

Asymptotic non-degeneracy of the solution to the Liouville equation

佐藤 友彦 (Tomohiko SATO)

鈴木 貴 (Takashi SUZUKI)

大阪大学大学院基礎工学研究科

(Osaka University Graduate School of Engineering Science)

1 Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする. λ は正の定数で, 関数 $V = V(x)$ は $V \in C^1(\bar{\Omega})$, $V(x) > 0$ ($\forall x$) とする. 考える問題は, Liouville-Gel'fand problem

$$-\Delta v = \lambda V(x)e^v \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (1)$$

で, λ が十分小さい時の解 (λ, v) の漸近的な非退化性を考える. 以下, 解は古典解で考える. $V \equiv 1$ の場合, すなわち

$$-\Delta v = \lambda e^v \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (2)$$

については Gladiali-Grossi [5] によって既に研究されており, 今回は (1) への拡張を報告する. なお, これは [10] の要約である.

主定理を紹介する前に事実を幾つか紹介する. まず $\lambda \downarrow 0$ における特異極限の分類がある.

Fact 1 (Nagasaki-Suzuki [8]) $\{(\lambda_k, v_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\lambda_k \downarrow 0$ を (2) の解の列とすると, 部分列 (同じ記号で書く) に対して, 量子化

$$\Sigma_k = \lambda_k \int_{\Omega} e^{v_k} \rightarrow 8\pi m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, +\infty)$$

が起こり, さらに m の値に応じて次が成り立つ.

(i) $m = 0$ の時, $\|v_k\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$.

(ii) $m \in \mathbb{N}$ の時, $\{v_k\}$ の爆発集合

$$\mathcal{S} = \{x_0 \in \bar{\Omega} \mid \Omega \ni x_k \rightarrow x_0 \text{ に対して } v_k(x_k) \rightarrow +\infty\}$$

が存在して $\mathcal{S} \subset \Omega$ かつ m 個の点集合となり, $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{S}$ 上局所一様に $v_k \rightarrow 8\pi \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} G(\cdot, x_0)$. さらに任意の爆発点 $x_0 \in \mathcal{S}$ に対して

$$\frac{1}{2} \nabla R(x_0) + \sum_{x'_0 \in \mathcal{S} \setminus \{x_0\}} \nabla_x G(x_0, x'_0) = 0$$

が成り立つ. ここで $G = G(x, y)$ は $-\Delta$ in Ω , $\cdot|_{x \in \partial\Omega} = 0$ を満たす Green 関数で, $R(x) = \left[G(x, y) - \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} \right]_{y=x}$ は Robin 関数.

(iii) $m = +\infty$ の時, Ω 上局所一様に $v_k \rightarrow +\infty$.

特に $m = 1$ の時, $\{v_k\}$ は $R(x)$ の臨界点 x_0 において 1 点爆発し, $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上局所一様に $v_k(x) \rightarrow 8\pi G(x, x_0)$ となる. 次の定理では, x_0 が $R(x)$ の非退化臨界点であれば解が非退化である事を述べている.

Fact 2 (Gladiali-Grossi [5]) *Fact 1* の $m = 1$ について, 爆発点 x_0 が Robin 関数の非退化臨界点であれば, $\forall k \gg 1$ に対して (λ_k, v_k) は非退化. つまり, 線形化作用素 $-\Delta - \lambda_k e^{v_k}$ in Ω , $\cdot|_{\partial\Omega} = 0$ は 0 を固有値としない.

一方 (1) については, Ma-Wei [7] による Fact 1 の拡張がある.

