

数学II「微分の考え」における『極限を用いない微分法』を用いた指導の可能性の検討

東京理科大学大学院・科学教育研究科 山口 直也

Naoya Yamaguchi

Graduate School of Mathematics and Science Education

Tokyo University of Science

東京理科大学理学部・科学教育研究科 清水 克彦

Katsuhiko Shimizu

College of Science

Graduate School of Mathematics and Science Education

Tokyo University of Science

1 はじめに

おそらく高等学校レベルの微積分のカリキュラムは、数学教育の現代化以降、区分求積法の取扱いなどを除いて、ほとんど変更されずに教え続けられていると思われる。それが、一つのスタンダードとして多くの人々に微積分のカリキュラとして受け取られていると思われる。大学初年級における解析学教育でも、それは同様であると思われる。しかしながら、米国においては微積分教育では、Steen Steen の "Toward A Lean and Lively Calculus" をはじめとする MAA による一連の刊行物において示されるように、大きな改革が進められている。"Calculus Reform" と呼ばれるこの大学初年級における解析学教育の改革は、各専攻向けの微積分のカリキュラムの在り方の見直し、アクティブな教授法の採用、テクノロジーの活用の推進、学部レベルでのミニ研究など様々な面で進められている。これと比べると、日本の大学における解析学のカリキュラムと教育の見直しは、各大学によって個別に行われ、筆者らの知るかぎり大きな動きにはなっていないようである。また、高校の微積分のカリキュラムと教育に関しては、ほとんど手つかずの状態であると言える。

このようななか筆者らは、極限過程の扱いに関する一つのカリキュラムと指導法の研究を行った。極限過程を扱わない、もしくは極限過程を先送りにする微積分の導入カリキュラムは、通常の解析学の教育を受けた人たちにとって、受け入れがたい、もしくは奇異にうつる微積分のカリキュラムであろう。しかし、数学史の研究を見るとイプシロン・デルタ論法による整備の前には、様々な数学者が極限過程に踏み込まずに接線概念や微分概念の定式化を行っていた。歴史的にみると、そのような扱いは現代の数学の中では忘れ去られ扱われないものとなっており、また、その存在自体も触れられることがないものとなっている。しかし、それ自体を「教育」という観点で見直すことによって、新たな光をあてることができるのではないかとと思われる。また、現代においても、大学の初年級の解析学の教育を行っている人の中に、そのようなコースや教科書を作成

し、実行する人たちがいることが分かってきた。本稿では、それらを踏まえて、極限過程の扱いに関する一つのカリキュラムと指導法の検討を行った成果を報告する。

2 研究意図・目的

微積分学は現代の数学・社会を支える重要な学問の一つである。現代の微積分学は「極限」をもとにして成立・発展している。高等学校数学科における微分法・積分法も極限をもとに指導が行われており、微分に関しては次のような指導順で行われる。

1. 数学 II「微分の考え」
2. 数学 III「極限」
3. 数学 III「微分法」

数学 II「微分の考え」において初めて微分が指導され、微分係数を学ぶ。微分係数は平均変化率の極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ として指導され、極限を用いた指導が行われる。その後、「 $f(x) = x^3$ のとき、 $x = a$ における微分係数を微分係数の定義に従って求めなさい。」のような問題を通じて演習が行われるが、この演習は微分係数の式に具体的な関数を代入し、除算等の式整理を行い、最後に h に 0 を代入する、といった代数的操作が行われる。従って、数学 II「微分の考え」において極限は代数的操作であるということが出来る。また、数学 III を履修しない生徒にとっては、極限を学習していないにもかかわらず極限操作をしており、極限に対する誤解を与えることを危惧している。

その後、数学 III「極限」において無限や連続性といった極限の新しい概念を学ぶ。ここでの代表的な問題は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ であるが、これは代数的操作で解くことはできない。またこの証明には円の面積を用いているが、これが循環論法であるという指摘もある。

