

対称性の自滅とエネルギー・スペクトル

学習院大・理 江沢 洋

§1 対称性の自滅

これから J. Goldstone の名でよばれる一定理を紹介する。定理の内容は、大雑把にいうと、このようになる：量子力学的な体系が力学的量の数 $\mathcal{O}$ の自己同型な連続群 Γ をもち、そのハミルトニアンが Γ に関して不変なとき（対称性！）、もし「その自己同型がユニタリ変換で遂行できないならば」（対称性の自滅 = spontaneous breakdown of symmetry）エネルギー E のスペクトルは下端 $E=0$ に連なる区間 $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ を連続的に埋める。

スペクトルに関する定理としては甚だ興味小かい形としていえる。

しかし、自己同型がユニタリ変換でも、 Γ で遂行できないとき、なぜ対称性の自滅というのか？

それを説明するには、量子力学における対称性の記述を最

と一般的に述べるときから始めなければならぬ。 正值

量子力学的な状態とは、力学量代数 $\mathcal{O}$ の α 上の線型汎関数である [1]。その全体を状態空間とよび S と記す。一つ α 力学系が与えられたとき、それに対する対称操作の群 G は

$$\left. \begin{array}{ll} \text{力学量 } \alpha \text{ 上に} & \hat{A} \in \mathcal{O} \longmapsto \alpha_g(\hat{A}) \in \mathcal{O} \\ \text{状態 } \alpha \text{ 上に} & \Phi \in S \longmapsto \beta_g(\Phi) \in S \end{array} \right\} (g \in G) \quad (1)$$

なる変換を惹き起し、両者は《期待値の不変性の条件》、

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Phi} = \langle \alpha_g(\hat{A}) \rangle_{\beta_g(\Phi)} \quad (2)$$

によつて結ばれてゐる。これが広義の対称性である。

仮に G を回転とすれば、力学量と（すなわち測定装置と）回転すると同時に状態も回転するから測定値の期待値は変わらないといふこと、これは空間の等方性を表わす。

狭義の対称性は、その力学系のハミルトニアン $\hat{H} \in \mathcal{O}$ が不変なとき、

$$\hat{H} = \alpha_g(\hat{H}) \quad (3)$$

で、これがあつて対称操作を施した後系の時間的発展は施す前と同じになるわけである。ふつと対称性といへば、この狭義のほうを指すが、その背後には上の広義の対称性が暗黙のうちに前提されてゐる。

物理屋たちは、ついでに、力学系に応じて一つのヒルベルト空間 H と $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}$ 上の演算子で表現するということを行なってきた。そうすると、状態は密度行列 $\hat{\rho}$ によるトレースとなる [2]:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad (\hat{A} \in \mathcal{O}).$$

特に、一つのベクトル $\phi \in H$ があつて

$$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} = \langle \phi, \hat{A} \phi \rangle \quad (\hat{A} \in \mathcal{O})$$

と書けるような状態は純粋状態とよばれる。そう書けるものは混合状態である ($\hat{A} \in \mathcal{O}$ と $\mathcal{O}$ の演算子による表現を同じ文字で表わした)。

対称操作の群 G に応じてユニタリ変換の群 $\{U_g, g \in G\}$ があつて、

$$\text{力学量に} \rightarrow \text{ } \alpha_g: \hat{A} \mapsto U_g \hat{A} U_g^*, \quad (\hat{A} \in \mathcal{O})$$

$$\text{状態ベクトルに} \rightarrow \text{ } \beta_g: \psi \mapsto U_g \psi, \quad (\psi \in H)$$

となる場合には期待値の不変性の条件 (2) が自動的に満たされる。力学系の自由度が有限な場合なら、正準交換関係と不変にするような対称操作については上記のようなユニタリ変換の存在は“正準交換関係の表現はユニタリ変換を除く一意である”と主張する von Neumann の定理 [3] によつて保

証されたい。

しかし、場 ϕ のように自由度が無限大の力学系に与ると、対称操作を行なうとき β_g によって《状態がヒルベルト空間の外に出てしまう》という現象が、むしろ普通に起こることが認識されたのである[4]。そうしているときには、ユニタリ変換 U_g は、もちろん、存在しない。

この事実はユニタリ変換の存在に慣らされていた物理屋たちの間にいささかの混乱を巻き起した。その混乱の中から、ヒルベルト空間と一応はなれて力学量と代数的な側面からとらえ、とりわけ対称性と自己同型によって定義するという道が見出されたわけであった[5]。いま、そのことには深入りしない。この問題が超電導の理論という現実的な課題から発生したことを注意するだけにしておこう[6]。

われわれは対称性の自滅ということを説明しようとしたのだ。

対称操作がユニタリ変換 U_g によって表現され、系のハミルトニアンがこれによって不変なとき ($U_g H = H U_g$)、この系のエネルギー準位のうち縮退のものも U_g の下で n 重として不変になる。縮退の有限なものも……と説明を続ける必要もないかと思うが、これが《状態ベクトルの対称性》である。そして、ユニタリ変換が存在しないとき自滅する g は正

しく、 α 状態の対称性な α である。対称性は、非対称な擾動
 をうけて壊れた α ではない。自由度が大きすぎたために太古
 のマンモスよりしく自滅したのだ。

α は、対称性 α 自滅が一体どのようにしてエネルギー・ス
 ペクトルに結びつくのか？

Goldstone の定理の証明をすれば、もちろん、一つの答に
 なるはずだが、その前に「例」によって定理の心を明らかにしお
 け。

§2 例の - [7]

いわゆる中性スカラー場 $\varphi(x)$, $x = (x_0 = ct, x_1, x_2, x_3)$ を考え、そ
 のラグランジアン $\mathcal{L}$ を形式的に

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right)^2 - \sum_{r=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \right)^2 \right] d^3x$$

とする。これから「導出」されるハミルトニアンは、 $\pi = \partial \varphi / \partial t$ と

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \left[\pi^2 + c^2 \sum_{r=1}^3 \left(\partial \varphi / \partial x_r \right)^2 \right] d^3x. \quad (4)$$

これは、実軸上の加法算の群 G に応じた対称操作、

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &\longrightarrow \varphi(x) + \alpha, & (\alpha = \text{任意の実数}) \\ \pi(x) &\longrightarrow \pi(x) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

