

Bad Suborbifolds について.

九大・理 加藤十吉 (Mitsuyoshi Kato).

§1. 定義 orbifold O_X の suborbifold O_Y とは,
 $Y \subset X$ であり, Y の各点 y で, O_X の点 y での
 local chart $(G_y, \mathbb{R}^n)$ において,

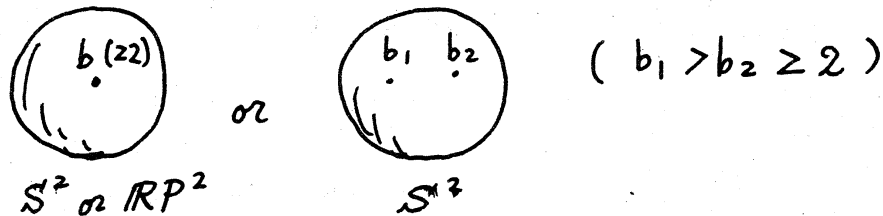
$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 L 及び L を不変にする G_y の元
 の全体のなす部分群 G'_y に対し, L/G'_y が y の Y
 での開直傍 となり, L を固定する G'_y の元全体のなす正規
 部分群で G'_y を割った群を $\tilde{G}_y$ とするとき, $(\tilde{G}_y, L)$
 が O_Y の点 y での local chart となることをいう.

とくに, $\dim Y = 2$ のとき, O_Y は Y のことを
 O_X の surface という. 以下, ΣX は cod. 2 以上とする.

予想 (Thurston [Th]) Bad n -orbifold ($n \geq 3$)
 は Bad surface を含む.

本質的には Thurston によるこの予想が $n \geq 4$ で一般
 には成立しないことを §2 で示す.

この予想は、組合せ群論的に非常に困難な bad である
 この判定条件を直観的に明快な bad surface



の存在に帰着させようとするもので非常に好都合である。

§3では、 $\mathbb{CP}^2$ の weighted line configuration からえられる complex algebraic orbisurface の abelian uniformization problem で、この種の予想の成立を示す。

§2. 反例. ([Ka 1]). $\mathbb{C}^2$ の中で一般の位置にある 3 直線 L_1, L_2, L_3 を考える。

$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とし、

$$p_i = L_j \cap L_k,$$

$$L_i^\circ = L_i - \{p_j, p_k\}$$

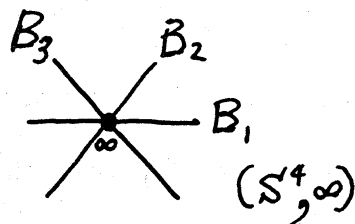
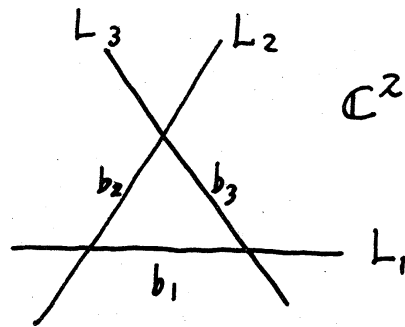
とおく。 $\mathbb{C}^2$ の 1 点コンパクト化

として、 $S^4 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$ を考え、

例えば、立体射影により、

$$B_i = L_i \cup \{\infty\} \quad (i=1, 2, 3)$$

は ∞ で、互いに transversal に交わるとしてよい。



b_1, b_2, b_3 を2以上の自然数とする. $S^4 - \bigcup_{i=1}^3 B_i$ 上非分岐, L_i 上で b_i 分岐する (p_i で b_j, b_k 分岐する) orbifold が ∞ 迄拡張できる為の必要十分条件は,

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} > 1 \quad (*)$$

となる. こうして決まる orbifold を $(S^4, \sum_{i=1}^3 b_i B_i)$ と表す. この orbifold は, Bad であり, しかも, Bad surface を含まぬことを示そう.

$E = S^4 - \bigcup_{i=1}^3 B_i$ の基本群は abel 群 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ で, 各 B_i の normal loop μ_i で生成される.

与えられた orbifold が good であれば, その普通分岐被覆は, 自然な全射準同型 $\pi_1(E) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/b_1 + \mathbb{Z}/b_2 + \mathbb{Z}/b_3$ に associate された E の covering の S^4 上での Fox completion $W \rightarrow S^4$ となる. W が多様体となるということが $(S^4, \sum b_i B_i)$ が good ということであった.