数学 II「微分の考え」での代数的操作としての極限と数学 III「極限」での概念的操作としての極限の間には異種操作性があり、これが極限の理解を複雑にしているのではないかと考えた。その結果、極限を用いて指導される微分法もまた十分な理解がなされず、単なる計算の道具として使われてしまっているのではないかと考えた。これらのことより、極限を理解しないと微積分学を理解できないのだろうかという点に興味を持った。

一方、極限に関する十分な議論が必要であるのは大学レベルの数学科などごく一部であると考えた。高等学校における極限の異種操作性が、大学レベルの極限の理解を妨げてしまうのではないかと考えた。そこで、極限に関する十分な議論を大学で行えるよう、高等学校における極限指導を廃することができないかと考えた。

数学 II「微分の考え・積分の考え」においては、「微分の考え」の微分係数の定義のみで極限が扱われていることに着目した。微分係数を極限を用いない別形式で指導することで、数学 II「微分の考え」において極限を用いる必要性がなくなる。さらにこの別形式で数学 II「積分の考え」との関連性を見出すことができれば、数学 II で要求される微積分は極限が不要になる。加えて、数学 III「微分法・積分法」でも同様に関連性を見出すことができれば、高校数学において極限の指導が必要なくなり、これを廃することが

できる。また、高等学校における微積分学へのスムーズな理解を促すこともできるのではないかと考えた。

本研究では数学 II「微分の考え」に焦点を当て、これを極限を用いない微分法を用いて指導することが可能であるかの同定を行う。本稿では

- 極限を用いない先行研究の紹介と手法の選定
- 選定した手法に対する考察と動的数学ソフトウェアを用いた教材検討

について述べる。

3 極限を用いない先行研究の考察と手法の選定

3.1 1970 年代以降の極限を用いない先行研究

3.1.1 幾何的なアプローチ

- 関数のグラフの点の包含

Traylor, Roman[15] は R.L. Moore¹ の微分の定義を次のように要約した。

m が G 上の点 A における、単純グラフ G の傾きであるということは、

1. h, k が間に A を含むような垂線ならば、 G のいくつかの点は h, k の間にある
2. L が A を含み、傾きが m であるならば、 α が A と α の内側のにある L 上の点を頂点するような鋭角であれば、 A を除く、垂線 h, k の間にある G 上のすべての点が α 、もしくは α に垂直な角度の内側にあるような、 A を間に含む垂線 h, k が必ず存在する、ということが言える。

Traylor, Roman[15] は「生徒が既に習得をしていたり、簡単に達成できるレベルのもので関数のグラフを経験させることがよいということがわかる。」[15, p.2] という発想からこの定義を幾何的に表すことで確立し、さらにグラフ電卓を用いることで生徒のより良い理解を促すことを考えた。

図 3.1.1 は Moore の定義を $y = x^2, x = 0$ で図示したものである。この 2 垂線を近づけることで接線に近似できる。図 3.1.1 は Moore の定義を $y = x^2, x = 2$ で図示したものである。2 垂線を決定することができれば、その 2 垂線をグラフ電卓の両端に来るように拡大をすることで再び 2 垂線を決定することができる。このように拡大機能を繰り返し利用することで、生徒は接線を決定することができる。

