

オンオフ間欠性の自己相似性ダイナミクス

藤坂博一 (京都大学大学院情報学研究科)

オンオフ間欠性 [1-4] は、非線形力学系にみられる極めて普遍的な現象であり、不変多様体上の特解としてのカオス運動あるいはストカスティックな運動が外部制御変数の変化のもとで不安定化するとき観測される。最近、オンオフ間欠性は低次元系に特徴的な現象ではなく、マイクロ波下の強磁性体におけるスピン波不安定 (Rödelisperger et al), 乱雑電場下のネマティック液晶における電磁流体不安定 (John et al) および大自由度系の数値モデル (Fujisaka et al, Physica D (1998)) で報告されている。

結合運動方程式系

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t)), \quad \dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{V}(t), \mathbf{X}(t)), \quad (1)$$

を考えよう。ここで、 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{G}$ は $\mathbf{X}$ と $\mathbf{V}$ について解析的で、任意の $\mathbf{X}$ に対して $\mathbf{G}(\mathbf{0}, \mathbf{X}) = \mathbf{0}$ であり、 $\dot{\mathbf{X}}^0(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^0(t), \mathbf{0})$ はカオス運動を示すとする。この運動は不変多様体 $\mathcal{M}$ 上の運動である。 $\mathbf{V}$ は、不変多様体 $\mathcal{M}$ からの状態点のずれの大きさを表す量である。外部変数を変化させていったときの不変多様体上の運動の線形安定性は以下のように議論できる。不変多様体からのずれ $r(t) \equiv |\mathbf{V}(t)|$ は線形の範囲で、

$$\dot{r}(t) = \Lambda_{\perp}(t) r(t) = (\lambda_{\perp} + f(t)) r(t), \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $\Lambda_{\perp}(t)$ は局所横断拡大率とよばれ、その平均値とゆらぎをそれぞれ、 $\lambda_{\perp}$, $f(t)$ と書いた。もし、 $\lambda_{\perp} < 0$ であれば、 $\mathcal{M}$ 上の運動は安定であるが、 $\lambda_{\perp} > 0$ であれば不安定である。不安定であるときは、 $r(t)$ の時間発展は一般に間欠的なふるまいを示す、(図 1(a))。この間欠性は自己相似な時間変動が特徴であり、オンオフ間欠性あるいは変調間欠性とよばれる。自己相似性に関する統計的な特徴については解説 [1] を参照してもらいたい。現象論的にはこれらの特性は、相乗確率モデル

$$\dot{r}(t) = (\lambda_{\perp} + f(t)) r(t) - (r(t))^3, \quad (3)$$

によって説明することができる [5]。ここで、 $f(t)$ は (2) のものと同じであるが、解析を簡単にするためにガウス型白色で強度を

$$\Gamma \equiv \int_0^{\infty} \langle f(t)f(0) \rangle dt > 0 \quad (4)$$

とする。非線形項は、 $\lambda_{\perp} > 0$ での線形近似での不安定性をおさえるために現象論的に導入したものである。講演ではオンオフ間欠性の新しい統計特性とその解析法について述べた。

オンオフ変数 $r(t)$ の一番長い特徴的な時間 T は、 $T = \Gamma/\lambda_{\perp}^2$ である。オンオフ変数の粗視量

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} r(s) ds. \quad (5)$$

を定義する。 $t \gg T$ では $A(t)$ は $r(t)$ のアンサンブル平均 (長時間 ($t \rightarrow \infty$) 平均) でよく近似できるが、 $t \ll T$ では平均領域によって $A(t)$ は強い揺らぎを示す。 T が十分大きいと $\Gamma^{-1} \ll T$ に