によ、2 変数起される場の量 α 代数 $\mathcal{O}$ 上の自己同型群 Γ に関

して不変である。

Φ_0 の表現 [8] をとると、ハミルトニアンは

$$H = \hbar c \int |\vec{k}| a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) d\vec{k}$$

とな、こ、基底状態 $|\Omega\rangle$ は Φ_0 の no-particle state $|0\rangle$ であり、エネルギー・スペクトルは $[0, \infty)$ を覆いつくし、《基底状態の $E=0$ までは連続的につながっている》。実は、この場合、《理論が質量 0 の粒子をもつ》というより強い命題もなりたつが、この強い Goldstone の定理は後に述べる。

では、自己同型 Γ はユニタリー変換で実現できるか？ 事実できない。だからエネルギー・スペクトルの上の性質は Goldstone の定理の帰結とみなすことができる。

ユニタリー変換がなりことを直接に示すこともたやすいが [9], 次のようにしてもよい。仮にユニタリーな $U(\alpha)$ があって

$$\varphi(x) + \alpha = U(\alpha) \varphi(x) U^*(\alpha) \quad (6)$$

となつたとする。この $U(\alpha)$ は容易にわかる通り非斉次ローレンツ群と可換だから、基底状態 $|\Omega\rangle$ に縮退がなりことにより

$$U^*(\alpha) |\Omega\rangle = \omega(\alpha) |\Omega\rangle.$$

ただし $\omega(\alpha)$ は絶対値 1 の複素数。そうすると (6) の $|\Omega\rangle$

による期待値を作、2 矛盾に到達する (証す)。

この模型ではハミルトニアン(4)に質量項 $+\int (\frac{mc^2}{\hbar})^2 \varphi(x)^2 d^3x$ を加えると (ラグランジアンからは引く) エネルギー・スペクトルが $\{0\} \cup [mc^2, \infty)$ に変わり, 基底状態 $E=0$ と最低の励起状態の間に mc^2 だけの間隙ができる。

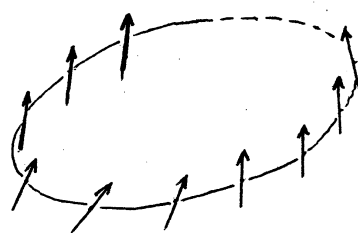
§3 例の二

ここでは, スピン $\vec{S}_i$, $i=1, 2, \dots, N$ が規則正しく並んだ結晶格子を考え、格子はどんな形をしようともよいが、輪になつた鎖を思い浮かべるとよくあるが便利だ (第1図)。

以下の式は, $\hbar = 1$ で,

$$\vec{S}_{N+1} \equiv \vec{S}_1$$

と読むことにする。



第1図

スピンというものは,

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という行列演算子で,

$$\vec{S}_i = \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \vec{S} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1}_{N \text{ 個}}.$$

これに対応して, ヒルベルト空間 H とし、これは 2 次元の数列空間

$$l^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C} \right\} \text{ の } N \text{ 個のテンソル積をとる。}$$

この系のハミルトニアンとすると,

$$H = -J \sum_{r=1}^N \vec{s}_r \cdot \vec{s}_{r+1} \quad (J = \text{定数} > 0)$$

としよう。ここには $\cdot$ はスカラー積を表わす。スカラー積だから、このハミルトニアンはすべてのスピンの一斉に共通な回転 R をほどこしても変わらない。

力学量の代数 $\mathcal{O}$ は $\{\vec{s}_r\}$ によって生成される。その自己同型として上述によりスピンの全体に共通な回転を施す操作をとることになる。たとえば z -軸のまわりにベクトルを角 γ だけ回転させるという操作 α_γ なら、

$$\alpha_\gamma : \begin{pmatrix} s_{rx} \\ s_{ry} \\ s_{rz} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s'_{rx} \\ s'_{ry} \\ s'_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{rx} \\ s_{ry} \\ s_{rz} \end{pmatrix}$$

である。これはユニタリ変換

$$U_N(\gamma) = \exp \left[-i\gamma \sum_{r=1}^N s_{rz} \right] \quad (7)$$

を用いて

$$\vec{s}'_r = U_N(\gamma) \vec{s}_r U_N^*(\gamma)$$

のように遂行される。他の回転についても同様にいく。

ユニタリ変換で遂行できないならという仮定に立つ Goldstone の定理は $N \rightarrow \infty$ の極限に関わることになっているのである。

まず、このスピンの系の基底状態を見よう。 $J > 0$ としたから、すべてのスピンの平行という配向の系のエネルギーは最低；これが基底状態をあたえる。スピンのたちが互に平行なら

よ「 α 」で、南向きだろ」と北東だろ」と向きはどちらでもよい
 — という ψ がハミルトニアン H の回転不変性から α の帰結であるが、これは基底状態が $(N+1)$ 重に縮退していることを意味する。スピンの互に平行だから合成スピンの大きさは $N/2$ 、
 そうすると、こうした状態ベクトル 2 次独立なものは
 $2 \cdot (N/2) + 1$ 個あるというわけである。

次に励起状態。これはスピンのエネルギーが基底状態 E_0 から上る ψ は、スピンの相互の平行性が破れたときであるが、
 この破れが小さければ励起エネルギーも小さいということになるはずだろ。

しかし、勝手に一つのスピンのみだけ傾けても、それは $1/4$ の固有状態にはならない。

いまの模型では、スピンの鎖に沿って波状にゆれるという状態が励起状態にあたえ、その波長によつて励起エネルギーの定まることになる [10]。そして基底状態と励起状態との間のエネルギー間隙は $N < \infty$ を限り $\neq 0$ である、
 $N \rightarrow \infty$ の極限ではじめて消失する。言い換えれば、間隙は波長 $\rightarrow \infty$ の励起が可能になったときに消失するものである。

よ「 $N \rightarrow \infty$ が 2 次変換 (7) の極限の非存在と結びつく」
 実際、このスピンの力学量の代数 $\mathcal{O}$ は、たとえば

$$A_L = \sum_{r=1}^L S_{rx}$$

を含むが、 $N \rightarrow \infty$ のとき L は $\hbar$ より 2π も大きくなり得る。この増大列 $L_1 < L_2 < \dots$ を考えれば、それらを回転する《全部に共通な》 2π 変換 U_∞ と $\hbar$ のたも α が存在しない $\hbar = 0$ とは明らかである。もちろん $L = \hbar$ と異なる α の 2π より U_L が用いられる α だけだ——。

