

Global Knots の Conjugation と Prime 分解

東大 理 宮崎 桂

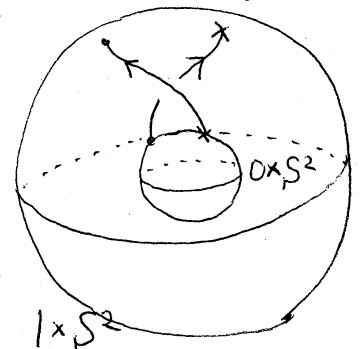
(Katura Miyazaki)

S^3 の knot がただ一通りの prime 分解を持つことはよく知られている。しかし、一般の 3 次元多様体^体の knot については “prime knot” はしばしば定義されるが (e.g. Gordon-Litherland [1]) prime 分解自体は調べられていないようだ。closed, oriented 3-mfd の oriented knot の prime 分解については次の定理が成立する。(言葉の正確な定義は §1 参照)

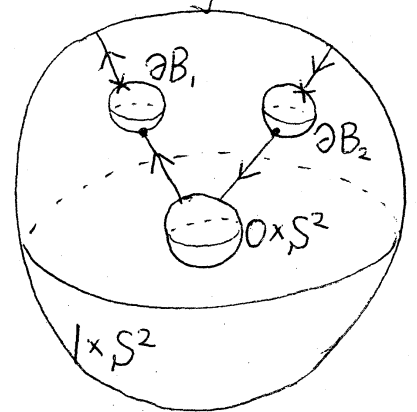
定理 1 (存在条件) nontrivial knot $\mathcal{K} = (M, K)$ が prime 分解をもつ必要十分条件は、meridian m ($\subset \partial N(K)$) が exterior $M - \text{Int} N(K)$ で essential なこと。

この定理は Haken の有限性定理 と innermost disk argument によりたやすく示される。([1] の section 1 に全ての link が prime 分解を持つと書いてあるのは誤り)。分解の規則を述べるには、§2 で定義される knot とうしの conjugation という概念が必要になる。さらに、prime knot $\mathcal{R}$ と $\mathcal{U}$ を次のように定義する。

$\mathcal{R}$ を $S^1 \times S^2$ の knot で、 $(I \times S^2, I \times \{p_1, p_2\})$ から $0 \times S^2$ と $1 \times S^2$ を同一視して得られるものとする。



$2 S^1 \times S^2$ の knot $\mathcal{U}$ は次のように定める。2つの circle $t_1 \equiv S^1 \times p_1, t_2 \equiv S^1 \times p_2 (\subset S^1 \times S^2)$ に逆の向きを入れる。 $B_1, B_2 (\subset S^1 \times S^2)$ を $(B_i, B_i \cap t_i)$ が trivial ball pair かつ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ にとる。そして $(S^1 \times S^2, t_1 \cup t_2)$ から B_1, B_2 を取り除き、できた境界 $(\partial B_i, \partial B_i \cap t_i) i=1, 2$ を orientation reversing homeo. で同一視して得られる knot が $\mathcal{U}$ である。



定理2 $\mathcal{K}$ を prime 分解を持つ knot とする。

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \cdots \# \mathcal{K}_t \# n\mathcal{R} \# m\mathcal{U} \# (N, \phi)$$

$$= \mathcal{K}'_1 \# \cdots \# \mathcal{K}'_{t'} \# n'\mathcal{R} \# m'\mathcal{U} \# (N', \phi) \text{ を } \mathcal{K}$$

の prime 分解とする。ただし、 $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}'_i$ は $\mathcal{R}$ でも $\mathcal{U}$ でもない prime knot、 N, N' は 3-mfd。このとき次が成立する。
(の1)~3)

1) $t = t'$ 。 $\mathcal{K}_i$ は $\mathcal{K}'_i$ の conjugation (up to order)

2) $n + 2m = n' + 2m'$ 。もし $n = 0$ なら $n' = 0$ かつ

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{K}'_i \text{ (up to order).}$$

3) $N = N'$ 。

系 knot $\mathcal{K}$ が $\mathcal{R}$ を factor に含まない prime 分解を持てば、それが $\mathcal{K}$ の唯一の prime 分解である。

定理3 $\mathcal{K}_1$ が $\mathcal{K}_2$ の conjugation なら、 $\mathcal{R} \# \mathcal{K}_1 = \mathcal{R} \# \mathcal{K}_2$ 。特に、 $\mathcal{R} \# \mathcal{R}$ は $\mathcal{U}$ の conjugation なので $\mathcal{R} \# \mathcal{R} \# \mathcal{R} = \mathcal{R} \# \mathcal{U}$ 。

定理2, 3 から prime 分解は “conjugation” の範囲で多意性を持つことがわかる。本稿では conjugation の説明に主眼をおき、定理の証明については §3 でアイデアを述べ