Fact 3 (Ma-Wei [7]) (1) の解の列 $\{(\lambda_k, v_k)\}_k$, $\lambda_k \downarrow 0$ について, *Fact 1* と同様の分類定理が成り立つ. ただし $\Sigma_k = \lambda_k \int_{\Omega} V e^{v_k}$ である. また, (ii) については, 特異極限は同じであるが, 爆発点の位置が次のように変更される.

$$\frac{1}{2} \nabla R(x_0) + \sum_{x'_0 \in \mathcal{S} \setminus \{x_0\}} \nabla_x G(x_0, x'_0) + \frac{1}{8\pi} \nabla \log V(x_0) = 0, \quad (\forall x_0 \in \mathcal{S}).$$

特に 1 点爆発の時, 爆発点 x_0 は $R(x) + \frac{1}{4\pi} \log V(x)$ の臨界点である.

2 Main result

我々は, Fact 3 に基づいて Fact 2 の拡張を得た.

Theorem 1 *Fact 3* の $m = 1$ について, V が $x_0 \in \mathcal{S}$ の近傍で C^2 級であり, x_0 が $R(x) + \frac{1}{4\pi} \log V(x)$ の非退化臨界点ならば, $\forall k \gg 1$ に対して (λ_k, v_k) は非退化. つまり, 線形化作用素 $-\Delta - \lambda_k V e^{v_k}$ in Ω , $\cdot|_{\partial\Omega} = 0$ は 0 を固有値としない.

Theorem 1 に関連する結果として, [11] がある. これも [5] の (1) への拡張である. Ω を両軸対称で x_1, x_2 -方向に凸な領域とし, $V(x)$ が両軸対称, 第一象限で単調減少関数ならば, Gidas-Ni-Nirenberg [4] と [7], Pohozaev の等式 [9] より, 解は爆発しない, または, 原点で 1 点爆発する. λ が十分小さい時, (1) の解は丁度 2 個である事を, 1 点爆発解の漸近的一意性を示す事によって得た.

また [11] では, Ω が凸で $\{(\lambda_k, v_k)\}$, $\lambda_k \downarrow 0$ を 1 点爆発している (1) の解の列とする時, 十分大きい k に対して

$$(x - x_k) \cdot \nabla v_k(x) < 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \{x_k\}$$

($x_k \in \Omega$ は $v_k(x_k) = \max_{\Omega} v_k$ なる点) が成立し, さらに境界 $\partial\Omega$ 上の全ての点で曲率が正ならば, (1) の 1 点爆発解 (λ_k, v_k) に対して k が十分大きい時, v_k の level set は x_k を除く各点で曲率が正である事, すなわち level set の狭義凸性についても得られた. 証明は割愛するが, $V(x)$ がそれぞれの主張に影響を及ぼさない事を述べておく. これは (1) と (2) の解の特異極限が同じである事によるものである.

ここで, Theorem 1 の補題を述べる. これは [5] の Theorem 6 に対応している.

Lemma 1 ある定数 $C_1 > 0$ が存在し, 任意の $x \in \bar{\Omega}$, $k = 1, 2, \dots$ に対して

$$\left| v_k(x) - \log \frac{e^{v_k(x_k)}}{\left\{1 + \frac{1}{8} \lambda_k V(x_k) e^{v_k(x_k)} |x - x_k|^2\right\}^2} \right| \leq C_1 \quad (3)$$

が成立する. ここで, $x_k \in \Omega$ は $v_k(x_k) = \|v_k\|_{\infty}$ を満たす点.

Proof of Lemma 1. $u_k = v_k + \log \lambda_k$ とすると u_k は

$$\begin{aligned} -\Delta u_k &= V(x) e^{u_k} \quad \text{in } \Omega, \quad u_k = \log \lambda_k \quad \text{on } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} e^{u_k} &= O(1) \end{aligned}$$

を満たし, 部分列に対して $u_k(x_k) \rightarrow +\infty$ が成り立つ. なぜならば, もし $u_k(x_k) \rightarrow +\infty$ が起こらないとすると, $u_k(x_k) \rightarrow -\infty$ または $u_k(x_k) \rightarrow c \in \mathbb{R}$ となる. 前者の場合,

$$\int_{\Omega} \lambda_k e^{v_k} \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty)$$

となるが, これは仮定より $0 < \exists a \leq V(x) \leq \exists b$ ($x \in \bar{\Omega}$) であることから $\Sigma_k \rightarrow 8\pi$ に矛盾する. 残る後者については, Brezis-Merle [1] より $\{u_k\}$ が Ω で局所一様有界となるが, Fact 3 より $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上で局所一様に $u_k = v_k + \log \lambda_k \rightarrow -\infty$ となる. これは矛盾である.