要するに、この模型では、 $N \rightarrow \infty$ が一方には $\hbar$ の力学量の自己同型を遂行すべき 2π 変換の非存在と同値であり、他方ではエネルギー間隙の消失と同値と $\hbar$ のふうにして、Goldstone の定理の仮定と結論を媒介して $\hbar$ する。 2π 変換の非存在は、つまり、系が無限に大きくなることを言わ表わす役をし $\hbar$ する α だけ $\hbar$ の 2π もよい。

前節の模型に $\hbar$ しても、一見、同じことが言え $\hbar$ に思われるだろう。ある場合にエネルギー・スペクトルが $E_0 = 0$ まで連続につながった α は、やはり波長 α より 2π も長い励起が可能だったから 2π 変換の非存在も $\hbar$ から来 $\hbar$ する ([10] を見よ)。ただ、ある場合には、場と体積 $V < \infty$ の箱 (立方体とする) に閉じこめたと $\hbar$ して、場

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2c|\vec{k}|V}} \left[a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - c|\vec{k}|t)} + \text{h.c.} \right],$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{V^{1/3}} \vec{n}, \quad (n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

を書き下しても $\vec{\pi} = (0, 0, 0)$ の項が意味をなさない。そのために系の大きさが有限の場合と比べ議論をずらすということはできないのである。

それでも、とにかく、ユニタリ変換の非存在を仮定する心は、系の大きさの無限大をいふ、波長 ∞ (波数ベクトル 0) の励起を許すところにあるといえるだろう。

もちろん、波長 ∞ の励起が励起エネルギー $\rightarrow 0$ とは限らないが、それを保証するものが I の下でのハミルトニアン H の不変性である。このことは本節の例では明らかにでき、前節の例でも $\alpha = \cos \vec{k} \cdot \vec{x}$ とおいて $\vec{k} \rightarrow 0$ にゆく極限を想像すれば理解されるだろう。しかし、この種の議論に深入りするものはあまりに物理的というものである。

この辺で定理を正確に述べ、その証明をあつたえようことにしよう。

§4 Goldstone の定理

これから述べるものは相対論的な理論でも非相対論的な理論でもなりたつ一般的形式である。相対論の要請により定理を強い形にすることは次節で行なう。

理論の枠として次のことを前提する：——

1° 場の量子論。ある Hilbert 空間 H に作用する演算子の $\dagger$ 次数の註 (†) を見よ。

*-代数[†] $\mathcal{O}$ が局所性をもつ: 作用が光速より速く伝わりな^{††}と他,

a) 時空の有界領域 $\mathcal{O}$ ごとに *-代数 $\mathcal{O}_{\mathcal{O}}$ があつて,

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \implies \mathcal{O}_{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{O}_2}, \quad (\text{isotony}).$$

b) $\mathcal{O} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{\mathcal{O}}}$, ($\overline{}$ は uniform closure, $\mathcal{O}$ は C^* -代数になる)

2° 時間 x^0 の推進なる $\mathcal{O}$ の連続な自己同型 τ_{x^0} :

$$A \in \mathcal{O}_{\mathcal{O}} \longmapsto \tau_{x^0}(A) = U_{x^0} A U_{x^0}^* \in \mathcal{O}_{\mathcal{O}+x^0},$$

$$\text{ただし } \mathcal{O}+x^0 \equiv \{y+(x^0, 0, 0, 0) \mid y \in \mathcal{O}\}$$

とあつて 1-パラメタの連続ユニタリ変換群 $U: x^0 \mapsto U_{x^0}$ があつて, そのスペクトル分解,

$$U_{x^0} = \int e^{ip^0 x^0} E(dp^0) \quad (8)$$

にある射影演算子 $E((-\infty, 0]) = E(\{0\}) \equiv E_{\Omega}$ は 1 次元である. $E_{\Omega} \Omega = \Omega$ なるベクトル Ω は $\mathcal{O}$ に関して巡回的とする. (U_{x^0} のスペクトル p^0 はエネルギーと解釈され, Ω は基底状態とよばれる. $U_{x^0} \Omega = \Omega$ になりたつ. $\langle \Omega, \Omega \rangle = 1$ としよ).[†]

3° $\mathcal{O}$ の自己同型 α 1-パラメタ群 $\Gamma: \gamma \mapsto \alpha_{\gamma}$ があつて,

a) 局所性: $\alpha_{\gamma}(\mathcal{O}_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{O}}$,

b) 時間推進と可換: $\tau_{x^0} \alpha_{\gamma} = \alpha_{\gamma} \tau_{x^0}$,

c) Ω を定義域に含む (非有界) 演算子の族 J_R^0

$$(0 < R < \infty) \text{ があつて, } (J_R^0)^* = J_R^0, \text{ かつ}$$

$$\langle \Omega, J_R^0 \Omega \rangle = 0,$$

[†] Ω は *-演算子の要役を示す.

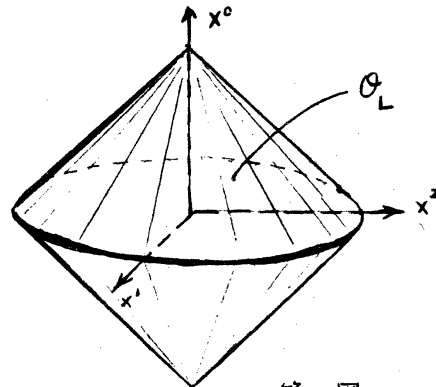
^{††} 非相対論的な理論では Ω の位置とエネルギーの到達距離有限という仮定は必要でないが, 厳密には未解決である [16].

$$i \frac{d}{d\gamma} \langle \Omega, \alpha_\gamma(A) \Omega \rangle \Big|_{\gamma=0} = \lim_{R \rightarrow \infty} [\langle A^* \Omega, J_R^0 \Omega \rangle - \langle J_R^0 \Omega, A \Omega \rangle] \quad (9)$$

