

保型 L 関数と Whittaker 関数 ($Sp(4)$ の場合)

三重大教育 古関 春隆 (H. Koseki)

M. E. Novodvorsky による $GS_p(4)$ 上の zeta integral に関する結果の概略を述べます。もとの論文は

Novodvorsky, Automorphic L -functions for the symplectic group GS_p4 , in AMS Proc. Symp. Pure Math. 33, 1979
ですが, これは関数体上の $GS_p(4)$ を扱っています。しかし
D. Bump の survey

Bump, The Rankin-Selberg method: a survey,
in "Number Theory, Trace Formulas and ...", 1989

では代数体上の場合の Novodvorsky integral についての同様の結果を述べているので, ここでも代数体上の場合を考える事にして, 以下

F : 代数体, $\mathcal{O}$: F の整数環, A : F の adèle 環
とします。

1. Langlands L 関数

G を F 上の GS_{p4} とする:

$$G(F) = \{ g \in GL_4(F) ; {}^t g J g = \lambda(g) J, \lambda(g) \in F^\times \},$$

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}.$$

$G(A)$ の standard な maximal compact subgroup を K とする:

$$K = \prod_v K_v ;$$

$$v: \text{finite} \Rightarrow K_v = G(\mathcal{O}_v),$$

$$v: \text{real} \Rightarrow K_v = U(2),$$

$$v: \text{complex} \Rightarrow K_v \text{ は } Sp_4(\mathbb{C}) \text{ の compact real form.}$$

この K に関して class 1 であるような $G(A)$ の cuspidal な保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ を任意に固定し, 以下, その L 関数を問題にする。(後で, π が generic という仮定を加える。)

G の連結 L 群 ${}^L G^\circ$ は $GS_{p4}(\mathbb{C})$ になる。その maximal torus ${}^L T^\circ$ を

$${}^L T^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} ; \alpha_i \in \mathbb{C}^\times, \alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3 \right\}$$

と定め, ${}^L G^\circ$ の ${}^L T^\circ$ に関する Weyl 群を W とおく。 v が F の有限素点のとき, Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F_v), K_v)$ の佐武同型を通して次の 1:1 対応が得られる:

$$\{G(F_p) \text{ の class 1 表現 } \} \longleftrightarrow {}^L T^\circ \bmod W.$$

この対応によって $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ の成分 π_v が $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ に対応しているとする。 ${}^L G^\circ$ の有限次元表現 χ に対し

$$L_v(\Delta, \pi_v, \chi) = \det(1 - \chi(\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)) q^{-s})^{-1}$$

(q は F_v の剰余体の元の個数) において有限素点 v に於る Euler 因子を定義する。 ${}^L G^\circ$ は 4 次の Spin 表現 spin をもつが, これに対しては

$$L_v(\Delta, \pi_v, \text{spin}) = \prod_{k=1}^4 (1 - \alpha_k q^{-s})^{-1}$$

である。

v が無限素点のときも $L_v(\Delta, \pi_v, \chi)$ をしかるべく定義して, Langlands L 関数 $L(\Delta, \pi, \chi)$ を次のように定める:

$$L(\Delta, \pi, \chi) = \prod_v L_v(\Delta, \pi_v, \chi).$$

2. Whittaker 関数

G の minimal parabolic subgroup の unipotent radical

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1-x_2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_4 & \\ & 1 & x_1 & x_3 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

をとって N に関する Whittaker model を考える。 A/F の指標 $\psi = \prod_v \psi_v$ を, すべての有限素点で不分岐かつ non-trivial で, 無限素点でもしかるべき指標になるようにとる。

素点 v における Whittaker 関数の空間 $\mathcal{W}_v$ を

$$\mathcal{W}_v = \{ f : G(F_v) \rightarrow \mathbb{C} \text{ smooth};$$

$$f(n g) = \psi_v(x_1 + x_2) f(g) \text{ for}$$

$$n = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_3 x_4 & & \\ & 1 & x_1 x_3 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in N(F_v), g \in G(F_v) \}$$

と定める。(v が無限素点ならば増大度条件を加える必要がある。) このとき Shalika et al の重複度 1 定理より

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(\pi_v, \mathcal{W}_v) \leq 1.$$

以下すべての v で上の次元 = 1 であると仮定し, $W_v \in \mathcal{W}_v$ を $\cdot \pi_v$ を生成し, $\cdot \text{class 1}$ で, $\cdot W_v(1) = 1$ となるようにとっておく。

π を生成する $G(A)$ 上の保型形式で K -fixed なもの ϕ をとり, 付随する Whittaker 関数 $W : G(A) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$W(g) = \int_{(A/F)^4} \phi \left(\begin{pmatrix} 1 & x_2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_3 x_4 & & \\ & 1 & x_1 x_3 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right) \\ \times \psi(-x_1 - x_2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