よって Y.Y. Li [6] の Theorem 0.3 を用いることが出来, 定数 $C_1 > 0$ が存在して

$$\left| u_k(x) - \log \frac{e^{u_k(x_k)}}{\left\{1 + \frac{1}{8} V(x_k) e^{u_k(x_k)} |x - x_k|^2\right\}^2} \right| \leq C_1$$

($x \in \bar{\Omega}$, $k = 1, 2, \dots$) が成り立つ. これは (3) と同値である.

ここで, $\delta_k > 0$ を $\delta_k^2 \lambda_k e^{\|v_k\|_\infty} = 1$ で定義する. 次の補題は [5] の Lemma 5 に対応する.

Lemma 2 $\delta_k \rightarrow 0$.

Proof of Lemma 2. (3) より,

$$\left| v_k(x) - v_k(x_k) + \log \left\{ 1 + \frac{V(x_k)}{8\delta_k^2} |x - x_k|^2 \right\}^2 \right| \leq C_1$$

($x \in \bar{\Omega}$, $k = 1, 2, \dots$). また, $v_k \rightarrow 8\pi G(\cdot, x_0)$ locally uniformly in $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$, $V(x_k) \rightarrow V(x_0)$, $v_k(x_k) \rightarrow +\infty$ より, $\delta_k \rightarrow 0$ を得る.

これより, Theorem 1 の証明の概略を述べる. 証明は背理法によって行われ, 基本的には [5] に従う.

まず $w_k = w_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) を (1) の線形化問題

$$-\Delta w_k = \lambda_k V e^{v_k} w_k \quad \text{in } \Omega, \quad w_k = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \|w_k\|_\infty = 1 \quad (4)$$

の (非自明) 解とする. 次にスケーリングを行う.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(x) &:= v_k(\delta_k x + x_k) - \|v_k\|_\infty, \\ \tilde{w}_k(x) &:= w_k(\delta_k x + x_k), \\ \tilde{V}_k(x) &:= V(\delta_k x + x_k) \quad \text{in } \tilde{\Omega}_k. \end{aligned}$$

ここで $\tilde{\Omega}_k = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_k x + x_k \in \Omega\}$ である.

$\tilde{v}_k$ について

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{v}_k &= \tilde{V}_k e^{\tilde{v}_k}, \quad \tilde{v}_k \leq 0 = \tilde{v}_k(0) \quad \text{in } \tilde{\Omega}_k, \\ \int_{\tilde{\Omega}_k} e^{\tilde{v}_k} &= \int_{\Omega} \lambda_k e^{v_k} \leq \exists C_2, \quad (\forall k) \end{aligned}$$

が成り立ち, $\tilde{w}_k$ は

$$-\Delta \tilde{w}_k = \tilde{V}_k e^{\tilde{v}_k} \tilde{w}_k \quad \text{in } \tilde{\Omega}_k, \quad \tilde{w}_k = 0 \quad \text{on } \partial\tilde{\Omega}_k, \quad \|\tilde{w}_k\|_\infty = 1$$

を満たす. よって [1] より, 部分列に対して $\tilde{v}_k \rightarrow \tilde{v}_0$ in $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ ($0 < \alpha < 1$) を満たす $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_0(x)$ が存在して,

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{v}_0 &= V(x_0)e^{\tilde{v}_0}, \quad \tilde{v}_0 \leq 0 = \tilde{v}_0(0) \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{\tilde{v}_0} &< +\infty \end{aligned}$$