るにとどめる。

くわしくは preprint [2] を参照のこと。

§1 M を closed, oriented 3-mfd, $K \subset M$ を oriented circle とした時、対 (M, K) を knot と呼ぶ。 K のことを knot と呼ぶこともある。2つの knot は、その間に orientation preserving homeo. があるとき同じものとみなす。

2つの knot $\mathcal{K}_i = (M_i, K_i)$ $i=1, 2$ の和 $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ は対 $(M_1, K_1) \# (M_2, K_2)$ で def する。

$\mathcal{K} = (M, K)$ が trivial knot $\xLeftrightarrow[\text{def}] K$ に embedded disk がはれる。

$\mathcal{K}$ が prime knot $\xLeftrightarrow[\text{def}] \mathcal{K}$ は nontrivial knot で、任意の分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ に対して $\mathcal{K}_1$ or $\mathcal{K}_2$ は S^3 の trivial knot.

この定義によると、prime knot の exterior は irreducible 3-mfd.

分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \dots \# \mathcal{K}_n \# (N, \phi)$, N は 3-mfd, は $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ が prime knot のとき、prime 分解と呼ぶ。

§2 X を connected, oriented 3-mfd で $\partial X = T_1 \cup \dots \cup T_n$ は n 個の torus、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を $\alpha_i \subset T_i$ なる essential oriented circle とする。対 $(X, \bigcup_{i=1}^n \alpha_i)$ から次のように

knotを構成する。

構成 1 (V_1, a_1) (V_2, a_2) を trivial ball pair とする。
 orientation revers. embedding $f: \bigcup_{\text{disjoint}} N(\alpha_i) \longrightarrow \partial V - \partial a_1$ を
 $lk_{V_1}(f(\alpha_i), a_1) = +1$ になるようにとる。この時
 $M = X \bigcup_f V_1$ とおくと $\partial M = S^2$, arc a_1 は M に properly
 embedded. よって $(M, a_1) \cup (V_2, a_2)$ は knot $\mathcal{K}$
 を与える。 $(\partial M, \partial a_1) = (\partial V_2, \partial a_2)$

この $\mathcal{K}$ は $(X, \cup \alpha_i)$ と f に依存しているようだが、実は
 f のとり方にはよらないことが次からわかる。

構成 2 上で作った $\mathcal{K}$ を再構成する。

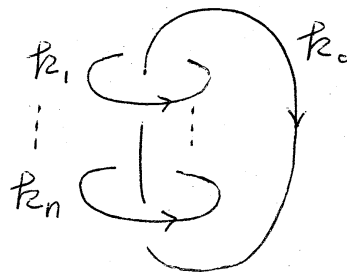
$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= (M, a_1) \cup (V_2, a_2) \\ &= (X \bigcup_f (V_1, a_1)) \cup (V_2, a_2) \\ &= X \cup ((V_1, a_1) \cup (V_2, a_2)) \quad \text{と書ける。} \end{aligned}$$

$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 - \partial X$ は n 個の annulus と 2 個の disk
 $N(\partial a_1)$ からなる。 (V_i, a_i) は trivial ball pair なので $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{K}_i$
 を図のような S^3 の link とすると、 $(V_1, a_1) \cup (V_2, a_2) =$
 $(S^3 - \bigcup_{i=1}^n N(\mathcal{K}_i), \mathcal{K}_0)$ となる。

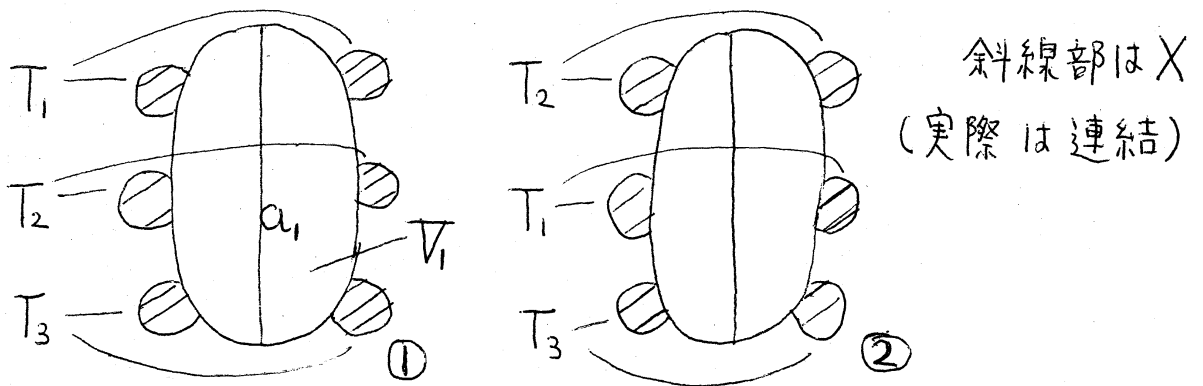
$$(C_n, \mathcal{K}_0) = (S^3 - \bigcup_{i=1}^n N(\mathcal{K}_i), \mathcal{K}_0) \quad \text{とおく}$$

