \gamma$) に対して $\mathcal{E}_\theta(T)$ の closed convex hull が $\{[L]_T; \|[L]_T\| \leq \gamma\}$ を含むならば, (1) T は命題 1 の仮定をみたす, (2) 任意の $\{[L_n]_T\} \subseteq Q_T$ に対し $[L_n]_T = [x \otimes t_n]_T$ ($n=1,2,\dots$) となる $x \in \mathcal{H}$, $\{t_n\} \subseteq \mathcal{H}$ が存在する.

$T \in A$, $\lambda \in \mathbb{D}$ に対し $[C_\lambda]_T \in Q_T$ を $\langle h(T), [C_\lambda]_T \rangle = h(\lambda)$, $h \in H^\infty$, で定義する. $\Lambda(\subseteq \mathbb{D})$ が dominating for $\mathbb{D}$ (i.e., a.e. z (単位円周) が Λ の nontangential limit point)

であるとき, closed convex hull of $\{\alpha [C_\lambda]_T; \lambda \in \mathbb{A}, |\alpha|=1\}$ は Q_T の閉単位球である.

補題1. $T \in A$ とする.

(1) $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \mathcal{F}_+(T)$, $\therefore \mathcal{F}_+(T) = \{\lambda; T - \lambda \text{ is Fredholm, } \text{ind}(T - \lambda) > 0\}$, T は " $[C_\lambda]_T \in \mathcal{E}_0(T)$ "

(2) $T \in C_0$ (i.e. $T^{*n} \rightarrow 0$ strongly) のとき, 任意の $\lambda \in \mathbb{D}$ に対し $[C_\lambda]_T \in \mathcal{E}_0(T)$.

これより次の定理が得られる.

定理2. $T \in A$, 次の条件の1つが成り立つとき, T は定理1の仮定を満たす ($\theta=0, \gamma=1$ に対して):

- (1) $\mathbb{D} \setminus \mathcal{F}_+(T)$: dominating for $\mathbb{D}$, (2) $T \in C_0$.
 (3) $T \in C_1$ (i.e. $\|T^n x\| \rightarrow 0$ for $\forall x \neq 0$),
 (4) T : hyponormal, (5) $\sigma_p(T^*) = \mathbb{D}$.

補題2. $T \in C_0$, $x_n \rightarrow 0$ weakly T は " T ", 任意の $y \in \mathcal{H}$ に対し $\|[x_n \otimes y]_T\| \rightarrow 0$.

証明. $T = P_{\mathcal{H}} S|_{\mathcal{H}}$, S : unilateral shift on $\mathbb{K}(\geq \mathcal{H})$.

$$\|[x_n \otimes y]_T\| = \|[x_n \otimes y]_S\|, \|[x_n \otimes y]_S\| \leq \|x_n\| \|y\|,$$

$$(1 - S^N S^{*N}) y \rightarrow y \quad (N \rightarrow \infty) \text{ に対し, } N = 1, 2, \dots \text{ に対し,}$$

$$\|[x_n \otimes (1 - S^N S^{*N}) y]_S\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ を示せばよい.}$$

$$\begin{aligned} \|[x_n \otimes (1 - S^N S^{*N}) y]_S\| &= (f_n(S) x_n, (1 - S^N S^{*N}) y) \quad (\exists f_n \in H^\infty, \|f_n\| = 1) \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} |\hat{f}_n(j)| |(S^j x_n, (1 - S^N S^{*N}) y)| \quad (\because \hat{f}_n(j) \text{ は } f_n \text{ の } j \text{ Fourier 係数}) \end{aligned}$$

$$\leq \|f_n\|_\infty \sum_{j=0}^{N-1} |(S^j x_n, (1-S^N S^{*N})y)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

補題1の証明. (1) $\lambda \in \mathbb{D}$ には $\exists f \in \mathcal{L}$, $T_\lambda = (T - \lambda)(1 - \bar{\lambda}T)^{-1}$ とおき,
 $T_\lambda \in \mathcal{A}$, $\|[C_0]_T - [x \otimes y]_T\| = \|[C_\lambda]_T - [x \otimes y]_T\|$, $\|[x \otimes y]_T\| = \|[x \otimes y]_{T_\lambda}\|$
 である. $\lambda = 0$ とおくとよい. $[C_0]_T \in \mathcal{E}_0(T)$ であるから,
 $\|[C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T\| \rightarrow 0$ かつ $\|[x_n \otimes y]_T\| \rightarrow 0$ ($\forall y \in \mathcal{H}$) であるから
 orthonormal sequence $\{x_n\}$ の存在を証明する.