を満たし, さらに [3] より

$$\tilde{v}_0(x) = \log \frac{1}{\{1 + \frac{1}{8}c|x|^2\}^2}$$

を得る. ここで $c = V(x_0)$. よって $\{\tilde{w}_k\}$ について, 部分列に対して $\tilde{w}_k \rightarrow \tilde{w}_0$ in $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ を満たす $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_0(x)$ が存在し,

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{w}_0 &= ce^{\tilde{v}_0}\tilde{w}_0 = \frac{c}{\{1 + \frac{1}{8}c|x|^2\}^2}\tilde{w}_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ \|\tilde{w}_0\|_{\infty} &\leq 1 \end{aligned}$$

を満たす. さらに Chen-Lin [2] より

$$\tilde{w}_0(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{a_i x_i}{\frac{8}{c} + |x|^2} + b \cdot \frac{\frac{8}{c} - |x|^2}{\frac{8}{c} + |x|^2}, \quad (a_1, a_2, b \in \mathbb{R}),$$

と表される.

Lemma 3 $\tilde{w}_0 = 0$ in $\mathbb{R}^2$.

$y_k \in \tilde{\Omega}_k$ を $\tilde{w}_k(x)$ の最大値を取る点, つまり $\|\tilde{w}_k\|_{\infty} = \tilde{w}_k(y_k) = 1$ とすると Lemma 3 より $|y_k| \rightarrow +\infty$ となる. ここで Kelvin 変換

$$\hat{v}_k(x) = \tilde{v}_k\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad \hat{w}_k(x) = \tilde{w}_k\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

を行うと 十分大きな k に対して

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_k\|_{\infty} &= \hat{w}_k\left(\frac{y_k}{|y_k|^2}\right) = 1, \\ -\Delta \hat{w}_k &= \frac{1}{|x|^4} \tilde{V}_k\left(\frac{x}{|x|^2}\right) e^{\hat{v}_k} \hat{w}_k \quad \text{in } B_1(0) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

が成り立つ. Lemma 1 より

$$\left| \tilde{v}_k(x) + \log \left\{ 1 + \frac{1}{8} V(x_k) |x|^2 \right\}^2 \right| \leq C_1, \quad (\forall x \in \tilde{\Omega}_k, \forall k \in \mathbb{N}) \quad (5)$$

が成り立つので, k に依らないような評価 $e^{\hat{v}_k(x)} = O(|x|^{-4})$ を得る. つまり $|x|^{-4} e^{\hat{v}_k(x)} = O(1)$ を意味しており, $x = 0$ は $\hat{w}_k$ の除去可能特異点となる. よって局所楕円型評価より $1 = \|\hat{w}_k\|_{L^{\infty}(B_{1/2}(0))} \leq C \|\hat{w}_k\|_{L^2(B_1(0))}$ が得られ, $\hat{w}_k \rightarrow 0$ in $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ と $|\hat{w}_k| \leq 1$ より $\|\hat{w}_k\|_{L^2(B_1(0))} \rightarrow 0$ となる. しかしこれは矛盾である. よって Theorem 1 が示される.

3 Sketch of proof of Lemma 3

Lemma 3 の証明の概略を述べる. この補題も背理法によって示される. $a_1 = a_2 = 0$ を示すため, 次の補題を [5] に従って示す.