ところで, ∞ での orbifold の local chart の群の位数は, Schwarz 3角群 $T(b_1, b_2, b_3)$ (条件(*)のもとで, これは正多面体群 $\hat{c}$, その位数を c とするとき, c^2 となる.

ちなみに,

$$c = \begin{cases} 2 \cdot (2m+1) & , \text{ if } \{b_1, b_2, b_3\} = \{2, 2, 2m+1\} \\ 2 \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle & , \text{ otherwise } , \end{cases}$$

但し, $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ は b_1, b_2, b_3 の最小公倍数である.

したがって, $C^2 > b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$ が成立する。

∞ で uniformize するのに, C^2 -fold cover が必要であるにもかゝらず, $b_1 b_2 b_3$ 重分岐被覆しかとれないので, $(S^4, \Sigma b_i B_i)$ は good でありえない。

次に, bad surface が存在しないことを示す。

$(C^2, \Sigma b_i L_i)$ は good であるから, もし, bad surface Y が存在したとすると, 必ず ∞ を通る。

suborbifold の定義から, Y は各 B_i と transversal に交わる。

Y の ∞ での local chart の群の位数は上の C に等しいことがわかる。

ところで, S^4 の中で 2 つの smooth surfaces Y と B_i の mod 2 intersection number は 0 であるから,

$Y \cap B_i - \text{root} \neq \emptyset$ となる。 $Y \cap L_i^\circ \ni q$ での Y の local chart の群の位数は明らかに b_i である。

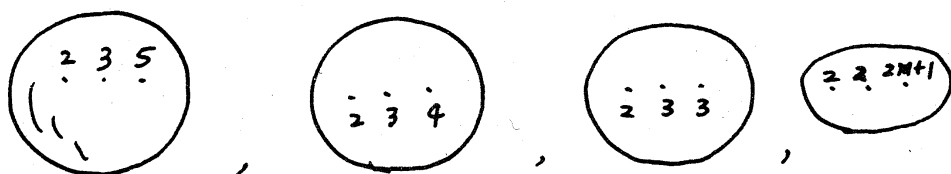
$Y \ni p_i$ であれば, それは $\langle b_j, b_k \rangle$ となる。

いずれにせよ, $Y \cap (UB_i)$ の各点は O_Y の分岐点となる。明らかに, $Y \cap (UB_i)$ は 3 点以上を含むから,

O_Y は bad であることに矛盾する。よって, $(S^4, \Sigma b_i B_i)$ は bad surface を含みえない。

§3. Good abelian orbifold の例.

orbifold O_X が good で, しかも, 変換群がアベル群であるような manifold branched cover をもつとき, good abelian orbifold という。good でも good abelian でない例として,



等々がある。一般に, X が (Riemann 面 (向きづけ可能な曲面)) のとき, $\Sigma X = \{p_1, \dots, p_r\}$, 分岐 divisor を $\sum_{i=1}^r b_i p_i$ としたとき, O_X が abelian uniformizable (good abelian orbifold であること) の必要十分条件は,

O_X が good であり, $i=1, \dots, r$ について,

$$b_i \mid \langle b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_r \rangle$$

が成立することである。通常の基本群とホモロジー群の関係のように, $\pi_1(O_X) = (O_X \text{ の universal uniformization の群})$ の abel 化が universal な abelian uniformization の群に同型となることが一般に示せる。

さて, $L_1, \dots, L_r$ を $\mathbb{CP}^2$ の複素直線とし, $b_1, \dots, b_r$ を 2 以上の自然数とし, weighted line configuration

$(\mathbb{CP}^2, \sum b_i L_i)$ について考えよう。 $\bigcup_{i=1}^r L_i$ の 2 重交
以外の多重交のことを, こゝでは, 特異多重交と呼ぶ。

$\{p_1, \dots, p_s\}$ を特異多重交の全体とし, $\mathbb{CP}^2$ をそこで
blowing up して得られる複素曲面を X とし, L_i の proper
transform を L'_i , p_j に対応する例外曲線を E_j とする。