- 比較車・比較関数

Marsden, Weinstein[8] は自動車の追い越しの様子を見ることで微分の導入を図っ

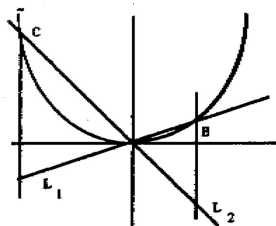
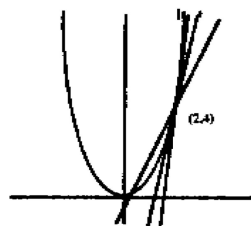
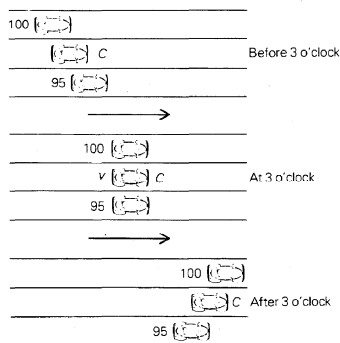
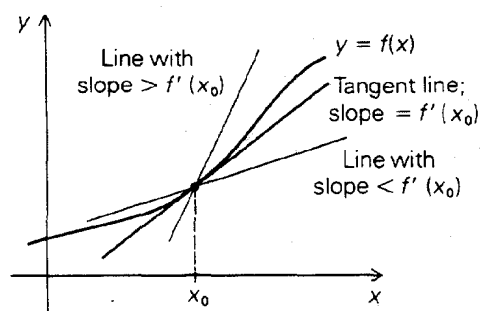
図 1: $y = x^2, x = 0$ 図 2: $y = x^2, x = 2$ 図 3: 車 C と比較車

図 4: 速度のグラフ化

た. 時刻 t に車 C が車 T_1 に追い越され, 車 T_2 を追い抜いた時, 時刻 t における車 C の速度は車 T_1 の速度より遅く, 車 T_2 より速い, という現象を元に微分の導入を行った.. この時の T_1, T_2 を比較車と呼び, 比較車の台数を増やすことで車 C の速度を挟みこむことでより正確に測定できると考えた. 車の速度を関数とみなし, グラフに書き表すことで視覚化し, 関数の接線というイメージを導出した.

これは幾何的にイメージしやすく, 関数のグラフに表すことで定義を導くことができる. この後「急速零関数」を利用して, ベキ乗則や連鎖律などの多項式関数の各種公式を導出をしており, 教育への応用可能性が見込まれる.

● グラフ電卓

Invernizzi, Rinaldi[4] はグラフ電卓を利用した手法を考案した. これは, 曲線と接線が 1 点で接するという関数のグラフの様子を元に, 「曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = r(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ がグラフ電卓上で区別されなくなった時, その点における曲線の傾きがわかる」[4] ということをグラフ電卓の拡大機能を用いて確認した. グラフ電卓の解像度が有限であるという点において極限を用いていない.

グラフ電卓は Traylor[15] の手法でもよりよい理解のために用いており, イメージの定着のために一定の効果はありそうである. しかしながら, グラフ電卓を主体にしてしまうと代数的には数値計算的な意味合いが強くなってしまい, 高等数

¹Moore, R.L, (1972). *The R. L. Moore collection*. The General Libraries, University of Texas at Austin, Center for American History, Box 39, Austin, Texas.

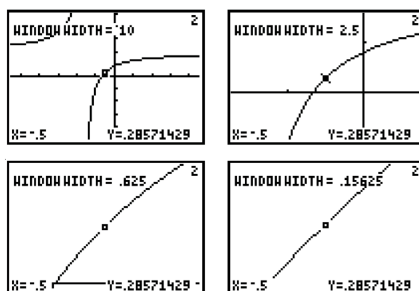


図 5: $f(x) = (6x + 4)/(3x + 5)$

学の範疇ではなくなってしまうことを危惧した。

3.1.2 代数的なアプローチ

● 超実数

Leibniz は「0 ではないがどのような有限量よりも小さい数」と定義された無限小量を用いて微積分学の構築を行った。無限小量を用いた手法は、最終的に無限小量を 0 と見なすのか見なさないのか、等数学的に曖昧な部分があったが、初めて微積分学において超越関数が扱える手法ということで広く浸透した。その後、Weierstraß の ϵ - δ 論法の発表により極限という確固たる学説が生まれ、これが微積分学に利用され、無限小量は数学界から追放された。

その後無限小量は Abraham Robinson² により、無限小等の超実数を含めた拡大実数体を元に超準解析という学問に発達した。この手法は現在も研究されているが、高校生にとっては導入がやや難解であると考ええる。一方、米国ではこの超準解析を元にしたテキスト³を用いた実践授業⁴で極限よりも生徒によりよい理解を促したという結果も報告されている。また、前述した比較車・比較関数もある種の超準解析であり、教育への応用に期待ができると考えられる。