Lemma 4 $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ とすると, $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上局所一様に

$$\delta_k^{-1} w_k(\cdot) \rightarrow 2\pi \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial G}{\partial y_j}(\cdot, x_0). \quad (6)$$

Proof of Lemma 4. Green の定理より

$$\begin{aligned} w_k(x) &= \int_{\Omega} G(x, y) \lambda_k V(y) e^{v_k(y)} w_k(y) dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \tilde{V}_k(y') e^{\tilde{v}_k(y')} \tilde{w}_k(y') dy' \\ &= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \cdot \left\{ \tilde{V}_k(y') e^{\tilde{v}_k(y')} \tilde{w}_k(y') - \frac{64b}{c} \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y'|^2}{\left(\frac{8}{c} + |y'|^2\right)^3} \right\} dy' \\ &\quad + \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \cdot \frac{64b}{c} \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y'|^2}{\left(\frac{8}{c} + |y'|^2\right)^3} dy' \\ &= I_{1,k}(x) + I_{2,k}(x) \end{aligned}$$

とできる. ここで関数 f_k を

$$f_k(y) = \tilde{V}_k(y) e^{\tilde{v}_k(y)} \tilde{w}_k(y) - \frac{64b}{c} \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y|^2}{\left(\frac{8}{c} + |y|^2\right)^3}$$

とすると,

$$\tilde{V}_k(y) e^{\tilde{v}_k(y)} \tilde{w}_k(y) \rightarrow \frac{c}{\left(1 + \frac{c}{8}|y|^2\right)^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \frac{a_i y_i}{\frac{8}{c} + |y|^2} + b \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y|^2}{\frac{8}{c} + |y|^2} \right)$$

より,

$$f_k(y) \rightarrow f_0(y) = \frac{64}{c} \sum_{i=1}^2 \frac{a_i y_i}{\left(\frac{8}{c} + |y|^2\right)^3} \quad \text{locally uniformly in } y \in \mathbb{R}^2$$

を得る.

(5) より, $f_k(y) = O(|y|^{-4})$ uniform in $k = 1, 2, \dots$ であるので, 優収束定理より $g_k(y) \rightarrow g_0(y)$ locally uniformly in $y \in \mathbb{R}^2$ となる. ここで,

$$g_k(y_1, y_2) = - \int_{\frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1^2 + a_2^2}}^{+\infty} f_k \left(a_1 t + \frac{a_2^2 y_1 - a_1 a_2 y_2}{a_1^2 + a_2^2}, a_2 t - \frac{a_1 a_2 y_1 - a_1^2 y_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) dt$$

は [5] の Lemma 6 で導入されている関数であり,

$$a_1 \frac{\partial g_k}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial g_k}{\partial y_2} = f_k$$

を満たす. よって

$$\begin{aligned} I_{1,k}(x) &= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) f_k(y') dy' \\ &= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \cdot \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(y') dy' \\ &= -\delta_k \sum_{j=1}^2 a_j \int_{\tilde{\Omega}_k} \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, \delta_k y' + x_k) \cdot g_k(y') dy' \\ &= \delta_k \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{16}{c} \cdot \frac{1}{\left(\frac{8}{c} + |y'|^2\right)^2} dy' + o(1) \right\} \\ &= \delta_k \left\{ 2\pi \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) + o(1) \right\} \quad \text{locally uniformly in } x \in \bar{\Omega} \setminus \{x_0\}. \end{aligned}$$

残る $I_{2,k}(x)$ については, $u(y) = \log \frac{64}{c} \cdot \frac{1}{\left(\frac{8}{c} + |y|^2\right)^2}$ とすると

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_j} (y_j e^{u(y)}) = \frac{128}{c} \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y|^2}{\left(\frac{8}{c} + |y|^2\right)^3}$$

を満たす事から, 優収束定理より

$$\begin{aligned} I_{2,k}(x) &= \frac{b}{2} \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \cdot \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_j} (y_j e^{u(y)}) \Big|_{y=y'} dy' \\ &= -\delta_k \cdot \frac{b}{2} \sum_{j=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}_k} \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, \delta_k y' + x_k) \cdot y'_j e^{u(y')} dy' \\ &= -\delta_k \cdot \frac{b}{2} \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \cdot \int_{\mathbb{R}^2} y'_j e^{u(y')} dy' + o(1) \right\} \\ &= o(\delta_k) \quad \text{locally uniformly in } x \in \bar{\Omega} \setminus \{x_0\}. \end{aligned}$$

以上より (6) が得られる. さらに楕円型評価より

$$\delta_k^{-1} w_k(\cdot) \rightarrow 2\pi \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial G}{\partial y_j}(\cdot, x_0) \quad \text{in } C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}) \quad (7)$$

となる.