$(\cup L'_i) \cup (\cup E_j)$ は non-singular rational curves
からなり, 特異交は transversal な 2 重交 である; simply
normal crossing である。各 p_k に 2 以上の自然数 C_k を
指定し, divisor $\sum b_i L'_i + \sum C_k E_k$ によって,
§2 の様に自然に X 上の複素 orbisurface O_X が
定まる。

Theorem. O_X が good abelian orbifold

$\Leftrightarrow \begin{cases} O_{L'_i}, O_{E_j} \quad (i=1, \dots, r; j=1, \dots, s) \text{ が so である。} \\ \text{各 } p_j \text{ について, } C_j \mid \langle b_{i_1}, \dots, b_{i_m} \rangle \quad (p_j = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_m}). \end{cases}$

(証明) $\Rightarrow$ は容易であるから略し, $\Leftarrow$ を示そう。

$$B_i = L'_i \quad (1 \leq i \leq r), \quad B_{r+j} = E_j, \quad b_{r+j} = C_j \quad (1 \leq j \leq s)$$

とおき, 各 B_k に normal loop μ_k を 1 つ とる。

$$H_1(X - \bigcup_{k=1}^{r+s} B_k) = H_1(\mathbb{CP}^2 - \bigcup_{i=1}^r L_i) = \mathbb{Z}(\mu_1) + \dots + \mathbb{Z}(\mu_r) / \mu_1 + \dots + \mu_r = 0,$$

$\mu_{r+j} + \mu_{i_1} + \dots + \mu_{i_m} = 0 \quad (p_j = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_m}, j=1, \dots, s)$
に注意する。[Ka 1] により, O_X が good abelian であ

ることを示すには, 各 2 重集 $x \in B_i \cap B_j$ で, 準同型 $\mathbb{Z}(\mu_i) + \mathbb{Z}(\mu_j) \rightarrow G = \mathbb{Z}(\mu_1) + \dots + \mathbb{Z}(\mu_r) / \begin{matrix} \mu_1 + \dots + \mu_r = 0 \\ b_1 \mu_1 = \dots = b_{r+1} \mu_{r+1} = 0 \end{matrix}$ の kernel が $\mathbb{Z}(b_i \mu_i) + \mathbb{Z}(b_j \mu_j)$ となることを示せばよい。

B_k 上の 2 重集の全体を $\{x_1, \dots, x_g\}$ とし, x_t の $\overset{\circ}{B}_k = B_k - \{x_1, \dots, x_g\}$ での normal loop を ν_t とする。

$H_1(\overset{\circ}{B}_k) = \mathbb{Z}(\nu_1) + \dots + \mathbb{Z}(\nu_g) / \begin{matrix} \nu_1 + \dots + \nu_g = 0 \\ d_1 \nu_1 = \dots = d_g \nu_g = 0 \end{matrix}$ であり, O_{B_k} の分岐 divisor を $\sum_{t=1}^g d_t x_t$ とするとき, O_{B_k} の abelian universal branched covering の群は $G_k = \mathbb{Z}(\nu_1) + \dots + \mathbb{Z}(\nu_g) / \begin{matrix} \nu_1 + \dots + \nu_g = 0 \\ d_1 \nu_1 = \dots = d_g \nu_g = 0 \end{matrix}$ で与えられる。したがって, $B_k = E_{k-r}$ のとき,

$$\mu_j \mapsto \begin{cases} \nu_t & , \quad x_t = B_k \cap B_j \\ 0 & , \quad B_k \cap B_j = \emptyset \text{ or } B_j = B_k \end{cases}$$

で定まる全射準同型 $H_1(X - \bigcup_{j=1}^{r+s} B_j) \rightarrow H_1(\overset{\circ}{B}_k)$ は自然な全射準同型 $G \rightarrow G_k$ を誘導し, $\underbrace{O_{E_{k-r}} \text{ が abelian good から, }}_{\mu_{k-r} = L_1 \cap \dots \cap L_m}$

