

Combinatorial System について

日大 生産工 中村 昭

§1 Combinatorial system

Computability に関する問題の中から、組合せ数学と関連がある言語理論の unsolvability の話題 について報告する。

Combinatorial system とは、M. Davis [1] によれば次の様に定義される。

いま、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を symbols (objects) の無限系列とし、これら n symbols の有限個ならんものを word (string) とする。 P, Q を words を表わすとし、 $g, h, k; \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}$ をある words とする。このとき

$$g P h Q k \rightarrow \bar{g} P \bar{h} Q \bar{k}$$

を $g, h, k; \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}$ に関連する production とする。又

$$\bar{g} P \bar{h} Q \bar{k} \rightarrow g P h Q k$$

を、先の production の逆 production とする。

次に $\Lambda P g Q \Lambda \rightarrow \Lambda P \bar{g} Q \Lambda$ (但し Λ は empty word)

と $g, \bar{g}$ に関係する semi-Thue production とする。又

$$g P \wedge Q \wedge \rightarrow \wedge P \wedge Q \bar{g}$$

と $g, \bar{g}$ に関係する normal production とする。そして

$$2 = \text{これに } g P \rightarrow P \bar{g} \text{ を加える。}$$

と、combinatorial system Γ は、 Γ の axiom と呼ばれる一つの non-empty word と Γ の production と呼ばれる production の有限集合からなる。その production が semi-Thue production である combinatorial system を semi-Thue system といい、その production が normal production である combinatorial system を normal system という。更に又 normal production とその逆 production の有限集合からなる combinatorial system を Post system という。

Combinatorial system の証明、定理は、production を rule と考えた代入法則、Modus Ponens による logic のそれと類似した方法で定義される。

Turing machine, 述語論理等の決定問題と関連して、その decision problem が recursively unsolvable である combinatorial system の存在する事は、よく知られている。ここでは、その決定問題が unsolvable である

ある一つの combinatorial system Σ (2, Post canonical language を与えておける。

§ 2 Post canonical language

Post canonical language とは、次のように定義される formal system である。

- (1) A を一つの有限集合とし、これを alphabet としう。
 V を A における記号を有限個ならべてできる系列のすべて
 の集合とする。そしてこれを vocabulary としう。いま
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を V における記号とし、次の形を string
 schema としう。

$$\alpha_{i_1} s_1 \alpha_{i_2} s_2 \dots \alpha_{i_{n-1}} s_{n-1} \alpha_{i_n}$$

ただし、各 s_i は V の元であり、 α のすくなくとも一つは実際に表われなくてはならない。

又、次の形を grammar としう。

$$S_1, S_2, \dots, S_m \rightarrow T$$

ただし、 m は正整数であり、 $T, S_1, \dots, S_m, T$ は string
 schemata である。又 $T = \alpha_1 t_1 \alpha_2 t_2 \dots \alpha_{n-1} t_{n-1} \alpha_n$
 ならば、 t_i のすくなくとも一つは null string である。

T における各 α_i は S_j のすくなくとも一つに表われる。

(2) Post canonical language とは、alphabet と

有限個の grammar の集合と、公理と呼ばれる vocabulary の有限部分集合からなる形式体系である。

(3) 次の二つの法則 R_1, R_2 を用いて axioms と grammar から得られる言語を Post canonical language の定理という。

R_1 : α_i に対する代入法則

R_2 : Modus Ponens

ところで、この Post language は Post's normal form theorem [2] によれば、Post system に reduce される。即ち一つの combinatorial system と考えよう。

§3 Language $\mathbb{L}$

目的を達するため、いま次の Post canonical language $\mathbb{L}$ を考える。

Alphabet : $\{ , , \circ , \Delta , * , \# , W , O , \vdash \}$

Axioms : W_1, O_0

Grammar :

G1. $W\alpha \rightarrow W\alpha\Delta$

G2. $O\alpha \rightarrow O\alpha\Delta$

$$G3 \quad W\alpha, O\beta \rightarrow W\# \beta \# \alpha$$

$$G4 \quad W\alpha, W\beta \rightarrow W \circ \alpha \beta$$

$$G5 \quad W\alpha, O\beta \rightarrow W * \beta * \alpha$$

$$G6 \quad W\alpha, W\beta, W\gamma, W\delta, W\epsilon$$

$$\rightarrow \vdash \circ \circ \circ \circ \circ \alpha \beta \circ \# \circ \# \gamma \# \circ \# \delta \gamma \epsilon \circ \circ \circ \alpha \delta \alpha$$

$$G7 \quad W\alpha, W\beta, O\gamma \rightarrow \vdash \circ * \gamma * \circ \alpha \beta \circ * \gamma * \alpha * \gamma * \beta$$

$$G8 \quad W\alpha, O\beta \rightarrow \vdash \circ * \beta * \alpha \alpha$$

$$G9 \quad \vdash \alpha, \vdash \alpha \beta \rightarrow \vdash \beta$$

$$G10 \quad \vdash \alpha, O\beta \rightarrow \vdash * \beta * \alpha$$

ここで、それぞれは、任意に与えられた記号の系列が言語系 $\mathbb{L}$ の定理に、 $\vdash$ いるかどうかを決める問題 (決定問題) を考える。そしてこの問題は一般的に解決されない事を証明 (しよう)。即ち次節以下でこの問題を解く finite な effective な procedure は存在 (しない) 事を示そう。

§4 Predicate calculus $\mathbb{F}$ と language $\mathbb{L}$

述語論理 (一階) $\mathbb{F}$ と language $\mathbb{L}$ の関係をおく。そのためにある命題論理 (無限多値) 模型を媒介として考える。

