

テンソル積上の作用素の

approximate eigenvalues について

北大 理 一瀬 孝

§ 0. 序. X, Y を Banach 空間. $X \otimes Y$ をこれらのテンソル積, $X \otimes Y$ をある crossnorm α に因する, その完備化とする. X, Y 上の恒等作用素を同じ I で表わし, $X \otimes Y$ 上のそれを $\mathbb{I} (= I \otimes I)$ で表わす.

A, B を, それぞれ, X, Y で稠密に定義された線型作用素とする. 多項式 $P(\xi, \eta) = \sum c_{jk} \xi^j \eta^k$ (of degrees m in ξ and n in η) に対して, $X \otimes Y$ 上の線型作用素

$$P\{A \otimes I, I \otimes B\} \equiv \sum c_{jk} A^j \otimes B^k, \quad \text{定義域} = D[A^m] \otimes D[B^n],$$

を考えよう. 簡単の為に, $P\{A \otimes I, I \otimes B\}$ は, $X \otimes Y$ で closable であるとし, その closure を P で表わす.

λ が P の eigenvalue のとき, λ に対する eigenvector とし, λ が isolated finite-dimensional eigenvalue である場合を除いて ([1]), 必ずしも $v = x \otimes y$ ($x \in D[A^m], y \in D[B^n]$)

の形のものがあるとは限らない。

それでは, λ が P の approximate eigenvalue のときには, 対応する事情はどうか. この問題に答えの爲め, このノート
の主な目的である. ここで, λ が, Banach 空間 Z 上の線型
作用素 $T: D[T] \subset Z \rightarrow Z$ の approximate eigenvalue で
あるとは, ある列 $\{z_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset D[T]$, $\|z_\ell\|=1$, $\ell=1, 2, \dots$, が存在
して, $(T-\lambda I)z_\ell \rightarrow 0$ ($\ell \rightarrow \infty$) が成立するときを云う. T の
approximate eigenvalues の全体を $\sigma_\pi(T)$ で表わし, T の
approximate point spectrum と呼ぶ.

上の問題は, P の approximate eigenvalue に関して,
次の如くなる:

$\lambda \in \sigma_\pi(P)$ のとき, ある列 $\{x_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset D[A^m]$, $\{y_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset D[B^n]$,
 $\|x_\ell\|=\|y_\ell\|=1$, $\ell=1, 2, \dots$, が存在して, $(P-\lambda I)(x_\ell \otimes y_\ell) \rightarrow 0$ ($\ell \rightarrow \infty$)
が成立するか.

この問題のあてはまる答は, λ がある条件を満たしてあれば,
(あるクラスの多項式 $P(z, \eta)$ に対して) Yes であるが,
さもなければ, 一般には No である.

簡単の為に, 多項式 $P(z, \eta) = z + \eta$ に対応する作用素
 $A \otimes I + I \otimes B$ に限定して話を進めよう.

§ 1. 結果.

先ず記号の説明, 定義から始めよう.

Banach 空間 Z で定義された, すべての線型有界作用素 $S: D[S] \subset Z \rightarrow Z$ (定義域は任意) の集合を $B(Z)$ で表わし, このうち $D[S] = Z$ なる, すべての S の集合を $L(Z)$ で表わす.

$X \otimes Y$ 上の norm α が,

$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \|y\|, \forall (x, y) \in X \times Y; \|x' \otimes y'\|_\alpha = \|x'\| \|y'\|, \forall (x', y') \in X' \times Y'$,
を満しているとき, reasonable であると云う. reasonable norm α が, quasi-uniform (with constant k) であると云う,

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \| (T \otimes S) u \|_\alpha &\leq k \|T\| \|S\| \|u\|_\alpha, \\ \forall (T, S) &\in L(X) \times L(Y), \forall u \in X \otimes Y, \end{aligned}$$

が成立するときを云う. k は, T, S, u に無関係な定数.