が各 $A \in \mathcal{O}_{\theta_L}$, $\mathcal{O}_L = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| + |x^0| < L\}$ に対し
 2 なり 1 なる。

d) $n > 0$ があつて,

$$R^{-n} \|J_R^0 \Omega\| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$



第2図

条件 3°-c) が成り立ち、もし $s\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} J_R^0 = J^0$
 があつて、しかも定義域の問題なしに

$$i \frac{d}{d\gamma} \alpha_\gamma(A) = [A, J^0]$$

が書けるならば明瞭であるが、 $\equiv \equiv$ は、これが許される
 場合を考慮に入れ (§3 の (7) 式の例を見よ) 条件を弱め
 2 であるわけである。

と $\equiv \equiv$ は、

定理 1 [11] 上述の枠内 2°, (8) の単位分解 $E(I)$ につき、

$$\langle J_R^0 \Omega, E(I) A \Omega \rangle, \quad A \in \mathcal{O}_L, \quad 0 < R < \infty$$

が、 $m > 0$ を定数として $I \cap [m, +\infty) \neq \emptyset$ のときのみ 0 と異な
 る 1 なる；場合には——もし基底状態と励起状態の間にはエネル
 ギー間隙があれば十分—— J_R^0 により (9) の意味で生成され
 る $\mathcal{O}_L$ の自己同型 Γ は $\pi = \tau$ の変換で実現される ■

これを言いかえさず,

定理 1' (Goldstone の一般定理) $\mathcal{O}$ の自己同型 Γ がユニタリ変換で実現できない (対称性の自滅!) α はエネルギー・スペクトルが $p^0 = 0$ まごつながら、ゼロ (エネルギー間隙がない) ときに限る。

さて,

定理 1 の証明 の足場は、いわゆる GNS (Gelfand-Naimark-Segal) 構成法である。それは,

C^* -代数 $\mathcal{O}$ 上に正定値・線型な汎関数重があたえられると $\mathcal{O}$ の演算子表現 (π, H, Ω) , すなわち

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hilbert 空間 } H, \\ A \in \mathcal{O} \text{ に } H \text{ 上の演算子 } \pi(A) \text{ と対応させる写像 } \pi, \\ \{ \pi(A); A \in \mathcal{O} \} \text{ に関して巡回的なベクトル } \Omega \in H \end{array} \right.$$

で

$$\Phi[A] = \langle \Omega, \pi(A) \Omega \rangle \quad (10)$$

をみたすものがユニタリ同値を除いて一意に定まる。

== 巡回ベクトルに対して すぐ上に述べた基底状態と同じ記号 Ω を用いたのは、証明の筋として次のようなことを考えさせるためである:

まず《理論の枠として与えられている》 Hilbert 空間 H と $\mathcal{O}$ 上の (有界) 演算子の C^* -代数 $\mathcal{O}$ から出発し、汎関数重と

基底状態の $\Omega \in \mathcal{H}$ により

$$\Phi(A) \equiv \langle \Omega, A \Omega \rangle, \quad A \in \mathcal{O} \quad (11)$$

と定義すれば, これは正定値・線型かつ連続である. 今この次の二つの補題が証明できたとして;

補題 1 定理 1 の仮定のもとでは, 汎関数 (11) は自己同型 Γ のもとで不変である. すなわち,

$$\Phi[\alpha_\gamma(A)] = \Phi[A], \quad \forall A \in \mathcal{O}. \quad \blacksquare$$

補題 2 $\mathcal{O}$ 上の正定値・線型・連続な汎関数 Φ が, $\mathcal{O}$ 上の自己同型のノルム連続な 1-パラメータ群 Γ のもとで不変ならば $U =$ ユニタリ変換 $U(\gamma)$ があつて

$$\alpha_\gamma(A) = U(\gamma) A U(\gamma)^*,$$

となり, $\{U(\gamma)\}$ は Γ のユニタリ表現,

$$U(\gamma + \gamma') = U(\gamma) U(\gamma'), \quad U(\gamma)^{-1} = U(\gamma)^*,$$

で強く連続である. $\blacksquare$

この 補題 2 の証明 に上記の GNS 構成法が用いられるのである. 補題 1 の証明は後まわしにして, その状況を見よう.

これには GNS 構成法の復習から始めるのが便利である: 一般に (この $\mathcal{O}$ は上の $\mathcal{O}$ のような演算子の代数とは限らないという意味) C^* -代数 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}$ 上の汎関数 Φ が与えられたとして (Φ は正定値・線型とする), 以下をなす,

$$\mathcal{N}_\Phi \equiv \{A \mid A \in \mathcal{O}, \Phi(A^*A) = 0\}$$

を定義すると, これは Schwarz の不等式 $|\Phi(A^*B)|^2 \leq \Phi(A^*A)\Phi(B^*B)$ から知れるとより両側イテールとなる. $\Phi = 0$ の $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{N}_\Phi$ の類に分けられ, 類 $\dot{A}$ の関数と見做す.

$$\langle \dot{A}, \dot{B} \rangle \equiv \Phi(A^*B) \quad (12)$$

が定義できる. $\dot{A}$ は A の属する類を表わす. $\Phi = 0$

$\langle, \rangle$ は正定値な sesqui-linear form であり, これは内積として $\mathcal{O}$ の類の全体 $\mathcal{O}/\mathcal{N}_\Phi$ を線型空間は——完備化を経て——Hilbert 空間となる. $\Phi = 0$ 上の $\mathcal{O}$ の表現は

$$Q \in \mathcal{O} : \pi(Q)\dot{A} = (QA)^\circ \quad (13)$$

で定まる. 巡回ベクトルは $1 \in \mathcal{O}$ の属する類 $\dot{1}$ である. $\Phi = 0$ したときは (10) の要求が満足されること, すなわち

$$\langle \dot{1}, \pi(A)\dot{1} \rangle = \Phi(A)$$

となることは明らかである.

これで GNS 構成法が完了した. π は π の自由な除いた構成が——意味的な——説明するまでもない.