において、 $A(t)$ は自己相似な特徴を示すことが期待される (図 1(b),(c)) . 図 2(a) は $A(t)$ のモーメントを時間の関数としてプロットしたものであり、十分広い時間領域に対して、べき則

$$\langle (A(t))^q \rangle \sim t^{-\phi(q)} \quad (6)$$

が成立していることを表している [6]. また、特性指数 $\phi(q)$ は、 $c_0 \approx c_1 \approx 0.45$ として、

$$\phi(q) = c_1 q - c_0, \quad (7)$$

となる関係がある. 図 1(b),(c) に見られる $A(t)$ の自己相似性は、

$$A(t) \sim t^{-z(t)} \quad (8)$$

で定義される指数 $z(t)$ の揺らぎに関係している. $z(t)$ に自己相似性に関係したある統計的仮定をおくと、 $\Gamma^{-1} \ll t \ll T$ での $A(t)$ の確率密度は、

$$P(a, t) \sim a^{-1} \left(\frac{T}{t} \right)^{-S \left(\log \frac{a}{T} \right)}, \quad (9)$$

と書くことができる [7]. ここで、 $S(z)$ は指数 $z(t)$ の揺らぎの確率密度と関係した揺らぎスペクトルであり、図 3 は、確率写像モデル (12) について異なる粗視化時間 t に対して求めた $S(z)$ の数値計算の結果である. 十分大きな q に対して、 $\phi(q)$ の漸近形は (7) と書けるが、それからのずれは現象論的には、

$$\phi(q) = c_1 q - c_0 + k e^{-q/q^*} \quad (10)$$

と見積もることができる. k と q^* は正の定数である. (10) の Legendre 変換より大きな z の領域に対しては、次の漸近形が得られる:

$$S(z) = c_0 + q^*(c_1 - z) \log \left[\frac{q^*}{k e} (c_1 - z) \right]. \quad (11)$$

図 4 は、3つのモデル

$$r_{t+1} = r_t \exp(\lambda_{\perp} - r_t + f_t), \quad (\text{Model I, 確率的写像モデル}) \quad (12)$$

$$x_{n+1}^{(j)} = g(x_n^{(j)}) + \xi[g(x_n^{(l)}) - g(x_n^{(j)})], \quad (\text{Model II, カオス写像結合系}) \quad (13)$$

ただし、 $(j, l) = (1, 2), (2, 1)$, $g(x) = 3.9x(1-x)$, $\xi = (1 - e^{-D})/2$, ($D > 0$), および

$$x_{n+1} = \bar{a} y_n x_n (1 - x_n), y_{n+1} = \bar{b} y_n (1 - y_n), \quad (\text{Model III, カオス変調モデル}), \quad (14)$$

の間欠性発生直後において数値実験で求めた揺らぎスペクトル $S(z)$ をプロットしたものである. $S(z)$ は異なるモデルについて同じ形をもつ普遍関数であることを示唆している. 上に述べた特性関数 $\phi(q)$ や揺らぎスペクトル $S(z)$ による解析はいわゆる熱力学形式 (あるいは大偏差統計) [8,9] とよばれるもので、通常 $S(z)$ はすべての z の領域で下に凸 (concave) な関数であることを仮定する. 図 4 では $S(z)$ の左側に convex な領域が現われており、通常の仮定が成立しないことを意味している. これは、擬似的同期状態 ($r \approx 0$, ラミナー状態) が極めて長い間続くことにより、確率密度 $P(a, t)$ が $a \approx 0$ 近傍に鋭いピークをもつことに起因する. 転移点 ($\lambda_{\perp} = 0$) に近づくと convex な領域と concave な領域の境界は z の小さな方にシフトしていき、ちょうど不安定点ではすべての領域で concave となる.

本講演では、オンオフ間欠性に見られる揺らぎの自己相似性に関係した新しいタイプの普遍性について述べた. 本稿では粗い解説しか書かなかったが関心のある読者は文献 [7] を参照してほしい. オンオフ間欠性は元々カオスの少数個結合系で見出された [2] が、大自由度系でも観測されており、少数個結合系では見られない新しいタイプの統計則が観測される可能性が期待される.