● 連立方程式

Sedinger[13] は「曲線上の一点を通過する直線が接線である」[13, p.55] ということに着目をした。この時、曲線の式と曲線上の 1 点は既知であるため、直線の傾きさえ決定できれば接線を求めることができ、この時決定できた傾きが微分係数であるということが出来る。そこで、曲線の式と接線の式を連立させ、未知数である傾きが一意に決められればよいとした。この定義は非常にわかりやすく、特定の点を通る傾きが定まった直線の式を求めることは生徒は既知であるため有用

²Robinson, Abraham (1966), *Non-standard analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press

³H. Jerome Keisler, *Elementary calculus: an approach using infinitesimals*(2000)

⁴Kathleen Sullivan, The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach, *Amer. Math. Monthly*, **83**(5) (May 1976) pp.370-375

性が高いと考えられるが、凸関数にしか適用することができない。従って、この手法は教育への応用は難しいと考える。

● 重根

Brand[1] や French[2] は曲線と接線が1点で交わる点は重根を持つという代数的な考え方を元に、係数比較と帰納法で x^n の導関数 [2], 多項式関数の導関数の一般式 [1] を導出した。

McAndrew[9] は多項式関数の導関数に加え、線形性、積の法則、連鎖律、逆数、商の法則、 n 乗根の一般的な微分の結果を導くことに成功した。Sangwin[12] はテイラー展開を用いてこれらをより簡単に行う手法を提唱した。

重根を用いることで単なる計算だけでなく、微分に関する法則の一般化までも行えるという点で、重根は拡張性が高いと考えられる。しかし、重根は超越関数に適用することができないという問題点がある。従って、数学 II では有用性があると考えられるが、別のアプローチも行わないと数学 III への拡張ができない。

3.2 考察

代数的なアプローチは拡張性があるが、操作が主体で理解を伴わない恐れがある。一方、幾何的なアプローチは視覚化できることでよりよい理解を促すことができると考えられる。本稿では微分を未習の生徒を想定し、導入としてのよりよい理解を促すことに着目し、「グラフ電卓」「比較車・比較関数」の有用性について考察を行う。

4 選定した手法の考察とソフトウェアを用いた教材検討

4.1 グラフ電卓

グラフ電卓は拡大をすることで曲線が直線になるという *limit-free* の性質を利用して接線の導入を行う。拡大を繰り返すことで曲線が直線になるということは直観的であり、生徒に理解を促すことができると考えられる。

この拡大機能を用いた手法は解像度に依存する為、例えばグラフ電卓 (図5) のような解像度の荒いものではすぐに接線を発見できるが、パソコン (図6) のような解像度の細かいものでは拡大を繰り返す回数が増えてしまうため、拡大をする作業と誤解される恐れがあると考えられる。従って、グラフ電卓のような解像度が比較的荒いものの方がよりよい理解を促せると考える。

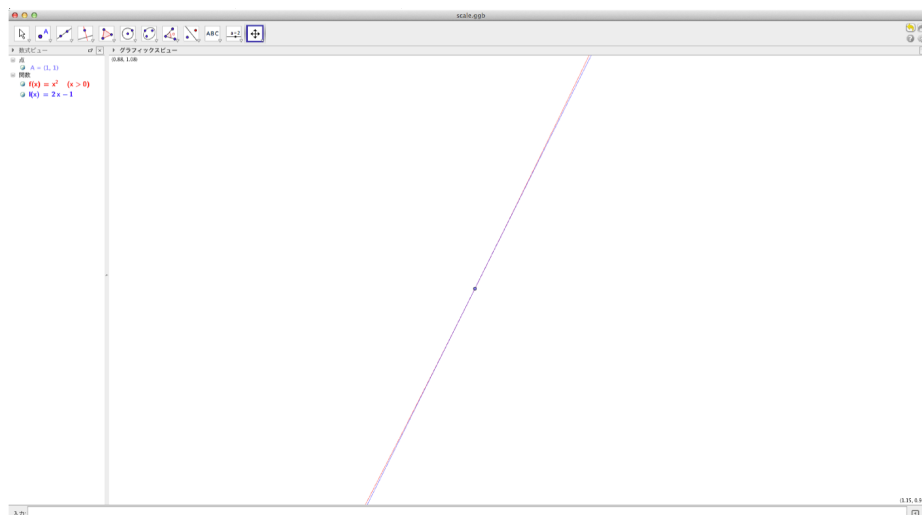


図 6: GeoGebra 上での曲線と接線の拡大 (256 倍)