更に, α が, strongly quasi-uniform であると云う, α が quasi-uniform であつて, しかも, (1.1) が

$$\forall (T, S) \in B(X) \times B(Y), \forall u \in D[T] \otimes D[S]$$

に於いて成立するときを云う.

norm $\varepsilon (= \lambda)$ は, strongly quasi-uniform ($k=1$) である.

より一般に, Grothendieck の意味の injective $\otimes$ -norms も又, そうである ($k=1$). 又, X, Y が共に Hilbert 空間のとき, norm $\pi (= \gamma)$ 及び prehilbertian norm σ は, strongly quasi-uniform になる ($k=1$).

T を Banach 空間 Z で稠密に定義された線型閉作用素とするとき, T の spectrum, resolvent set, approximate point spectrum を, それぞれ, $\sigma(T)$, $\rho(T)$, $\sigma_{\pi}(T)$ で表わす.

T がある $0 \leq \theta_T < \pi$ に對して, 条件:

$$\rho(T) \supset C(S(\theta_T), S(\theta_T) = \{\lambda; |\arg \lambda| \leq \theta_T\},$$

$$\|\lambda(\lambda I - T)^{-1}\| \leq M_T(\theta), \quad \theta = \arg \lambda, \quad \forall \lambda \notin S(\theta_T)$$

を満してゐるとき, $(\theta_T, M_T(\theta))$ -型であると云ふ.

得られた主結果は, 次の定理である.

Theorem 1. α を $X \otimes Y$ 上の strongly quasi-uniform reasonable norm とする. A, B が それぞれ $(\theta_A, M_A(\theta))$ -, $(\theta_B, M_B(\theta))$ -型であつて, 且 $0 \leq \theta_A + \theta_B < \pi$ を満してゐるとする. そのとき,

$$\sigma_{\pi}((A \otimes I + I \otimes B)^{\sim}) = \sigma_{\pi}(A) + \sigma_{\pi}(B).$$

(簡単な爲に, $A \otimes I + I \otimes B$ は, $X \otimes Y$ で closable であるとし, 従つて, $(A \otimes I + I \otimes B)^{\sim}$ は その closure を表わす.)

Theorem 1 の証明に必要な二つの定理を挙げておこう.

先づ記号の説明から. 稠密に定義された線型閉作用素 $T: D[T] \subset Z \rightarrow Z$ の extended spectrum, extended approximate point spectrum を $\sigma_e(T)$, $\sigma_{\pi e}(T)$ で表わす:

$$\sigma_e(T) = \begin{cases} \sigma(T) \cup \{\infty\}, & T \text{ が非有界のとき} \\ \sigma(T), & T \text{ が有界のとき} \end{cases}$$

$$\sigma_{\pi e}(T) = \begin{cases} \sigma_{\pi}(T) \cup \{\infty\}, & T \text{ が非有界のとき} \\ \sigma_{\pi}(T), & T \text{ が有界のとき} \end{cases}$$

$\sigma_e(T)$ は Riemann 球 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の空でない compact 部分集合であり, $\sigma_{\pi e}(T)$ は, $\sigma_e(T)$ の compact 部分集合である.

さて, A, B をそれぞれ X, Y で稠密に定義された線型作用素とし, $\rho(A) \neq \emptyset, \rho(B) \neq \emptyset$ とする. $\mathcal{F}_{\infty}(A, B)$ を $\sigma_e(A) \times \sigma_e(B) \subset \mathbb{C}^{*2}$ の近傍で正則な関数全体とする. $f \in \mathcal{F}_{\infty}(A, B)$ に対して, $X \hat{\otimes} Y$ 上の線型有界作用素

$$\begin{aligned} (1.2) \quad f(A \otimes I, I \otimes B) &\equiv f(\infty, \infty) I \hat{\otimes} I + (2\pi i)^{-1} I \hat{\otimes} \left(\int_{\partial V} f(\infty, \zeta_2) (\zeta_2 I - B)^{-1} d\zeta_2 \right) \\ &+ (2\pi i)^{-1} \left(\int_{\partial U} f(\zeta_1, \infty) (\zeta_1 I - A)^{-1} d\zeta_1 \right) \hat{\otimes} I \\ &+ (2\pi i)^{-2} \int_{\partial U} \int_{\partial V} f(\zeta_1, \zeta_2) (\zeta_1 I - A)^{-1} \hat{\otimes} (\zeta_2 I - B)^{-1} d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned}$$