$$\mathcal{K} = X \bigcup_{\partial X = \partial C_n} (C_n, \mathcal{K}_0)$$

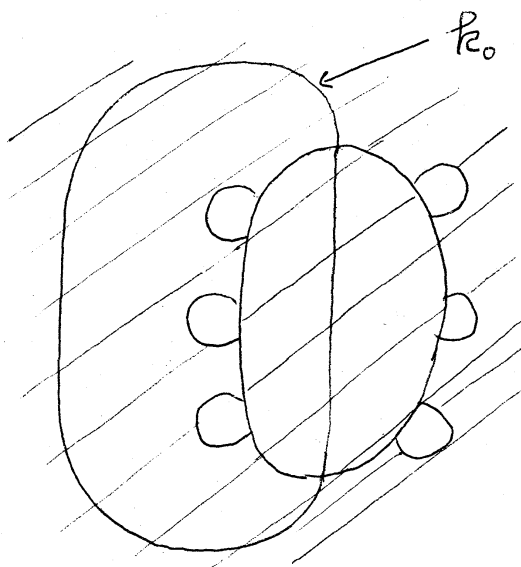
と書ける。



この union U は f から induce される orientation rev. homeo $\hat{f}: \bigcup^n T_i \rightarrow \bigcup^n \partial N(k_i) = \partial C_n$ で定められる。(この時、 $lk_{C_n}(\hat{f}(\alpha_i), k_i) = +1$, $lk_{C_n}(\hat{f}(\alpha_i), k_j) = 0$ となる)。
 $\forall i \neq j$ に対して (C_n, k_0) の orientation $\underbrace{= 0}_{\text{for } \forall i, j}$
 pres. autohomeo g で $g(\partial N(k_i)) = \partial N(k_j)$, $g(\partial N(k_j)) = \partial N(k_i)$, $g|_{\partial N(k_l)} = id$ for $l \neq i, j$, となるものがあるので $\mathcal{K}$ は f のとり方にはよらない。(下図も参照せよ)



f のとり方により (M, α_1) の断面図は ① にも ② にもなる。



$\mathcal{K} = (M, \alpha_1) \cup (V_2, \alpha_2)$ の断面図。斜線部は C_3
 (M, α_1) が ① でも ② でも $\mathcal{K}$ は同じになる。

定義 上の $(X, \bigcup_{i=1}^n \alpha_i)$ を K の degree n の inducing-pair と呼ぶ。 $(X, \bigcup_{i=1}^n \alpha_i)$ は K の inducing-pair、 $(X', \bigcup_{i=1}^n \alpha'_i)$ は K' の inducing-pair とする。もし $X = X'$, かつ 各 i ごとに α_i が α'_i or $-\alpha'_i$ に ∂X で isotopic (up to order) ならば、 K は $(X, \bigcup_{i=1}^n \pm \alpha_i)$ を介して K' の conjugation であるという。略して K は K' の conjugation と呼ぶ。

注意 任意の knot $(M, K) = K$ について、 $\overbrace{E(K)}^{E(K)}$ と meridian $\underbrace{m}_m$ (ただし oriented s.t. $lk(K, m) = +1$) との対 $(E(K), m)$ は K の inducing-pair になる。 $(E(K), -m)$ は $(M, -K) \equiv -K$ の inducing-pair なので、 K は $-K$ の conjugation。

§3 最後に conjugation や inducing pair が どのように prime 分解にかかわってくるかをみる。

簡単のため、knot $K = (M, K)$ が $K = K_1 \# K_2$, $K = K'_1 \# K_2$ という 2通りの prime 分解を持つとする。このとき K と 2点で横断的に交わる separating 2-sphere S, S' があり、

$$(M, K) = (M_1, a_1) \bigcup_S (M_2, a_2) \quad \text{s.t.} \quad (M_i, a_i)^\wedge = K_i$$

$$= (M'_1, a'_1) \bigcup_{S'} (M'_2, a'_2) \quad \text{s.t.} \quad (M'_i, a'_i)^\wedge = K'_i$$
 となっている。

目標 K_1 は K_1' の conjugation (up to order).