$i = 1, 2$ として, (1) より

$$-\Delta \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \lambda_k V e^{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \lambda_k V e^{v_k} \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega$$

を得る. $h_{i,k} = h_{i,k}(x)$ を

$$-\Delta h_{i,k} = \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \cdot \lambda_k V e^{v_k} \quad \text{in } \Omega, \quad h_{i,k} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の解とすると,

$$w_k \Delta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - h_{i,k} \right) - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Delta w_k = 0 \quad \text{in } \Omega$$

が成り立つので

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ w_k \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - h_{i,k} \right) - \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - h_{i,k} \right) \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \right\} = \int_{\Omega} h_{i,k} \Delta w_k$$

(ここで, ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法ベクトル) となる. 境界条件により,

$$\begin{aligned} \delta_k^{-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial \nu} &= -\delta_k^{-1} \int_{\Omega} h_{i,k} \Delta w_k = -\delta_k^{-1} \int_{\Omega} \Delta h_{i,k} \cdot w_k \\ &= \delta_k^{-1} \int_{\Omega} \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \cdot \lambda_k V e^{v_k} w_k \end{aligned} \quad (8)$$

となる. Fact 3 と (7) より, (8) の左辺の極限は

$$16\pi^2 \sum_{j=1}^2 a_j \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, x_0) \frac{\partial^2 G}{\partial y_j \partial \nu_x}(x, x_0).$$

さらに [5] の Lemma 7 より

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, x_0) \frac{\partial^2 G}{\partial y_j \partial \nu}(x, x_0) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

となるので,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k^{-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial \nu} = -8\pi^2 \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \quad (9)$$

を得る. よって

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k^{-1} \int_{\Omega} \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \cdot \lambda_k V e^{v_k} w_k = 2\pi \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \quad (10)$$

を示すことが出来れば, $i = 1, 2$ に対して

$$\sum_{j=1}^2 a_j \left\{ \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right\} = 0 \quad (11)$$

が得られ, x_0 は $R(x) + \frac{1}{4\pi} \log V(x)$ の非退化臨界点なので, $a_1 = a_2 = 0$ となる.

(10) については, $x_k = (x_{k1}, x_{k2})$ の周りで Taylor 展開

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x_k) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 (x_\ell - x_{k\ell}) \frac{\partial}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x_k) + R_k(x) |x - x_k| \end{aligned} \quad (12)$$

を行い, (8) の右辺に代入して各項の極限を求めることで得られる. ここで $x = (x_1, x_2)$, $R_k(x)$ は剰余項である. 計算の詳細は [10] を参照されたい. 結果を述べると

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x_k) \int_{\Omega} \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_1 \partial x_i}(x_k) \int_{\Omega} (x_1 - x_{k1}) \cdot \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 2\pi a_1 \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_1 \partial x_i}(x_0), \quad (14)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_2 \partial x_i}(x_k) \int_{\Omega} (x_2 - x_{k2}) \cdot \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 2\pi a_2 \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_2 \partial x_i}(x_0), \quad (15)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} R_k(x) |x - x_k| \cdot \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 0 \quad (16)$$

となる. 特に (14), (15) については

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x_\ell - x_{k\ell}) \cdot \lambda_k V e^{v_k} w_k &= - \int_{\Omega} (x_\ell - x_{k\ell}) \Delta w_k \\ &= - \int_{\partial\Omega} (x_\ell - x_{k\ell}) \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \end{aligned}$$

($\ell = 1, 2$) であるので

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log V}{\partial x_\ell \partial x_i}(x_k) \int_{\partial\Omega} (x_\ell - x_{k\ell}) \delta_k^{-1} \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \\ &\rightarrow - \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_\ell \partial x_i}(x_0) \cdot 2\pi \sum_{j=1}^2 a_j \int_{\partial\Omega} (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial^2 G}{\partial \nu_x \partial y_j}(\cdot, x_0) \end{aligned} \quad (17)$$

となる. (17) の右辺の積分は次のように計算される.