(i) $0 \in \sigma_p(T)$ である; $\exists \{x_n\}$: orthonormal s.t.

$$\textcircled{1} \|Tx_n\| \rightarrow 0 \quad \text{or} \quad \textcircled{2} \|T^*x_n\| \rightarrow 0$$

$\textcircled{1}$ のとき, $f \in H^\infty$ には $\exists f \in \mathcal{L}$,

$$\langle f(T), [C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T \rangle = (f(0) - f(T))x_n, x_n = -(g(T)Tx_n, x_n)$$

$$\langle f(T), [x_n \otimes y]_T \rangle = (f(0)x_n, y) + (g(T)Tx_n, y), \quad y \in \mathcal{H}$$

$$\therefore \exists \varepsilon, \quad f(1) - f(0) = \varepsilon g(1), \quad g \in H^\infty, \quad \|g\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$$

$$\therefore \|[C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T\| \leq 2\|Tx_n\|\|x_n\| \rightarrow 0$$

$$\|[x_n \otimes y]_T\| \leq |(x_n, y)| + 2\|Tx_n\|\|y\| \rightarrow 0$$

$\{x_n\}$ は求めるものである.

$$\textcircled{2} \text{ のとき, } \|[C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T\| \leq 2\|x_n\|\|T^*x_n\| \rightarrow 0$$

V : T の isometric dilation, $V = S \oplus R$ on $\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{R}$;

S : shift, R : unitary. $T^*x_n \rightarrow 0$ かつ $P_{\mathcal{R}}x_n \rightarrow 0$

$$f \in H^\infty \text{ には } \exists f \in \mathcal{L},$$

$$y \in \mathcal{H}$$

$$\langle f(T), [x_n \otimes y]_T \rangle = (f(S \oplus R)x_n, y) = (f(S)P_{\mathcal{M}}x_n, P_{\mathcal{M}}y) + (f(R)P_{\mathcal{R}}x_n, y)$$

$$\therefore \|[x_n \otimes y]_T\| \leq \|[P_{\mathcal{M}}x_n \otimes P_{\mathcal{M}}y]_S\| + \|P_{\mathcal{R}}x_n\|\|y\| \rightarrow 0 \quad (\text{補題2}).$$

ii) $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$ のとき; T : Fredholm, $\text{ind } T \leq 0$

① $T^n x \not\equiv T^{n+1} x$ ($n=0, 1, 2, \dots$) のとき, $T^n x \ominus T^{n+1} x \ni x_n$,

$\|x_n\| = 1$ ($n=1, 2, \dots$) とする. $\therefore$ α とする,

$$\langle T^k, [x_n \otimes x_n]_T \rangle = \begin{cases} 0 & (k \geq 1) \\ 1 & (k=0) \end{cases} \quad \text{だから;} \quad [C_0]_T = [x_n \otimes x_n]_T$$

$$\exists T: P_R x_n = 0 \quad (\because T^{*n+1} x_n = 0) \quad \therefore \| [x_n \otimes y]_T \| = \| [P_R x_n \otimes P_R y]_S \| \rightarrow 0$$

② ある n に $\exists T: T^n x = T^{n+1} x$ のとき, $\text{ind } T \leq 0$ に注意する,

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \text{ on } \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \sigma(T_2) = \{0\}, \quad \dim \mathcal{H}_2 < \infty,$$

T_1 : invertible, $T_1 \in A_1$. 従って, $\therefore$ $\mathbb{R}$ の (iii) の場合より従う.

iii) $0 \in \rho(T)$ のとき; $T \in A_1 = A_{11}$ (Bercovici [1]) だから,

$$\exists m \in \text{Lat } T: Tm = \overline{Tm} \subsetneq m. \quad \text{従って, } T|_m \text{ は left invertible}$$

$$\therefore \text{ind } T|_m \leq -1. \quad T^n m \ominus T^{n+1} m \ni x_n, \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{と} \quad \text{と} \quad \text{と},$$

$$(n=1, 2, \dots). \quad \therefore \alpha \text{ とする, } [C_0]_T = [x_n \otimes x_n]_T. \quad \exists T: f \in H^\infty, y \in \mathcal{H}$$

$$\text{に} \quad \exists T: \langle f(T), [x_n \otimes y]_T \rangle = \langle f(T|_m), [x_n \otimes P_m y]_{T|_m} \rangle \quad \text{であるから,}$$

(i) の ② の場合と同様に $\| [x_n \otimes y]_T \| \rightarrow 0$ と示すことができる.