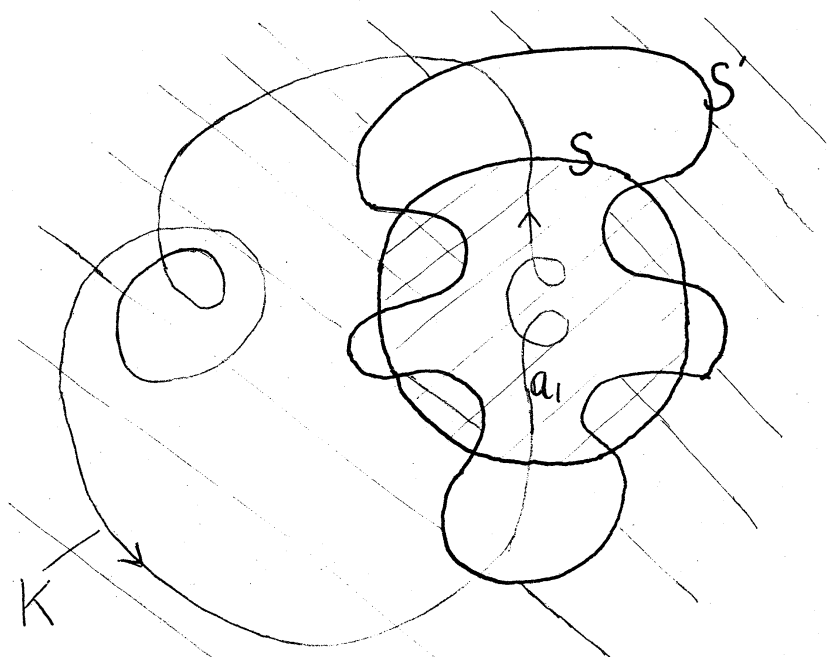
証明方針 議論をやさしくするため、いくつか都合のいい仮定をおく。

仮定 1 S' は次の条件をみたす位置まで isotopy で動かせる。
 1° S' と S は横断的に交わる 2° $S' \cap \alpha_1 = \emptyset$ 3° $S' \cap S$ は $\underbrace{\partial S - \partial \alpha_1}_{\text{および } \partial S' - \partial \alpha_1'}$ に含まれる essential circle からなる。

この結果 $S' \cap M_1$ は $\emptyset$ または いくつかの annulus からなる。 $\emptyset$ ならば $M_1 \supset M_1'$ として一般性を失わないので $K_1 = K_1'$ 。以下 $\emptyset$ でないとする。

仮定 2 $M - S'$ は 2 つの連結成分 X, V からなる。
 さらに $X \neq S' \times D^2$, $\partial V = S^2$ である。

仮定 1, 2 の結果 ∂X は いくつかの torus からなり、
 S, S', K の関係は断面図で次のページの図のようにかける。
 $K_1 = (X \cup \underbrace{(V, \alpha_1)}_{2 \text{ annuli}})^{\wedge}$ とかけることに注意せよ。もし (V, α_1) が trivial ball pair ならば (仮定 3), K_1 は $(X, \alpha_1 \cup \alpha_2)$ を inducing pair に持つ。ただし、 α_1, α_2 は 2 つの annulus $\partial X \cap \partial V$ の core で $\text{lk}_V(\alpha_i, \alpha_1) = +1$ となるよう向きづけたもの。



/// 部分 M_1 , $\\ \\$ 部分は M'_1 として一般性を失わない。 $\\ \\$ 部分は X : connected

$\mathcal{K}_1$ と同じことを $\mathcal{K}'_1$ についても考える。 $\nabla' = M'_1 - \text{Int } X$ とおくと $\mathcal{K}'_1 = (X \cup (\nabla', a'_1))^\wedge$ は (∇', a'_1) が trivial ball pair ならば (仮定 3'), $(X, \alpha'_1 \cup \alpha'_2)$ から induce される。 (α'_1, α'_2) は α_1, α_2 と同様に定める。 $\alpha_1 \cup \alpha_2$ と $\alpha'_1 \cup \alpha'_2$ は 2 tori の X 上で向きを無視して isotopic。故に $\mathcal{K}'_1$ は $(X, \pm \alpha_1 \cup \pm \alpha_2)$ を介して $\mathcal{K}_1$ の conjugation とわかる。□

以上のように、innermost argument を途中であき

らめるのがミソである。実際には、仮定 1 は innermost で常に成立し、仮定 3 も K_1 や K_1' の primeness と $X \neq S^1 \times D^2$ の仮定により常になりたつ。しかし仮定 2 は必ずしも成立せず 図のような簡単な関係になるとはかぎらない。それでも innermost の議論は仮定 1 を示す以上には用いない。くわしくは [2] をみて下さい。Th 2, 3 の $\mathcal{K}$ や $\mathcal{U}$ を考える必要もそこから生じます。

References

- [1] C. McA. Gordon and R.A. Litherland, *Incompressible surfaces in branched coverings*, The Smith conjecture, Acad. Press.
- [2] K. Miyazaki, *Conjugation and the prime decomposition of knots in closed, oriented 3-mlds*, preprint.