注意 もし $\mathcal{O}$ が Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ 上の有界演算子 α C^* 代数の演算子 $\Omega \in \mathbb{H}$ により (11) で与えられれば, 上記のようにして構成した $\mathcal{O}$ の表現は, そもそも α 演算子表現 $(\pi(A) \equiv A, \mathbb{H}, \Omega)$ と π は同値だから, π は π の自由な行なったとしても π の表現を同一視することが出来る. π は

すなわち $H = \overline{O_2/N_2}$ (— はノルム $\|\dot{A}\| = \langle \dot{A}, \dot{A} \rangle^{1/2}$ による閉包),
 $\pi(A)\Omega = \dot{A}$ である.

上の結果によれば補題2の証明はやさしい. Hilbert空間

$\overline{O_2/N_2}$ 上の演算子 $U(\gamma)$ を, π の作用

$$U(\gamma)\dot{A} = (\alpha_\gamma(A))^\circ$$

によ, π を定義すると, π が望みどおりの性質をもつからである:

Γ の表現: $U(\gamma)\pi(B)U(\gamma)^{-1} = \pi(\alpha_\gamma(B))$ は両辺を任意の $\dot{A} \in$

$\overline{O_2/N_2}$ に演算してみると分かる. そして,

$$\begin{aligned} U(\gamma')U(\gamma)\pi(B)U(\gamma)^{-1}U(\gamma')^{-1} &= U(\gamma')\pi(\alpha_\gamma(B))U(\gamma')^{-1} \\ &= \pi(\alpha_{\gamma'}(\alpha_\gamma(B))). \end{aligned}$$

左辺は $\pi(\alpha_{\gamma+\gamma'}(B))$ に等しいから $U(\gamma')U(\gamma) = U(\gamma+\gamma')$;

π の等変性: $\langle U(\gamma)\dot{A}, U(\gamma)\dot{B} \rangle = \Phi[(\alpha_\gamma(A))^* \alpha_\gamma(B)]$

$$= \Phi[\alpha_\gamma(A^*B)] = \Phi[A^*B] \quad (\text{補題1})$$

$$= \langle \dot{A}, \dot{B} \rangle;$$

強連続性: $\|U(\gamma)\dot{A} - \dot{A}\|^2 = \Phi[(\alpha_\gamma(A) - A)^*(\alpha_\gamma(A) - A)] \leq \|\alpha_\gamma(A) - A\|_{C^*}^2.$

最後に $\|\cdot\|_{C^*}$ は $\mathcal{A}$ 上の C^* -代数としてノルムである,

不等式は規格化 $\Phi(1) = \langle \Omega, \Omega \rangle = 1$ による. ■

したがって定理1の証明は補題1の証明に帰着された.

補題1の証明 のために, (9)により

$$\frac{d}{d\gamma} \langle \Omega, \alpha_\gamma(A) \Omega \rangle = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (14)$$

をいえばよいが、第一に、(14) 式を $\mathcal{O}_L$ の全体に対して証明する必要はない。原点 $x=0$ を中心とし半径 L をもつ (ユークリッド) 球を $\mathcal{O}_L$ とし、任意の $L < \infty$ の $\mathcal{O}_{\mathcal{O}_L}$ に対して証明できれば十分である。何故なら $\bigcup_L \mathcal{O}_{\mathcal{O}_L}$ は $\mathcal{O}$ の稠密部分であり、 $|\Phi[A]| \leq \|A\|_{C^*}$ だから —。第二に、この (14) 式をすべての γ について証明する必要もない。 α_γ は 1-パラメータ群をとったから

$$\left. \frac{d}{d\gamma} \langle \Omega, \alpha_\gamma(A) \Omega \rangle \right|_{\gamma=\gamma_0} = \left. \frac{d}{d\gamma} \langle \Omega, \alpha_\gamma(\alpha_{\gamma_0}(A)) \Omega \rangle \right|_{\gamma=0}$$

であり、 α_γ は局所性 $\alpha_\gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{O}_L}) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{O}_L}$ をもつとしたから、(14) 式を $\gamma=0$ に対して証明できれば十分である。

したがって補題 1 の証明は、

$$\left. \frac{d}{d\gamma} \langle \Omega, \alpha_\gamma(A) \Omega \rangle \right|_{\gamma=0} = 0, \quad A \in \mathcal{O}_{\mathcal{O}_L} \quad (15)$$

の証明に帰着した。仮定 (9) を思い出せば、これは

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [\langle A^* \Omega, J_R^0 \Omega \rangle - \langle J_R^0 \Omega, A \Omega \rangle] = 0 \quad (16)$$

を証明する問題である。

この証明には、エネルギー間隙の存在から導かれた次の補題が利用される。

補題 3 定理 1 の仮定のもとでは、各 $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{O}_L}$ と $r > 0$ に対して次の性質をもつ演算子 B_r, C_r が存在して (16) の A を

$$\left. \frac{d}{dx^0} \tau_{x^0}(B_r) \right|_{x^0=0} + C_r \quad (17)$$

で置きかえることができる。 B_r, C_r の性質というよりは、

$$\begin{cases} B_r, \frac{d}{dx^0} \tau_{x^0}(B_r) \in \mathcal{O}_{\theta_{L+r}} \\ \|C_r\| \cdot r^m \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (\forall m > 0) \end{cases} \quad (18)$$

のみとできる。

実際、この補題によれば (16) において $\frac{d}{dx^0} \tau_{x^0}(B_r)$ を置きかえ (17) と行なうとき C_r の $\frac{1}{r^m}$ は

$$| \langle C_r^* \Omega, J_R^0 \Omega \rangle - \langle J_R^0 \Omega, C_r \Omega \rangle | \leq 2 \|J_R^0 \Omega\| \cdot \|C_r\|$$

に仮定 3° d) と (18) を参照して、 $R > L+r$, $r \rightarrow \infty$ としたとき 0 に行くことがわかる。よって (16) の A は (17) の第 1 項だけ置きかえるものとしてよい。これは $\in \mathcal{O}_{\theta_{L+r}}$ である。よって (9) が用いられる。

$$\left[(16) \text{で } A \rightarrow \left. \frac{d}{dx^0} \tau_{x^0}(B_r) \right|_{x^0=0} \text{ としたとき} \right] = \frac{d}{dy} \langle \Omega, \alpha_y \left(\left. \frac{d}{dx^0} \tau_{x^0}(B_r) \right|_{x^0=0} \right) \Omega \rangle$$