(2) (1) より $\lambda \in \mathcal{F}_+(T)$ のとき $\lambda \in \mathcal{F}_-(T)$ のとき,

$$\ker(T-\lambda)^n \subsetneq \ker(T-\lambda)^{n+1} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{だから, } x_n \in \ker(T-\lambda)^{n+1} \ominus \ker(T-\lambda)^n$$

$$\|x_n\| = 1 \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{と} \quad \text{と} \quad \text{と}. \quad [C_\lambda]_T = [x_n \otimes x_n]_T \quad \text{と} \quad \text{と} \quad \text{と},$$

$$\exists T: \{x_n\}: \text{orthonormal} \quad \text{だから, 補題 2 より} \quad \| [x_n \otimes y]_T \| \rightarrow 0$$

$$\text{for } \forall y \in \mathcal{H} \quad \text{から従う.} \quad \therefore [C_\lambda]_T \in \mathcal{E}_0(T).$$

定理 1 の証明. $T \in C_0$ (i.e. $T^n \rightarrow 0$ strongly) のときを示す.

$$\therefore \alpha \text{ とする } \mathcal{E}_0(T) \text{ の定義における } \{y_n\} \text{ はさらに } \| [w \otimes y_n]_T \| \rightarrow 0$$

for $w \in \mathcal{H} \in \mathcal{H}(\mathcal{H})$ and $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\{[L_j]\}_{j=1,2,\dots,N} \subseteq \mathcal{Q}_T$, $a, b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathcal{H}$, $\delta_j > 0$ ($j=1,2,\dots,N$)

$$\|[L_j] - [a \otimes b_j]\| < \delta_j \quad (j=1,2,\dots,N)$$

$\Rightarrow \exists a_1, b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,N} \in \mathcal{H}$ s.t.

$$\|[L_j] - [a_1 \otimes b_{1,j}]\| < \frac{\theta_1}{\gamma} \delta_j, \quad \|a_1 - a\| < \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^N \delta_j\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|b_{1,j} - b_j\| < \left(\frac{1}{\gamma} \delta_j\right)^{\frac{1}{2}} \quad (j=1,2,\dots,N). \quad \text{and } \theta < \theta_1 < \gamma.$$

(ii) closed convex hull of $\{[L] \in \mathcal{Q}_T : \|[L]\| \leq \gamma\}$ is

$$\{[K_i] \in \mathcal{Q}_T, \exists \alpha_i \ (i=1,2,\dots,k_N) : \sum_{k_{j-1} < i \leq k_j} \alpha_i < \frac{\delta_j}{\gamma} \ (j=1,2,\dots,N)\}$$

s.t.

$$\|[L_j] - [a \otimes b_j] - \sum_{k_{j-1} < i \leq k_j} \alpha_i [K_i]\| < \frac{\delta_j}{\gamma} \varepsilon, \quad (\varepsilon = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta) > 0)$$

$$\text{and } 0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_N.$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|[K_i] - [x_i^{(n)} \otimes y_i^{(n)}]\| < \theta + \varepsilon, \quad \|x_i^{(n)}\|, \|y_i^{(n)}\| \leq 1,$$

$$\|[x_i^{(n)} \otimes w]\|, \|[w \otimes x_i^{(n)}]\| \rightarrow 0 \quad (\forall w \in \mathcal{H}) \text{ and } \{x_i^{(n)}\},$$

$$\{y_i^{(n)}\} \in \mathcal{H}. \text{ and } \exists n_1, n_2, \dots, n_N \in \mathbb{N} \text{ such that}$$

$$a_1 = a + \sum_{i=1}^{k_N} \alpha_i^{\frac{1}{2}} x_i^{(n_i)}, \quad b_{1,j} = b_j + \sum_{k_{j-1} < i \leq k_j} \alpha_i^{\frac{1}{2}} y_i^{(n_i)} \quad (j=1,2,\dots,N)$$

and so on. and so on. and so on.