4.2 比較車・比較関数に関する考察

4.2.1 教科書に関する考察

極限を用いないアプローチの教科書はいくつか存在する⁵が、その中でも比較車・比較関数の概念が記された, Jerrold Marsden and Alan Weinstein(1981), *Calculus unlimited*, Benjamin-Cummings Publishing Co. は, 極限を用いないアプローチを記した教科書として 2 番目のものである⁶と言われている. *Calculus Unlimited* は極限を用いない手法のアプローチ, 並びに教育的なアプローチによる微積分開発の代表的なテキストの一つであり, これを日本の教育に適応させることを考察することは価値があると考えた.

本稿では数学 II「微分の考え」に焦点を当てているため, これと関連性が見いだせた「Chapter1. The Derivative」と「Chapter2. Transitions and Derivatives」の一部について考察を行う.

4.2.2 符号変化

比較車・比較関数を考える上の基本的な定義となる符号変化について考察を行う.

x 軸の一方からもう一方にグラフが交わるとき, 関数の符号が変化するという. 例えば, x 軸の上から下に関数のグラフが横切るとき, 正から負に符号変化と呼ぶ. 符号変化が起きるときの x を符号変化点と呼ぶ. 例として $y = x^2 - 5x + 6$ を考える. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ なので, $x = 2, 3$ が符号変化点である. 因数の符号を見ることで, $x = 2$ は正から負に変化する符号変化点, $x = 3$ は負から正に変化する符号変化

⁵H. Jerome Keisler(1976), *Elementary calculus: an approach using infinitesimals*, Dover Publications 等

⁶1 番目のものは Serge Lang(1973), *A First Course in Calculus*, Springer であるがこれは指導範囲が限定されており, 純粋な微分法に関しては *Calculus Unlimited* が初めてである.

点とわかる．関数のグラフを書くこと無く，式変形のみで関数の様子が見いだせるのが符号変化の利点である．また，関数の符号変化点を見つけるためには関数の因数分解が必要であるが，因数分解という手法は数学 II「いろいろな式」において獲得済みである．

この符号変化は，2つの関数の様子を見る際に強力なツールとなる．例として2つの関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$, $g(x) = x^2 - 1$ の関係を考える． $f(x), g(x)$ のそれぞれを因数分解し，関数のグラフとして表すことでも比較ができるが，先ほどと同様グラフを書かずに考える方法を考える．そこで，2つの差関数 $f(x) - g(x)$ の符号変化を調べる． $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2(x - 2)$ となる．ここで， x^2 は $x > 0, x < 0$ どちらに対しても正となるので符号変化は起きない．従って，符号変化点は $x = 2$ の時のみであり， $x = 2$ において差関数は負から正に符号変化する．言い換えると， $x < 2$ において $f(x) - g(x) < 0$ ，つまり $f(x) < g(x)$ ($x = 0$ において等号成立) であり， $x > 2$ では $f(x) > g(x)$ である．以上より，2つの関数の関係を見出すことができた．

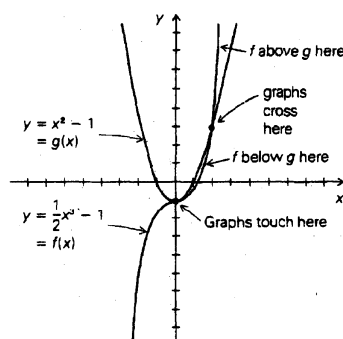


図 7: $f(x), g(x)$ の様子

因数分解のみで2つの関数の関係を見いだせた点に留意しておく．

4.2.3 速度推定

実験車のある時刻における速度は2台の比較車を比較することで「推定」することができる（図3）．これは日常的な現象を考察できるという点で，より簡単に理解することができると考えられる．さらに速度という概念は生徒は日常的にも理解しており，また速度が関数のグラフに表せることや，関数のグラフの接線が瞬間の速さであることは既に獲得している（図4）．