と定める。ただしこれが消えないことも仮定する。すると重複度 1 定理より

$$W(\prod_v g_v) = C \times \prod_v W_v(g_v), \quad C \neq 0.$$

3. $G \times GL(1)$ 上の convolution

上の ϕ だけでなく Hecke 指標 $\psi = \prod_v \psi_v : A^\times/F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ も取って, global zeta integral $Z(s; \phi, \psi)$ をつくる:

$$Z(s; \phi, \psi) = \int_{A^\times/F^\times} \int_{(A/F)^3} \phi \left(\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_4 \\ & 1 & -x_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \psi(-x_2) \psi(y) \|y\|^{s-\frac{1}{2}} dx dy.$$

この $Z(s; \phi, \psi)$ は s の entire function になり, 関数等式

$$Z(s; \phi, \psi) = Z(1-s; \hat{\phi}, \hat{\psi})$$

をみたす。ただし $\hat{\phi}$ は π の反値表現の " ϕ " で, $\hat{\psi}(y) = \psi(y^{-1})$ 。

さらに次が成立する:

Basic Identity: $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ のとき, 0 でない定数倍を除いて

$$Z(s; \phi, \psi) = \prod_v \int_{F_v^\times} \int_{F_v} W_v \left(\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \right) \phi_v(y) \times \|y\|^{s-\frac{3}{2}} dx dy. //$$

これは A/F 上の Fourier 展開を用いて "初等的に" 証明できる。

そこで各素点 v において local zeta integral

$$\int_{F_v^\times} \int_{F_v} W_v \left(\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \right) \phi_v(y) \|y\|^{s-\frac{3}{2}} dx dy$$

を計算することが問題になる。 v が有限素点のときは加藤 - Casselman-Shalika による Whittaker 関数の explicit formula を用いて計算できて, local zeta integral は

$$L_v(\Delta, \phi \times \psi, \text{spin} \times 1) = \prod_{p=1}^4 (1 - \alpha_p \psi(p) q^{-\Delta})^{-1}$$

に一致することが示される。

以上より

定理 1. $L(\Delta, \phi \times \psi, \text{spin} \times 1) = \prod_v L_v(\Delta, \phi \times \psi, \text{spin} \times 1)$ は全 Δ 平面上 entire な関数に解析接続され, $\Delta \mapsto 1-\Delta$ に関し関数等式をみたす。 //

ここで関数等式の具体形は, 無限素点 v における因子が計算できれば, 決定できる。

4. $G \times GL(2)$ 上の convolution

F 上の代数群

$$H = \{ (h_1, h_2) \in GL(2) \times GL(2); \det h_1 = \det h_2 \}$$

の G の埋め込み J を次のように取る:

$$J\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

$G(A)$ 上の ϕ とともに $GL(2, A)$ 上の保型形式 ψ で K' -fixed vector であるようなものとする。ここで K' は $GL(2, A)$ の standard maximal compact subgroup とする。 $B \subset GL(2)$ を上三角群として, $GL(2, A)$ 上の Eisenstein 級数を次のように定義する:

$$E(g, \lambda) = \xi_F(2\lambda) \sum_{g \in B(F) \backslash GL(2, F)} I_\lambda(gg),$$

$\xi_F(\lambda)$ は F の Dedekind zeta に Γ 因子を補ったもの,

$$I_\lambda\left(\begin{pmatrix} y_1 & x \\ & y_2 \end{pmatrix} k\right) = \left\| \frac{y_1}{y_2} \right\|^\lambda \quad (k \in K').$$

これらを用いて global zeta integral を

$$Z(\lambda; \phi, \psi) = \int_{Z(A)H(F) \backslash H(A)} \phi(J(h_1, h_2)) E(h_2, \lambda) \psi(h_1) \\ \times d(h_1 \times h_2)$$

と定義すると, これについて解析接続と関数等式が示される。

さらに

Basic Identity: $\operatorname{Re}(\lambda) \gg 0$ のとき

$$Z(\lambda; \phi, \psi) = \xi_F(2\lambda) \prod_v \int_{F_v^\times} \int_{F_v^\times} W_v\left(\begin{pmatrix} y_1 y_2 & \\ & y_1 y_2^{-1} \end{pmatrix}\right) \\ \times W'_v\left(\begin{pmatrix} y_1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right) \|y_1 y_2\|^\lambda \|y_1 y_2\|^{-2} d^\times y_1 d^\times y_2 //$$

ここで W_v は ϕ の, W'_v は ψ の Whittaker 関数である。

この local zeta integral を計算して, 結局次を得る:

定理 2. $L(\lambda, \phi \times \psi, \text{spin} \times \text{standard})$ は全 λ 平面に解析接続されて関数等式をみたす。 //