(iii) $\{[L_j]\}_{j=1,2,\dots,N}$, $a, b_1, b_2, \dots, b_N$ if (i) and (ii) are satisfied then there exists $\hat{a}, \hat{b}_j \in \mathcal{H}$ s.t.

$$[L_j] = [\hat{a} \otimes \hat{b}_j] \quad (j=1,2,\dots,N), \quad \|\hat{a} - a\| < \alpha \left(\sum_{j=1}^N \delta_j\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\hat{b}_j - b_j\| < \alpha \delta_j^{\frac{1}{2}} \quad (j=1,2,\dots,N) \quad \text{and } \alpha = (\gamma^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

(iv) (i) and (ii) $\exists \{a_n\}, \{b_{n,j}\}_{n=1,2,\dots} \subseteq \mathcal{H} \ (j=1,2,\dots,N)$ s.t.

各 $n=1, 2, \dots$ に對し

$$\| [L_j] - [a_n \otimes b_{nj}] \| < \left(\frac{\theta_1}{\delta}\right)^n \delta_j \quad (j=1, 2, \dots, N),$$

$$\| a_n - a_{n-1} \| < \left(\frac{\theta_1}{\delta}\right)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^N \delta_j\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \| b_{nj} - b_{n-1,j} \| < \left(\frac{\theta_1}{\delta}\right)^{n-1} \left(\frac{\delta_j}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(j=1, 2, \dots, N). \quad (a_0 = a, \quad b_{0,j} = b_j)$$

$$a_n \rightarrow \hat{a}, \quad b_{nj} \rightarrow \hat{b}_j \quad (j=1, 2, \dots, N). \quad \hat{a}, \hat{b}_j \text{ は 求 め る 所.}$$

命題 2 より 定理の (1) の 証明は 次 の (iii) を 示す こと により 完 了 する.

(iii) $\forall a \in \mathcal{H}, \forall \varepsilon > 0$ に 對し $\exists x \in \mathcal{H}, \exists \{t_j\}, \{s_j\} \subseteq \mathcal{H}$ s.t.

$$\textcircled{1} [C_0^{(j)}] = [x \otimes t_j] \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad \textcircled{2} \lim_{j \rightarrow \infty} \|t_j\|^{\frac{1}{j}} \leq 1,$$

$$\textcircled{3} [x \otimes s_j] \in \text{linear span} \{ [C_0^{(j)}] ; j=0, 1, 2, \dots \} \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

$$\textcircled{4} \bigvee_{j=0}^{\infty} s_j = \mathcal{H}, \quad \textcircled{5} \|a - x\| < \varepsilon.$$

$$\textcircled{1} \{C_n\}_{n \geq 0} \text{ dense } \subseteq \mathcal{H}, \quad \delta_j > 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{\frac{1}{2}} < \varepsilon / 2^{\frac{1}{2}} \alpha \quad (\alpha \text{ は (ii) の 定数})$$

$$0 < \varepsilon_j < \min \left\{ \frac{\delta_j}{(j+1)^2}, \frac{\delta_j}{4\delta} \right\} \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

$$[L_j] = \frac{\delta_j}{2} [C_0^{(j)}] \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad \mathcal{N} = \text{linear span} \{ [C_0^{(j)}] ; j=0, 1, 2, \dots \}$$

と する. $n=1, 2$ の induction により $\exists \{R_n\}_{n \geq 0}$ seg. $\{a_n\}_{n \geq 0}$,

$$\{b_{nj}\}_{n,j \geq 0}, \{c_{nj}\}_{n,j \geq 0} \subseteq \mathcal{H}, \quad \{[R_n]\}_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{N} \text{ を 得 る:}$$

$$[a_n \otimes b_{nj}] = [L_j] \quad (j \leq n), \quad b_{nj} = 0 \quad (j > n),$$

$$[a_n \otimes c_{nj}] = [R_j] \quad (j \leq n), \quad c_{nj} = 0 \quad (j > n).$$

$$\|a_n - a_{n-1}\| < \alpha (2\delta_n)^{\frac{1}{2}} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \text{すなわち } a_{-1} = a,$$

$$\|b_{nj} - b_{n-1,j}\| < \alpha \varepsilon_n^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leq j \leq n-1), \quad \|b_{nn}\| < \alpha \delta_n^{\frac{1}{2}}$$

$$\|c_{nj} - c_{n-1,j}\| < \alpha \varepsilon_n^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leq j \leq n-1), \quad \|c_{nn} - c_n\| < \alpha \varepsilon_n^{\frac{1}{2}}$$