4.2.4 導関数の定義

実験車の位置を表す関数を $f(x)$ とする．時刻 x_0 に $f(x_0)$ を通過する比較車の位置は $l(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ である（ m は比較車の速度である）．この式は，傾きを m とすれば与えられた関数のグラフの上の1点を通る式なので，数学 II において既習である．さらに，幾何的には $(x_0, f(x_0))$ を中心に回転する直線である．つまり $(x_0, f(x_0))$ を中心

に回転させることで、負から正へ符号変化、正から負へ符号変化する両方の様子を見ることができる。この直線の変化の様子を見ている途中に、符号変化がおこらない唯一の場合が存在することが見て取れる。これが接線であると定義することができる。

このことを速度推定の観点から考察する。 x_0 における実験車の速度を m_0 とする。すると、実験車を追い抜く比較車の速度 m は $m > m_0$ である。つまり、 $m > m_0$ では x_0 において直線 $l(x)$ は $f(x)$ を下から上に横切る。言い換えれば、 x_0 において $f(x) - l(x)$ の符号が正から負に変化する。同様に実験車に追い抜かれる比較車の速度 m は $m < m_0$ である。よって $m < m_0$ では x_0 において直線 $l(x)$ は $f(x)$ を上から下に横切る。言い換えれば、 x_0 において $f(x) - l(x)$ の符号が負から正に変化する。これを満たすような m_0 が唯一存在すれば、そのときの m_0 は唯一符号変化を起こさない傾きである。従ってこれは接線であることがわかる。

以上のことから次のように微分を定義する。

定義

f を x_0 を含む开区間を領域とした関数とする。 m_0 が x_0 における f の導関数であるとは、

1. すべての $m < m_0$ に対して、 x_0 において関数

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]$$

が負から正に符号変化する。

2. すべての $m > m_0$ に対して、 x_0 において関数

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]$$

が正から負に符号変化する。

を満たすような数 m_0 があれば f は x_0 で微分可能といい、 $m_0 = f'(x_0)$ と書く。 f が領域内の任意の点で微分可能であれば、 f は微分可能という。関数の導関数を見つける操作を微分と呼ぶ。