まず、 $\mathbb{F}$ は individual variable $x_1, x_2, \dots$ のみを含むものと規定する。これは常に可能である。さて $\mathbb{F}$

における論理式 α に対して $h(\alpha)$ を次のように定める。
 α は $\neg$ である。

$$(i) \quad \alpha \text{ が } F(x_i) \text{ ならば } h(F(x_i)) = X_i, F$$

ただし, F は $\mathcal{M}$ の propositional variable であり, X_i は $\mathcal{M}$ の logical operation である。

$$(ii) \quad \alpha \text{ が } G(x_i, x_j, \dots, x_k) \text{ ならば}$$

$$h(G(x_i, x_j, \dots, x_k)) = \Diamond(X_i G^1 X_j G^2 \dots X_k G^n)$$

ただし, $G^1, G^2, \dots, G^n$ は $\mathcal{M}$ の propositional variable であり, $X_i, X_j, \dots, X_k, \Diamond, \wedge$ は $\mathcal{M}$ の logical operation である。

$$(iii) \quad \alpha \text{ が logical operation } \wedge \text{ は quantifier } \exists \text{ を含むならば}$$

$$h(\neg \alpha_1) = \neg h(\alpha_1)$$

$$h(\alpha_1 \vee \alpha_2) = h(\alpha_1) \vee h(\alpha_2)$$

$$h((\exists x_i) \alpha_1) = \exists_i h(\alpha_1)$$

次に language L を $\mathcal{M}$ にとり, α を次のように解釈する。

即ち language L における記号系列と $\mathcal{M}$ における記号の間に次の対応関係を与える。

$$1 \rightarrow P_0$$

$$1 \wedge \rightarrow P_1$$

$$1 \wedge \wedge \rightarrow P_2$$

$$\begin{aligned}
 \circ &\rightarrow \supset \\
 \# \circ \Delta \# &\rightarrow \neg \\
 \# \circ \Delta \Delta \# &\rightarrow \Diamond \\
 \# \circ \Delta \Delta \Delta \# &\rightarrow X_1 \\
 \# \circ \Delta \Delta \Delta \Delta \# &\rightarrow X_2 \\
 &\vdots \\
 * \circ * &\rightarrow \forall_1 \\
 * \Delta \circ * &\rightarrow \forall_2 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

ここで language $\mathcal{L}$ の上記の解釈にもとづく logical system P を次の様に構成する。

P の wff は、 $\mathcal{L}$ における定理 $Ws \rightarrow s$ と ($\rightarrow$ 定義) される。

P の axioms は G_0, G_7, G_8 からえられる wff である。

P の rules は G_9, G_{10} からえられる。

この解釈にもとづけば、 $\vdash s$ が $\mathcal{L}$ の定理であれば、 s は P で証明可能である。又その逆が容易にあら

る。

さて、われわれの問題は、任意に与えられた記号の系列 s が $\mathcal{L}$ の定理であるかどうかを決めることである。そこで、この問題の不可能性は、上述した事から s が P で pro-

vable であるかどうか決める問題は不可能である事を示せばよい事がわかる。

5.5 諸定理

前節で述べた事を示すには、次の諸定理を証明すればよい。

定理 5.1 $\mathcal{O}$ が first-order predicate calculus で valid ならば、 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{P}$ で provable である。

定理 5.2 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{P}$ で provable ならば、 $\tilde{\mathcal{O}}$ の少なくとも一つは $\mathcal{P}$ で provable である。ただし $\tilde{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ からある規則でつくられる $\mathcal{P}$ の wff の有限集合である。

定理 5.3 $\tilde{\mathcal{O}}$ の少なくとも一つが $\mathcal{P}$ で provable ならば、それは $\mathcal{M}$ で valid である。

定理 5.4 $\tilde{\mathcal{O}}$ の少なくとも一つの wff が $\mathcal{M}$ で valid ならば、 $\mathcal{O}$ は first-order predicate calculus で valid である。

これらの定理の証明は、ここでは省略するが、系と(2)をいう。

系 $\mathcal{O}$ が与えられたとき $\tilde{\mathcal{O}}$ の少なくとも一つが $\mathcal{P}$ で provable であるとき、そしてそのとき $\mathcal{O}$ は $\mathcal{P}$ で provable である。

この系から、容易に $\mathcal{P}$ に対する undecidability がえさる。なぜならば、もし $\mathcal{P}$ における決定問題が solvable で

1) $\mathcal{M}$ を用いて、かなり面倒な証明を必要とする。

よすは、 $\mathcal{P}$ のよすは *solvable* ならず、よす知すよす $\mathcal{P}$ の *undecidability* に矛盾するからである。

§ 6 注意

さて、 $\mathcal{P}$ は一つの *axiomatic propositional calculus* と考えよすから $\mathcal{P}$ の *undecidability* から $\mathcal{P}$ の *refutable wff* の集合は *recursively enumerable* である事がわかる。したが、よすは *axiomatizable* ではない。 $\mathcal{P}$ は *combinatorial system* として形式化できる事がわかる。この場合、この *refutable wff* が *semantic* の方法で定義されるであろうか。この問題は別の科会に論ずる事として、計算機械等による数字の *constructive* 方法と *transcendental* の方法を比べ、よす興味ある議論を展開されるであろう。

References

- [1] M. Davis: *Computability and Unsolvability*, 1958
- [2] E. L. Post: *Formal reductions of the general combinatorial decision problem*, *Am. Jour. of Math.* 65 (1943-268)