實際、 $\{a_n\}_{n \leq N}, \{b_{nj}\}_{0 \leq n \leq N, 0 \leq j \leq N}, \{c_{nj}\}_{0 \leq n \leq N, 0 \leq j \leq N}, \{[R_n]\}_{0 \leq n \leq N}$ を

$$\text{得 る こと に 注意 し, } \| [L_j] - [a_N \otimes b_{Nj}] \| < \varepsilon_{N+1} \quad (j=0, 1, \dots, N),$$

$$\| [R_j] - [a_N \otimes c_{Nj}] \| < \varepsilon_{N+1} \quad (j=0, 1, 2, \dots, N), \quad \| [L_{N+1}] - [a_N \otimes 0] \| < \delta_{N+1},$$

$$\| [R_{N+1}] - [a_N \otimes c_{N+1}] \| < \varepsilon_{N+1} \quad (N \text{ 上 } Q_T \text{ 上 dense 上 あるから}),$$

$$\text{よって等式 (7) 上 } [R_{N+1}] \in \mathcal{N} \text{ 上 なるから}, \quad \text{よって } \{L_j\}_{j \leq N+1},$$

$$\{[R_j]\}_{j \leq N+1}, \quad a_N, \{b_{N1}, b_{N2}, \dots, b_{NN}, 0, c_{N1}, c_{N2}, \dots, c_{NN}, c_{N+1}\}$$

$$\text{上 } \{a_j\}_{j \geq 0} \text{ 上 使う. } a_{N+1}, \{b_{N+1,j}\}_{j \geq 0}, \{c_{N+1,j}\}_{j \geq 0} \quad (b_{N+1,j} = 0,$$

$$c_{N+1,j} = 0 \text{ for } j > N+1 \text{ 上 なるから}) \text{ 上 得る.}$$

$$\{a_n\}, \{b_{nj}\}_{n=j, j+1, \dots}, \{c_{nj}\}_{n=j, j+1, \dots} \text{ 上 Cauchy 上 } (j=0, 1, 2, \dots)$$

$$\therefore a_n \rightarrow \hat{a}, \quad b_{nj} \rightarrow \hat{b}_j, \quad c_{nj} \rightarrow \hat{c}_j \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

$$\| \hat{a} - a \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha (2\delta_n)^{1/2} < \varepsilon$$

$$\| \hat{c}_j - c_j \| \leq \| \hat{c}_j - c_{j,j} \| + \| c_{j,j} - c_j \| \leq \alpha \sum_{n \geq j} \varepsilon_n^{1/2} < \alpha \delta_j^{1/2}$$

$$\| \hat{b}_j - b_{jj} \| \leq \alpha \sum_{n \geq j+1} \varepsilon_n^{1/2} \quad \therefore \| \hat{b}_j \| \leq \alpha \left(\sum_{n \geq j+1} \varepsilon_n^{1/2} + \delta_j^{1/2} \right) < \alpha (2\delta_j^{1/2})$$

$$[L_j] = [\hat{a} \otimes \hat{b}_j], \quad [R_j] = [\hat{a} \otimes \hat{c}_j] \text{ 上 なるから. 上 なるから,}$$

$$x = \hat{a}, \quad x_j = \frac{2}{\delta_j} \hat{b}_j, \quad y_j = \hat{c}_j \text{ 上 なるからなるからなるから.}$$

文献

1. H. Beranović, Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space, Ann. of Math.
2. S. Brown, Full analytic subspaces for contractions with rich spectrum, Pacific J. Math. 132 (1988), 1-10.
3. B. Chevreau, G. Exner, C. Pearcy, On the structure of contraction operator. III.