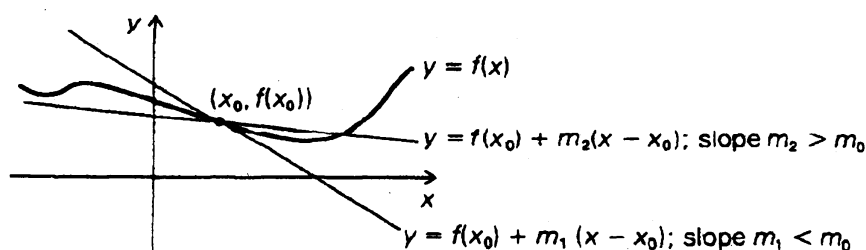


図 8: 速度推定のグラフ化と符号変化

4.2.5 比較関数から遷移概念への応用

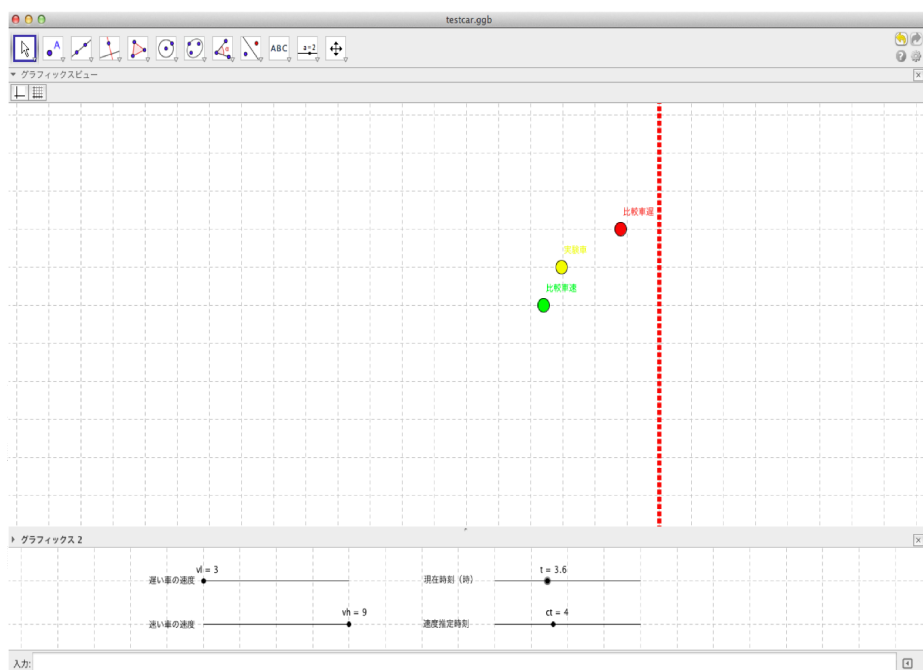
Calculus Unlimited で扱われる手法を身につける為に、遷移という新しい概念の導入を行う。

例えば 0° は水と氷の境目、日の出時刻は昼と夜の境目であるが、このような境目のことを物事が移り変わる点を「遷移点」と呼ぶ。符号変化では「 x_0 において符号が負から正に変わる」という表現を、遷移では「 x_0 は負から正への遷移点である」と表現する。この遷移点は一意である。比較車の追い越しの概念も遷移の概念を用いて表すことができる。

本稿では詳細には触れないが、この遷移という概念と、次に導入される急速零関数という概念を用いることで、極限を用いずに微分法を構築することができる。

4.3 GeoGebra を用いた比較車概念の導入

筆者は先の比較車・比較関数を導入するために、GeoGebra を用いて教材開発を行った。比較車の動きの様子を確認する教材の作成を行った。通過する時間や比較車の速度を調



整できるので、視覚的にもより「正確に」速度推定することができる。さらに、GeoGebra には拡大機能があるので、ある程度まで速度を絞り込んだら、測定をする時刻付近を拡大することでさらに速度を推定することができる。このように拡大、速度の幅を縮める、という作業を繰り返すことで正確な速度を見いだすことができる。

次に、先ほどの様子を関数のグラフに表す教材の作成を行った。関数のグラフと、特定の1点を通る直線の変化の様子を見る為に、実験車を追い越す等速運動をする比較車、実験者に追い越される等速運動をする比較車の2つを関数のグラフとして用意する。各々