のとき, $\mu_i, \dots, \mu_m$ が G_k の中で order $b_i, \dots, b_m$ をもつことがわかる。同様に, $B_k = L'_k$ で, L'_k 上に特異多重集のない場合に $\mu_1, \dots, \mu_k, \dots, \mu_r$ が order $b_1, \dots, b_k, \dots, b_r$ をもつことが示せる。いずれも, $\mu_k = 1$ として, つまり, $G/\mu_k = 1$ の中でその order をもつことに注意すると, $\bigcup_{i=1}^r L_i$ の 2 重集で, $\ker(\mathbb{Z}(\mu_i) + \mathbb{Z}(\mu_j) \rightarrow G) = \mathbb{Z}(b_i \mu_i) + \mathbb{Z}(b_j \mu_j)$ が成立する。また, すべての直

L_i について, μ_i ($1 \leq i \leq r$) の order が G/μ_{k+j} ($p_j \in L_i$ の特異多重点) で b_i であることも示された。

したがって, 特異多重点 $p_j = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_m}$ を含む L_k について, $B_k = L_k$ とし, μ_{k+j} が $G/\mu_k = 1$ の中で order b_{r+j} をもつことを示せばよい。

$G/\mu_k = 1$ は, $\mu_1, \dots, \mu_k, \dots, \mu_r$ で生成され, 各 μ_i の order は b_i だから, $b_{r+j} \mid \langle b_{i_1}, \dots, b_k, \dots, b_{i_m} \rangle$ 及び $b_{r+j} \mid \langle \{b_1, \dots, b_r\} - \{b_{i_1}, \dots, b_{i_m}\} \rangle$ を示せばよい。 O_{E_j} が good abelian より,

$$\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_m} \rangle = \langle b_{i_1}, \dots, b_{i'_e}, \dots, b_{i_m} \rangle$$

が成立するから, $b_{k+j} \mid \langle b_{i_1}, \dots, b_{i_m} \rangle$ より,

$b_{r+j} \mid \langle b_{i_1}, \dots, b_{i'_e}, \dots, b_{i_m} \rangle$, とくに, $b_{r+j} \mid \langle b_{i_1}, \dots, b_k, \dots, b_{i_m} \rangle$ が成立する。 O_{B_k} が good abelian であることから,

$b_{r+j} \mid \langle d_1, \dots, d_q \rangle$ が成立する。 とくに, B_k 上の2重点 α_t が特異多重点 $p_j = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_m}$ に対応するものであれば,

$$b_{\mu+j} = d_t \mid \langle b_{i_1}, \dots, b_{i_m} \rangle$$

が成立する。 L_k は他のすべての直線と交わるので, 結局,

$b_{k+j} \mid \langle \{b_1, \dots, b_r\} - \{b_{i_1}, \dots, b_{i_m}\} \rangle$ が示された。 (証明了)。

例. $\mathbb{CP}^2$ 内の一般の位置にある3直線 L_1, L_2, L_3 に対し, $(\mathbb{CP}^2, 2L_1 + 3L_2 + 6L_3)$ を考える。

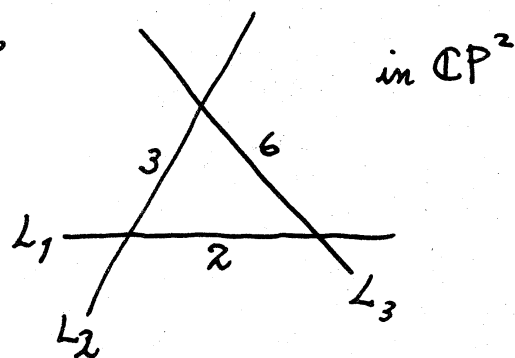
各 O_{L_i} は bad であるから,
これは bad abelian である。

しかし, μ_1, μ_2, μ_3 は

$$\mathbb{Z}(\mu_1) + \mathbb{Z}(\mu_2) + \mathbb{Z}(\mu_3)$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2\mu_1 = 3\mu_2 = 6\mu_3 = 0$$

の中で, order 2, 3, 6 をもっている。



(注). orbifold O_X において, $\pi_1(X - \Sigma X)$ が abelian なら, $\text{good} \iff \text{good abelian}$ である。§2 の反例はこの場合でも Thurston 予想が不成立であることを示している。Theorem の条件は bad abelian topological surface を含まぬという条件でおきかえられる。

References

[Ka1] M. Kato, On uniformization of orbifolds,
(to appear).

[Th] W. Thurston, The Geometry and topology of 3-manifolds, preprints (1978, Princeton Univ.).