を考えよう. ここに, U, V は, $\mathbb{C}^*$ の開集合で, その境界 $\partial U, \partial V$ は, 有限本の rectifiable Jordan curves からなり, $f(\zeta_1, \zeta_2)$ は, $\overline{U} \times \overline{V} \subset \mathbb{C}^{*2}$ で正則となっているものである. 但し, A が有界のとき, $f(\infty, \zeta_2) \equiv 0$, B が有界のとき, $f(\zeta_1, \infty) \equiv 0$ と約束する. (1.2) の右辺は, U, V の選ぶ方には依らない.

Theorem 2. α を $X \otimes Y$ 上の strongly quasi-uniform reasonable norm とする. そのとき $f \in \mathcal{F}_\alpha(A, B)$ に対して,

$$\sigma_\pi(f(A \otimes I, I \otimes B)) = f(\sigma_\pi(A), \sigma_\pi(B)).$$

Remarks. 1. Theorem 1 の下での A, B に対して, $P(\frac{1}{3}, \eta) = \frac{1}{3} + \eta$ は, 一般には, $\mathcal{F}_\alpha(A, B)$ に属していない.

2. Theorem 1 は, §0. で提起した問題の答えを与えている. 即ち, $\lambda \in \sigma_\pi((A \otimes I + I \otimes B)^\sim)$ ならば, ある列 $\{x_l\}_{l=1}^\infty \subset D[A]$, $\{y_l\}_{l=1}^\infty \subset D[B]$, $\|x_l\| = \|y_l\| = 1$, $l=1, 2, \dots$, が存在して,

$$[(A \otimes I + I \otimes B)^\sim - \lambda I \otimes I](x_l \otimes y_l) \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

が成立する. 要は Theorem 1 は, 次のことを主張している:

ある $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ が存在して, $\mu + \nu = \lambda$ であって

$$(A - \mu I)x_l \rightarrow 0, \quad (B - \nu I)y_l \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty).$$

3. α が "quasi-uniform" であるか, "strongly quasi-uniform" ではないとき, Theorems 1 & 2 は必ずしも成立しない.

Example. 適当に Banach 空間 X, Y 及び isomorphism $A: X \rightarrow X$ を取って, $A \hat{\otimes}_\pi I$ が $X \hat{\otimes}_\pi Y$ 上の線型有界作用素とに閉値域を持たないようにできる. このとき, π は, quasi-uniform ($k=1$) であるか, strongly quasi-uniform ではない. 従って, $0 \in \sigma_\pi(A \hat{\otimes}_\pi I)$ であるか, $0 \notin \sigma_\pi(A) = \sigma_\pi(A) \cdot \sigma(I)$ である.

§ 2. 証明の概略

Proof of Theorem 2. "左辺 $\supset$ 右辺" の証明は 容易.

逆の inclusion の証明は, 次の 2つの lemmas を用いて行ふ.
特に, Stodkowski-Zelasko [2] による Lemma 1 が本質的役割を果たす.

Lemma 1. $\{T_1, \dots, T_{p+q}\} \subset L(Z)$ であって, z は commute するとする. もし

$$\inf \left\{ \sum_{j=1}^p \|T_j z\| ; z \in Z, \|z\|=1 \right\} = 0$$

ならば, ある $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$ が存在して

$$\inf \left\{ \sum_{j=1}^p \|T_j z\| + \sum_{k=1}^q \|(T_{p+k} - \lambda_k I) z\| ; z \in Z, \|z\|=1 \right\} = 0$$

が成立する.