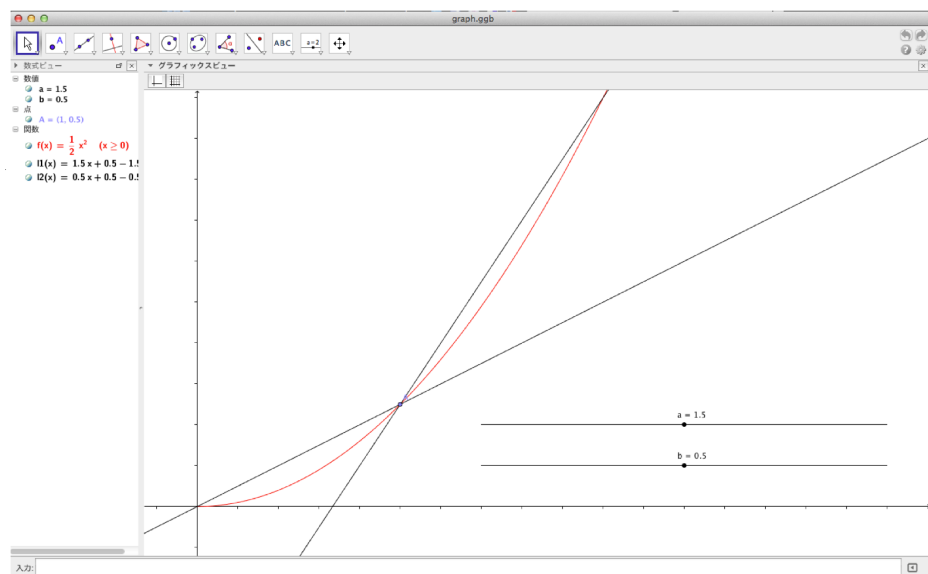


図 10: 符号変化と接線の様子

の比較車を動かすことで、より「正確に」速度推定することができる。さらに、この直線のグラフの位置が逆転するところ迄動くようにしてあるので、片方の直線を隠し、特定の場所で「接線」が存在することをイメージ付けることができる。

5 まとめと今後の課題

本研究は、高等学校における極限の指導を廃止することを目標に、極限を用いる微分法・積分法を、極限を用いずに指導を行うことができるかということに注目した。本稿では数学 II「微分の考え」に焦点を当て、これを極限を用いずに指導できるかを、具体的な手法を示しながら考察を行った。

極限を用いないアプローチのうち、幾何的な手法、代数的な手法の代表的な手法を紹介し、各々について考察を行った。代数的な手法は拡張性はあるが理解を伴わない恐れがある。一方、幾何的な手法は拡張性はないものの、視覚化による「よりよい理解」に着目をし、本稿の目標を達成する為には幾何的な手法が有用であると考えた。その中でも、代数的な手法との関連性が見いだせた「比較車・比較関数」を題材として取り上げ、これについて考察を行い、さらに GeoGebra を用いて教材開発を行うことで実際に指導が可能であるかの検討を行った。

GeoGebra を用いることで視覚的に「よりよい理解」を促せる可能性を見いだすことができたが、実際に指導を行った訳ではない。本稿では視覚化に焦点を当て教材開発を行ったが、実際に生徒にどのように理解を促すことができるかという点が課題である。

参考文献

- [1] Neal Brand(2002), *Derivatives without limits*, University of North Texas Mathematics Projects
- [2] Doug French, Derivatives without limits, *Math. Gaz.*, **86**(July 2002) pp.279-281
- [3] 池田真治 (2006) 「ライプニッツの無限小概念-最近の議論を中心に」, 哲学論叢 (33) pp.138-149
- [4] Sergio Invernizzi and Maurizio Rinaldi, A limit-free approach to derivatives: Report on classroom project. In *2nd International Conference on the teaching of mathematics*(2002)
- [5] Victor J. Katz(2008), *A History of Mathematics* (3rd Edition), Pearson
- [6] H. Jerome Keisler, *Elementary calculus: an approach using infinitesimals*(2000), <http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html>
- [7] Serge Lang(1973), *A First Course in Calculus*, Springer
- [8] Jerrold E. Marsden and Alan Weinstein(1981); *Calculus Unlimited*, Benjamin/Cummings.
- [9] ALASDAIR McANDREW, An elementary, limit-free calculus for polynomials, *Math. Gaz.*, **94**(March 2010) pp.67-83
- [10] 文部科学省 (2011) 「高等学校学習指導要領」, 東山書房
- [11] 文部科学省 (2011) 「高等学校学習指導要領解説 数学編」, 実教出版
- [12] Christopher J Sangwin, Limit-free derivatives, *Math. Gaz.*, **96**(November 2011) pp.469-482
- [13] Harry Sedinger, Derivatives without limits, *Two Year College Mathematics Journal*, **11**(1) (January 1980) pp.55-56
- [14] Kathleen Sullivan, The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach, *The American Mathematical Monthly*, Vol.83, No.5(May, 1976), pp.370-375
- [15] D. Reginald Traylor and Julia S. Roman, Finding derivatives without the notion of limits. In *Seventh Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (1994)