参考文献

- [1] オンオフ間欠性の解説については以下を参照してほしい.
藤坂博一, 福島和洋, 井上正義, 山田知司, 日本物理学会誌, Vol. 51, No.11 (1996), 813.
藤坂博一, 応用数理, Vol. 9, No.1 (1999), 28.
- [2] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. 74(1985), 918; 75 (1986), 1087.
- [3] N. Platt, E. A. Spiegel and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. 70(1993), 279.
J. F. Heagy, N. Platt and S. M. Hammel, Phys. Rev. E 49(1994), 1140.
- [4] T. Yamada, K. Fukushima and T. Yazaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.99 (1989), 120.
E. Ott and J. C. Sommerer, Phys. Lett. A 188(1994), 39.
F. Rödelsperger, A. Čenys and H. Benner, Phys. Rev. Lett. 75 (1995), 2594.
Y. C. Lai and C. Grebogi, Phys. Rev. E 52(1995), R3313.
A. Čenys, A. Namajunas, A. Tamserius and T. Schneider, Phys. Lett. A 213 (1996), 259.
H. Fujisaka, K. Ouchi, H. Hata, B. Masaoka and S. Miyazaki, Physica D 114 (1998), 237.
T. John, R. Stannarius and U. Behn, Phys. Rev. Lett. 83(1999), 749.
- [5] T. Yamada and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 76(1986), 582.
- [6] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. 77(1987), 1045.
- [7] H. Fujisaka, H. Suetani and T. Watanabe, Prog. Theor. Phys. Suppl. , May/June (2000).
- [8] H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. 77(1987),1334.
- [9] 藤坂博一, 日本物理学会誌, Vol. 54, No.6 (1999),423.

図の説明

- 図 1: (a) 確率的写像モデル (12) に対するオンオフ変数 $r(s)$ の時間変化. ここで, $\lambda_{\perp} = 0.002$, $\Gamma = 1$, $(t = 10)$. 特徴的な時間長 T は, $T = 2.5 \times 10^5$ である. 粗視化変数 $A(t)(= A(t_0, t))$ を異なる粗視化スケールに対して t_0 の関数として書いた. 粗視化スケールは, (b) に対しては $t = 10^2$, (c) に対しては $t = 10^3$ である.
- 図 2: (a) 図 1 のモデルに対するモーメント $\langle (A(t))^q \rangle$ の t 依存性を示す図. 傾きから特性関数 $\phi(q)$ が得られる. (b) (a) と同じモデルに対する特性関数 $\phi(q)$.
- 図 3: 図 1 のモデルに対する揺らぎスペクトルの数値実験の結果.
- 図 4: オンオフ間欠性を示す 3つのモデル (12)-(14) に対する揺らぎスペクトルの数値実験の結果. 結果は一つの曲線の上になっている. 実線は現象論の結果 (11) である.