これは仮定 2° — 特に $U_{x^0} \Omega = \Omega$ — により $\langle \Omega, \tau_{x^0}(\alpha_y(B_r)) \Omega \rangle$ が x^0 によらないから消える。ただし τ_{x^0} と α_y の可換なことを (仮定 3° b) を用いた。これは補題 1 が証明され、定理 1 の証明が補題 3 によって完結することがわかった。

補題 3 の証明 をしよう。そのために $\varphi(x^0) \in \mathcal{S}$ とし

$$A_\varphi \equiv \int \varphi(x^0) \tau_{x^0}(A) dx^0$$

を定義するが、特に φ は、 φ の Fourier 変換 $\tilde{\varphi}(p^0)$ が $\tilde{\varphi}(p^0)$ が $(-m, m)$ に含まれておらずともよいとすれば、

$$\begin{aligned}\langle J_R^0 \Omega, A_\varphi \Omega \rangle &= \int \varphi(x^0) \langle J_R^0 \Omega, \tau_{x^0}(A) \Omega \rangle dx^0 \\ &= \int \varphi(x^0) \langle J_R^0 \Omega, U_{x^0} A \Omega \rangle dx^0 = \int \tilde{\varphi}(p^0) \langle J_R^0 \Omega, E(dp^0) A \Omega \rangle dp^0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

何故ならエネルギー固有値の仮定 (定理1を見よ) により $\int dp^0$ の被積分関数 φ となる因子は台を共有しないからである。

$\tilde{\varphi}(p^0)$ を実数値の偶関数とすれば $(A_\varphi)^* = (A^*)_\varphi$ となり、

$$\langle J_R^0 \Omega, A_\varphi \Omega \rangle - \langle (A_\varphi)^* \Omega, J_R^0 \Omega \rangle = 0.$$

上の議論により項別には $=0$ となる。これは (16) の [] が

$$A \longrightarrow A_g, \quad g(x^0) = \delta(x^0) + \varphi(x^0)$$

としても変わらないことを意味している。

さらに $\int g(x^0) dx^0 = -1$ のようにとると、

$$g(x^0) = \frac{d}{dx^0} f(x^0), \quad f(x^0) = \theta(x^0) + \int_{-\infty}^{x^0} g(u) du$$

と書くことができる。ここで

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 \geq 0, \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases}$$

とすると、 $f(x^0)$ は $x^0 \rightarrow \pm\infty$ のとき $\frac{1}{x^0}$ の とんたへき よりも

速く減少して 0 になる。

もしも、

$$\chi_r(x^0) = \begin{cases} 1 & |x^0| \leq r-a \\ 0 & |x^0| > r \end{cases} \quad (a > 0 \text{ は定数})$$

なる $\chi_r(x^0) \in \mathcal{D}$ を用意して

$$B_r = - \int \chi_r(x^0) f(x^0) \cdot \tau_{x^0}(A) dx^0,$$

$$C_r = \int \left[\frac{d}{dx^0} (\{1 - \chi_r(x^0)\} f(x^0)) \right] \tau_{x^0}(A) dx^0 \quad (19)$$

とよくと、これが補題3に述べられた性質をもつ。

等一に、

$$\frac{d}{dy^0} \tau_{y^0}(B_r) \Big|_{y^0=0} + C_r = \int \frac{df(x^0)}{dx^0} \tau_{x^0}(A) dx^0$$

だから、これが (16) の右辺の A を置き換えよといふことに説明

したとおりである。等一に、作用

が光速 (= 1 とする) より速く伝

わらないとの仮定により

$$\tau_{x^0}(\mathcal{O}_{\theta_L}) \subset \mathcal{O}_{\theta_{L+|x^0|}}$$

だから (第3図), $A \in \mathcal{O}_{\theta_L}$ なら

$$B_r, \quad \frac{d}{dx^0} \tau_{x^0}(B_r) \Big|_{x^0=0} \in \mathcal{O}_{\theta_{L+r}}$$

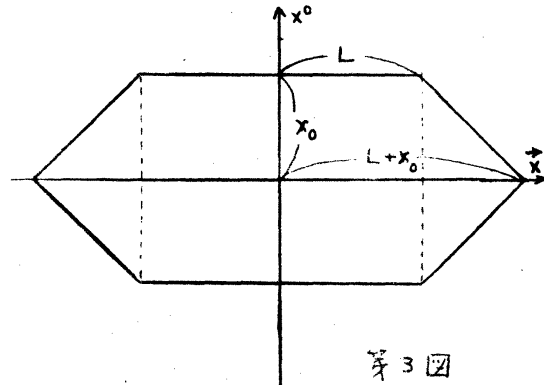
が分かる。等三に $\|C_r\|$ の減少率を $\|A\| < \infty$ が τ_{x^0} に

より保存されることと (19) なる

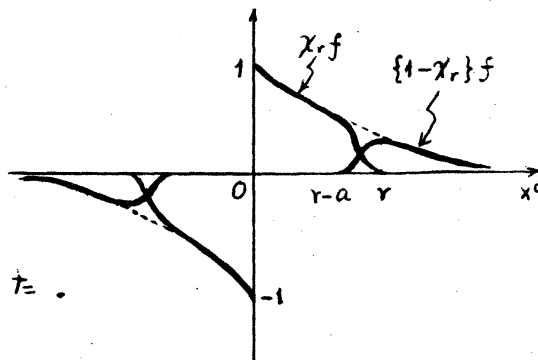
構成から明らかである (第4図

を参照) ■

これが定理1の証明が完結した。



第3図



§5 質量ゼロの粒子の存在

前節の仮定と相対論的に共変な形に補強すると、エネルギー・運動量の joint spectrum に質量 0 の粒子に相当する部分の存在すべきことがいえる。すなわち、何かある重、 $\Psi \in \mathcal{H}$ に $\Psi \neq 0$ で、

$$\langle \Psi, dE(p) \Psi \rangle = \lambda \delta(p^2) + \dots, \quad (\lambda \neq 0); \quad (20)$$