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial^2 G}{\partial \nu_x \partial y_j}(x, x_0) \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left\{ (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \right\} \\
&= \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left\{ (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \right\} + \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \Delta \left[(x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \right] \\
&= \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left\{ (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \right\} + 2 \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\ell \partial y_j}(x, x_0) \\
&= \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left\{ (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \right\} - 2 \int_{\partial B_r(x_0)} \nu_\ell \frac{\partial G}{\partial y_j}(x, x_0) \\
&= \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left\{ (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} \right]_{y=x_0} \right\} \\
&\quad - 2 \int_{\partial B_r(x_0)} \nu_\ell \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} \right]_{y=x_0} + o(1), \quad (r \downarrow 0). \tag{18}
\end{aligned}$$

ここで $r = |x - x_0|$ とすると, (18) の右辺第一項は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left\{ (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} \right]_{y=x_0} \right\} \\
&= \frac{x_\ell - x_{0\ell}}{2\pi r} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \log \frac{1}{|x - y|} \Big|_{y=x_0} + r \frac{\partial^2}{\partial r \partial y_j} \log \frac{1}{|x - y|} \Big|_{y=x_0} \right\} \\
&= \frac{(x_\ell - x_{0\ell})(x_j - x_{0j}) - (x_\ell - x_{0\ell})(x_j - x_{0j})}{2\pi r^3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

また, 第二項は

$$\begin{aligned}
-2 \int_{\partial B_r(x_0)} \nu_\ell \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - x_0|} \right]_{y=x_0} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{(x_\ell - x_{0\ell})(x_j - x_{0j})}{r^3} \\
&= \begin{cases} -1 & (\ell = j) \\ 0 & (\ell \neq j) \end{cases}
\end{aligned}$$

となるので (14), (15) が得られ, (10) を得る. よって $a_1 = a_2 = 0$.

残る $b = 0$ については, [5] に従うことで得られる.

参考文献

- [1] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991) 1223-1253.

- [2] Chen, C.-C., Lin, C.-S., *On the symmetry of blowup solutions to a mean field equation*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non lineaire **18** (2001) 271-296.
- [3] Chen, W., Li, C., *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63** (1991) 615-622.
- [4] Gidas, B., Ni, W.-M., Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979) 209-243.
- [5] Gladiali, F., Grossi, M., *Some results on the Gel'fand problem*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004) 1335-1364.
- [6] Li, Y.Y., *Harnack type inequality: the method of moving planes*, Comm. Math. Phys. **200** (1999) 421-444.
- [7] Ma, L., Wei, J.C., *Convergence for a Liouville equation*, Comment. Math. Helv. **76** (2001) 506-514.
- [8] Nagasaki, K., Suzuki, T., *Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially dominated nonlinearities*, Asymptotic Anal. **3** (1990) 173-188.
- [9] Pohozaev, S., *Eigenfunctions of the equation $-\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Soviet. Math. Dokl. **6** (1965) 1408-1411.
- [10] Sato, T., Suzuki, T., *Asymptotic non-degeneracy of the solution to the Liouville-Gel'fand problem in two dimensions*, Preprint.
- [11] Sato, T., Suzuki, T., *Convexity and uniqueness of the solution to the Liouville equation*, Inter. J. Pure Appl. Math. **23** (2005) 1-21.
- [12] Suzuki, T., *Semilinear Elliptic Equations*, Gakkōtoshō, Tokyo, Japan, 1994.