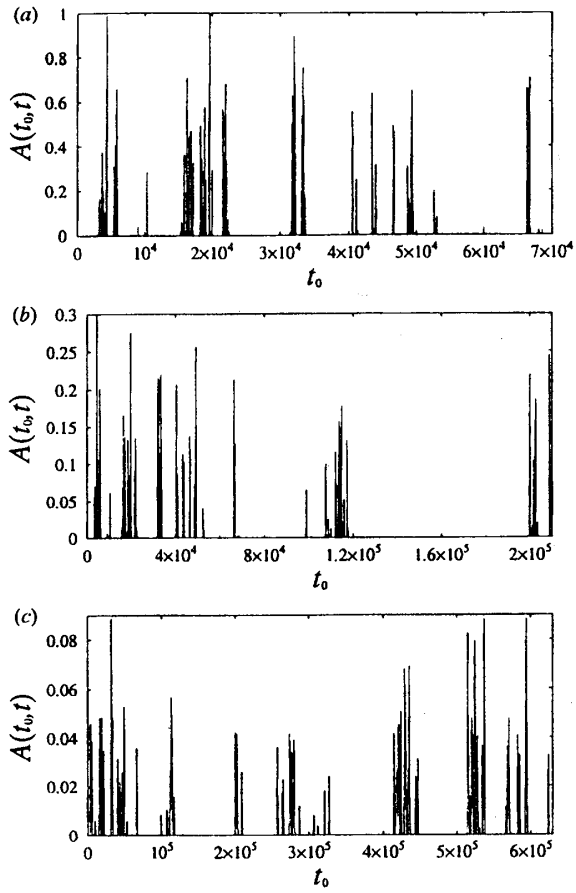


図 1

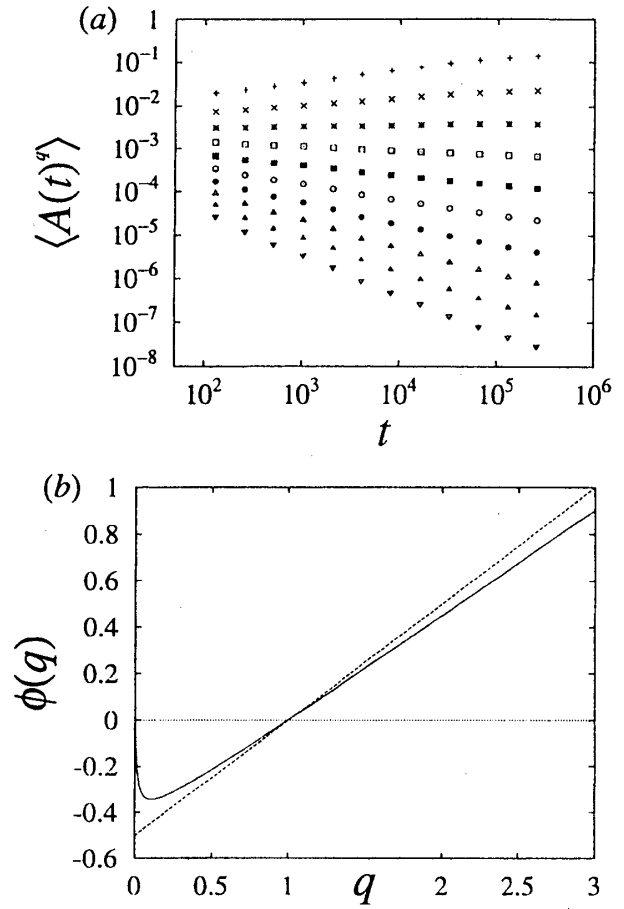


図 2

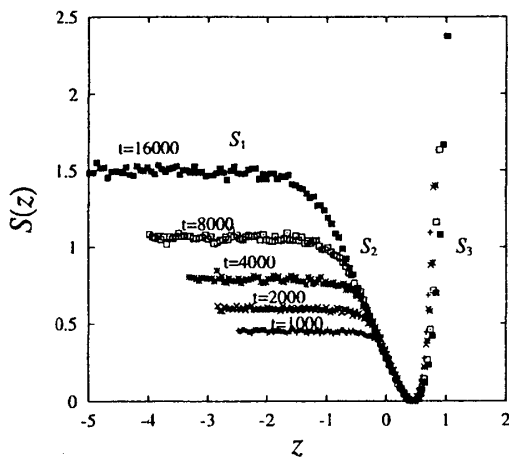


図 3

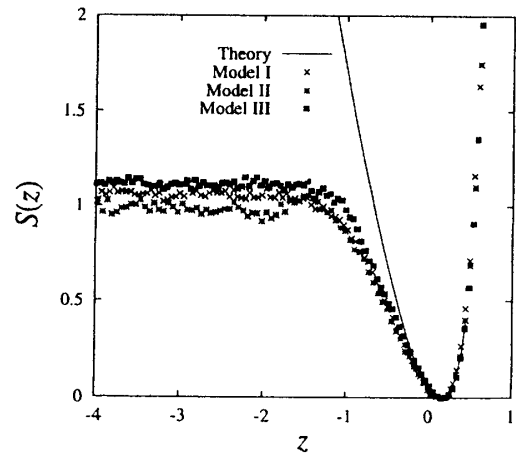


図 4