Lemma 2. α が $X \otimes Y$ 上の strongly quasi-uniform reasonable norm とする. そのとき, 任意の X で稠密に定義された線型閉作用素 A に対して,

$$\sigma_\pi(A \hat{\otimes} I) = \sigma_\pi(A).$$

Proof of Theorem 1. 同様に "左辺 $\supset$ 右辺" の証明は 容易. 逆の inclusion を示せばよい. $P = (A \otimes I + I \otimes B)^\sim$

とおく. $\lambda_0 \notin \sigma(A) + \sigma(B)$ を 1 つ と, て 固定する. 定理の条件の下で, $\sigma(A) + \sigma(B) = \sigma(P)$ が成立するから, $(P - \lambda_0 I)^{-1}$ が存在して, $L(X \otimes Y)$ に属し, それは,

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} = (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} (z_1 + z_2 - \lambda_0)^{-1} (z_1 I - A)^{-1} \otimes (z_2 I - B)^{-1} dz_1 dz_2$$

で与えられる. Γ_A, Γ_B は, A, B が $(\theta_A, M_A(\theta))$ -, $(\theta_B, M_B(\theta))$ -型で, $0 \leq \theta_A + \theta_B < \pi$ であることを考慮して, $\rho(A), \rho(B)$ の中で適当に取, た arcs である. . . このとき,

$$(\xi + \eta - \lambda_0)^{-1} = (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} (z_1 + z_2 - \lambda_0)^{-1} (z_1 - \xi)^{-1} (z_2 - \eta)^{-1} dz_1 dz_2$$

だから, (本義) Riemann 積分の定義から, Riemann sums の列 $\{f_n(\xi, \eta)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_{\infty}(A, B)$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi, \eta) = (\xi + \eta - \lambda_0)^{-1}, \text{ pointwise on } \sigma_e(A) \times \sigma_e(B).$$

1 かつ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(A \otimes I, I \otimes B) - (P - \lambda_0 I)^{-1}\| = 0.$$

(但し, $\infty \in \sigma_e(A)$ のとき, $(\infty + \eta - \lambda_0)^{-1} = 0$, $\forall \eta \in \sigma_e(B)$, 及び $\infty \in \sigma_e(B)$ のとき, $(\xi + \infty - \lambda_0)^{-1} = 0$, $\forall \xi \in \sigma_e(A)$ と約束する.)

よって, Theorem 2 及び 次の 2 つの lemmas を用いて,

$$\sigma_{\pi}((P - \lambda_0 I)^{-1}) = \{(\mu + \nu - \lambda_0)^{-1}; \mu \in \sigma_e(A), \nu \in \sigma_e(B)\}$$

を証明することにできる. これより, Theorem 1 を得る.

証明の中で, Lemma 3 が本質的な役割を果たす.

Lemma 3. 上の $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $(\frac{1}{3} + \eta - \lambda_c)^{-1} = \sigma_e(A) \times \sigma_e(B)$ 上で一様収束する.

Lemma 4. $T \in L(Z)$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(Z)$ であって $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ とする.

a) $\lambda_n \in \sigma_{\pi}(T_n)$, $n=1, 2, \dots$, $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ ならば, $\lambda \in \sigma_{\pi}(T)$.

b) T, T_n , $n=1, 2, \dots$, は互に commute するとする.

そのとき, 各 $\lambda \in \sigma_{\pi}(T)$ に対して, ある列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n \in \sigma_{\pi}(T_n)$, $n=1, 2, \dots$, が存在して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$.

References

- [1] 筆者: Essential spectra for tensor products of linear operators, ∞ 次元空間のテンソル積, 数理研講究録 228(1975年3月).

及び

筆者: On the spectral properties of tensor products of linear operators, スペクトル理論・散乱理論とその周辺, 数理研講究録 242(1975年6月).

- [2] Słodkowski-Żelasko: On joint spectra of commuting families of operators, *Studia Math.* 50(1974), 127-148.