すなわち $E(p)$ は時空の推進とあたえるユニタリ演算子の単位分解、もちろん $p = (p^0, \vec{p})$ で、

$$p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2.$$

この結果によればエネルギー・スペクトルは $p^0 = 0$ まどつながら $\delta(p^2)$ のことになり、前節の結果は当然に含意される。しかし、今度の結果が単に前節の結果の相対論的共変な言い直し、なにしは拡張につくものか注意しなくてはならない。(20) の δ -関数がそのことを示している。

前節にならう理論の枠組を述べれば次のとおりである：—

1° 場の量子論。前節に同じ。

2° 時空 $R \ni x = (x^0, \vec{x})$ の推進群の連続ユニタリ表現 U_x があつて、

$$a) \quad A \in \mathcal{O}_\theta \longmapsto \tau_x(A) = U_x A U_x^* \in \mathcal{O}_{\theta+x}.$$

b) そのスペクトル分解、

$$U_x = \int \exp[i(p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})] dE(p),$$

のスペクトルは前方光円錐 $\overline{V^+} = \{p \mid (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \geq 0, p^0 \geq 0\}$ に含まれ、かつ

$$U_x \Omega = \Omega$$

なる $\Omega \in \mathcal{H}$ (真空状態) は $\rightarrow$ あり、 $z \rightarrow$ 1 限り Ω に関し z 巡回的 z あり。

c) $x \in \mathbb{R}^4 \mapsto \tau_x$ は強連続。

3° Ω の自己同型の 1-パラメータ群 $\Gamma: \gamma \mapsto \alpha_\gamma$ が $\rightarrow z$, これは四元ベクトル場 $j^\mu(x)$ ($\mu=0, 1, 2, 3$) の第 0 成分によ、 z 生成される。詳しく $< j >$ と,

a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ 上 z (非有界) 演算子 α 値 ε とする超関数 α 組

$$j^\mu(x) \text{ が } \rightarrow; (j^\mu(x))^* = j^\mu(x),$$

b) Ω は $j^\mu(f) = \int j^\mu(x) f(x) d^4x$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ の定義域に含まれ、 $\langle \Omega, j^\mu(f) \Omega \rangle = 0$,

$$c) U_x j^\mu(y) U_x^* = j^\mu(y+x),$$

$$d) \sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx^\mu} j^\mu(x) = 0, \quad (\text{"流れ" } j^\mu \text{ の保存}).$$

$$e) A \in \mathcal{O}_0 \text{ なら } \text{supp } f \cap \mathcal{O} = \emptyset \text{ なら } ,$$

$$\langle j^\mu(f) \Omega, A \Omega \rangle = \langle A^* \Omega, j^\mu(f) \Omega \rangle = 0,$$

$$f) \langle \Omega, j^\mu(x) j^\nu(y) \Omega \rangle \text{ は } \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \text{ の超関数},$$

g) 前節の (9) 式が

$$J_R^0 \equiv j^0(f_d f_R)$$

z も、 z 成り立つ。ただし、

$$f_R(\vec{x}) \in \mathcal{D}(R^3), \quad f_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & |\vec{x}| < R, \\ 0 & |\vec{x}| \geq R+a, \quad (a>0) \end{cases}$$

$$f_d(x^0) \in \mathcal{D}(R^1) \quad f_d(x^0) = 0 \quad |x^0| \geq d,$$

かつ,

$$\int f_d(x^0) dx^0 = 1.$$

注意 1 仮定 3^o-g の J_R^0 は保存則 3^o-d のおかげで $f_d(x^0)$ の形に $R \rightarrow \infty$ の極限で ———— による。正確に ———— と前節 (9) 式の右辺が $f_d(x^0)$ の形による。

注意 2 ———— 節の仮定のもとでは前節の仮定がすべて成り立つことを証明できる。特に前節の仮定 3^o-d はスペクトル条件などの場の理論の公理系から $\|J_R^0 \Omega\| \leq \text{const. } R^2$ の形で証明される [12]。

以上の枠組の中で Z 次の定理が証明される。証明は、場の理論の交換関係に対する積分表示の公式 [13, 12] を必要とするので、 $Z = Z$ は述べる。

定理 2 [14, 15] 上の仮定のもとで、もし前節 (9) につき

$$\frac{d}{dy} \langle \Omega, \alpha_f(A) \Omega \rangle \neq 0$$

なる $A \in \mathcal{O}$ が存在するならば、

$$\langle A\Omega, j^0(x)\Omega \rangle$$

の Fourier 変換が $\delta(p^2)$ -型の特異性をもつ ———— これは、この理論のエネルギー・運動量のスペクトルに質量 0 の粒子に相

当するものが含まれていないことを意味する

最後に線報[17]~[20]をつけ加えておく。この稿は、特に
[17]に夏うとこそが大きい。

REFERENCES

1. R. Haag and D. Kastler: An Algebraic Approach to Quantum Field Theory,
Jour. Math. Phys. 5 (1964) 848 - 861.
2. A.M. Gleason: J. of Rat. Mech. and Analysis 6 (1957) 885.
C. Piron: Survey of General Quantum Mechanics,
Univ. of Denver preprint, Oct. 1970.
3. J. von Neumann: Die Eindeutigkeit der Schrodinger Operatoren,
Math. Ann. 104 (1931) 570 - 578.
N. Straumann: A New Proof of von Neumann's Theorem Concerning
the Uniqueness of the Schrodinger Operators,
Helv. Phys. Acta 40 (1967) 518 - 524.
4. H. Ezawa: Jiyudo-Mugendai no Kei no Ryoshi-Rikigaku,
Nihon Buturi Gakkai-shi 25 (1970) 30 - 37.
5. M. Guenin and G. Velo: Automorphism and Broken Symmetries in
Algebraic Quantum Field Theories,
Princeton Univ. preprint, May, 1965.
G. Emch and C. Piron: Symmetry in Quantum Theory,
Jour. Math. Phys. 4 (1963) 469 - 473.
G. Emch and M. Guenin: Gauge Invariant Formulation of the BCS-Model,
Jour. Math. Phys. 7 (1966) 915 - 921.
6. N.N. Bogoliubov: On Some Problems of the Theory of Superconductivity,
Physics Suppl. (Congress on Many-Particle
Problems, Utrecht), S1 - 16 (1960).
Y. Nambu: Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory
of Superconductivity,
Phys. Rev. 117 (1960) 648 - 663.
N.N. Bogoliubov, D.N. Zubarev and Yu.A. Tserkovnikov: An Asymptotically
Exact Solution for the Model Hamiltonian of the
Theory of Superconductivity,
Soviet Physics JETP 12 (1961) 88 - 93.

- R. Haag: The Mathematical Structure of the Bardeen-Cooper-Schrieffer Model,
Nuovo Cimento 25 (1962) 287 - 299.
- H. Ezawa: The Representation of Canonical Variables as the Limit of
Infinite Space Volume, the Case of the BCS Model,
Jour. Math. Phys. 5 (1964) 1078 - 1090.
- Y. Kato: Spectrum of the BCS Reduced Hamiltonian in the Theory
of Superconductivity,
Prog. Theoret. Phys. 34 (1965) 734 - 753.
- Y. Kato and N. Mugibayashi: Friedrichs-Berezin Transformation and Its
Application to the Spectral Analysis of the BCS Reduced
Hamiltonian,
Prog. Theoret. Phys. 38 (1967) 813 - 831.
- W. Thirring and A. Wehl: On the Mathematical Structure of the BCS-Model,
Commun. Math. Phys. 4 (1967) 303 - 314.
- * * * * *
- Y. Nambu and G. Jona-Lasinio: Dynamical Model of Elementary Particles
based on an Analogy with Superconductivity, I,
Phys. Rev. 122 (1961) 345 - 356.
- H. Umezawa, Y. Takahashi and S. Kamefuchi: The Mass Level and the
Broken Symmetry in Terms of Inequivalent Representations,
Ann. Phys. (New York) 26 (1964) 336 - 363.
- L. Leplae and H. Umezawa: Boson Formalism in Superconductivity,
Jour. Math. Phys. 10 (1969) 2038 - 2046.
7. R. F. Streater: Spontaneous Breakdown of Symmetry in Axiomatic Theory,
Proc. Roy. Soc. (London) 287A (1965) 510-518.
8. F.A. Berezin: The Method of Second Quantization (tr. by N. Mugibayashi
and A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1966).
9. H. Ezawa: A Note on the Van Hove-Miyatake Catastrophe,
Prog. Theoret. Phys. 30 (1963) 545 - 549.
10. E. Lieb, J. Schultz and D. Mattis: Two Soluble Models of an
Antiferromagnetic Chain,
Ann. Phys. (New York) 16 (1961) 407 - 466.

S. Katsura: Statistical Mechanics of the Anisotropic Linear Heisenberg Model, Phys. Rev. 127 (1962) 1508 - 1518.

See also

J. Ginibre: Proof of the Existence of Spontaneous Magnetization in the Anisotropic Heisenberg Ferromagnet,
Lecture given at "The Colloque du C.N.R.S.
Gif-sur-Yvette, May, 1969.

J. Ginibre: Existence of Phase Transitions for Quantum Lattice Systems, Commun. Math. Phys. 14 (1969) 205 - 234.

11. D. Kastler, D.W. Robinson and J.A. Swieca: Conserved Currents and Associated Symmetries; Goldstone Theorem,
Commun. Math. Phys. 2 (1966) 108 - 120.

12. H. Araki, K. Hepp and D. Ruell: On the Asymptotic Behaviour of Wightman Functions in Space-like Direction,
Helv. Phys. Acta 35 (1962) 164 - 174.

13. R. Jost and H. Lehmann: Nuovo Cimento 5 (1957) 1598.

F.J. Dyson: Integral Representation of Causal Commutators,
Phys. Rev. 110 (1958) 1460 - 1464.

14. J. Goldstone: Field Theories with Superconductor Solutions,
Nuovo Cimento 19 (1961) 154 - 164.

J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg: Broken Symmetries,
Phys. Rev. 127 (1962) 965 - 970.

G.S. Guralnik, T. Kibble and C.R. Hagen: Global Conservation Laws and Massless Particles,
Phys. Rev. Letters 13 (1964) 585 - 587.

R.F. Streater: Generalized Goldstone Theorem,
Phys. Rev. Letters 15 (1965) 475 - 476.

15. H. Ezawa and J.A. Swieca: Spontaneous Breakdown of Symmetries and Zero-Mass States,
Commun. Math. Phys. 5 (1967) 330 - 336.

16. J.A. Swieca: Range of Forces and Broken Symmetries in Many-Body Systems,
Commun. Math. Phys. 4 (1967) 1 - 7.
 - H. Stern: Broken Symmetry, Sum Rules and Collective Modes in
Many-Body Systems,
Phys. Rev. 147 (1966) 94 - 147.
 17. D. Kastler: Broken Symmetries and the Goldstone Theorem,
Proc. Int'l Conf. on Particles and Fields,
Rochester 1967 (ed. by C.R. Hagen, G. Guralnik
and V.S. Mazur, Interscience, 1967).
 18. R.F. Streater: Spontaneous Breakdown of Symmetry,
Mathematical Theory of Elementary Particles,
(ed. by R. Goodman and I.E. Segal,
The M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1966).
 19. Th. A.J. Maris: Bemerkungen zu gebrochenen Symmetrien,
Zeits. f. Phys. 229 (1969) 392 - 402.
 20. C.A. Orzalesi: Charges and Generators of Symmetry Transformations
in Quantum Field Theory,
Rev. Mod. Phys. 42 (1970) 381 - 408.
- 余白を利用して上に拾い落した論文が手もとにあるものをメモしておく：
- S.A. Bludman and A. Klein: Broken Symmetries and Massless Particles,
Phys. Rev. 131 (1963) 2364 - 2372.
 - J. Łopuszanski and H. Reeh: On a Quantum Field Theory with
Degenerate Vacuum with a Special Type of Symmetry,
Inst. for Adv. Study preprint, March 1965.
Jour. Math. Phys. ?
 - S. Coleman: The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World,
CERN preprint, August 1965. Phys. Rev. ?
 - G.S. Guralnik and C.R. Hagen: Massless Particles and the Goldstone Th.
Imperial College preprint, 1964 (unpublished).
 - N.G. Deshpande and S.A. Bludman: Spontaneously Broken Symmetry and the
Question of Massless Particles in a Model Field Theory,
Phys. Rev. 146 (1966) 1186 - 1194.