

不変成分をもつ Klein 群の安定性.

山形大. 教養 仲田正躬

1. Klein 群の安定性.

Möbius 変換全体の群を Möb と書く. すなわち

$$\text{Möb} = \left\{ g(t) = \frac{at+b}{ct+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc=1 \right\}$$

以下 Möb と $SL(2, \mathbb{C})/\pm I$ とを同一視する.

Möb の元 $g(t) = (at+b)(ct+d)^{-1}$ に対して, g が parabolic とは $\pi^2 g = (a+d)^2 = 4$ なる事を言う. g が elliptic とは $\pi^2 g = (a+d)^2 \in [0, 4)$ なる事を言う. その他の場合 g を loxodromic と言う.

G を finitely generated Kleinian group とある. i.e. G は finitely generated & discontinuous subgroup of Möb.

$\{r_1, \dots, r_N\}$ を a system of generators for G とし fix する.

$\theta : G \rightarrow \text{Möb}$ を into homomorphism とある. この時 θ が parabolic homomorphism とは $\pi^2 \theta(g) = 4$ if $g \in G$ parabolic

なる事を言う. $\mathcal{P}$ は G から Möb の中への *parabolic homomorphism* の全体を $\text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ と書くことにする.

$\text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ の元 θ と $(\theta(r_1), \dots, \theta(r_N)) \in \text{Möb}^N$ (Möb の N コの直積空間) とを同一視して $\text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \subset \text{Möb}^N$ と見る.

w を $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の *quasi-conformal self-mapping* とし, さらに $w \circ G \circ w^{-1} \subset \text{Möb}$ とする. この時 w を *quasi-conformal mapping compatible with G* という. 又 $\theta(g) = w \circ g \circ w^{-1}$ で定義される *isomorphism* $\theta: G \rightarrow w \circ G \circ w^{-1} (\subset \text{Möb})$ を G の *quasi-conformal deformation* という. $\mathcal{P}$ は G の *quasi-conformal deformation* 全体を $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ と書くことにする. 前と同様に $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \ni \theta \mapsto (\theta(r_1), \dots, \theta(r_N)) \in \text{Möb}^N$ なる対応により $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \text{Möb}^N$ と見る. この時 $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ である.

定義. *finitely generated Kleinian group* G が *quasi-conformally stable* とは, Möb^N における *identity homomorphism* $(r_1, \dots, r_N)$ の近傍 $\cup$ が存在して

$$\text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \cap \cup = \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \cap \cup$$

となる事を言う.

この *quasi-conformal stability* の定義は G の generator $\{r_1, \dots, r_N\}$ のとり方に *independent* である.

不変成分をもつ *finitely generated Kleinian group* に対し

7 quasi-conformal stability と同値な条件を, その cohomology space の構造を調べる事に与える.

2. Klein 群の cohomology.

$\Pi = \{v(t) = at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{C}\}$ とする. $GL(\Pi)$ を group of all non-singular linear maps of Π とする. $\tau = \tau$ $f: G \rightarrow GL(\Pi)$ を, $f(g)(v)(t) = v(g(t))g'(t)^{-1}$ で定義すると f は anti-homomorphism i.e. $f(g_1 \circ g_2) = f(g_2) \circ f(g_1)$ for all $g_1, g_2 \in G$ である.

$z: G \rightarrow \Pi$ a mapping に対して, z が cocycle とは

$$z(g_1 \circ g_2) = f(g_2)(z(g_1)) + z(g_2) \quad \text{for all } g_1, g_2 \in G$$

なる事を言う. cocycle z が coboundary とは, ある $v \in \Pi$ が存在して, すべての $g \in G$ に対して

$$z(g) = f(g)(v) - v$$

なる事を言う. cocycles 全体を $Z^1(G, \Pi)$, coboundaries 全体を $B^1(G, \Pi)$ と書く. 又 $Z^1(G, \Pi)/B^1(G, \Pi) \equiv H^1(G, \Pi)$ を cohomology space という.

Δ を G -invariant union of components of $\Omega(G)$ とする.

($\Omega(G)$: G の不連続領域) 　この時 cocycle z が Δ -parabolic cocycle とは, Δ/G の任意の puncture に対応する parabolic cyclic subgroup G_0 of G に対して $z|_{G_0} \in B^1(G_0, \Pi)$ なることを

言う. とくにすべての parabolic cyclic subgroup G_0 of G に対して $z|_{G_0} \in B'(G_0, \Pi)$ なる時 z を parabolic cocycle と言う. Δ -parabolic cocycles 全体を $PZ'_\Delta(G, \Pi)$ と書き, 又 parabolic cocycles 全体を $PZ'(G, \Pi)$ と書く. $PZ'_\Delta(G, \Pi)/B'(G, \Pi) \cong PH'_\Delta(G, \Pi)$ を Δ -parabolic cohomology space と言い, 又 $PZ'(G, \Pi)/B'(G, \Pi) \cong PH'(G, \Pi)$ を parabolic cohomology space と言う.

λ を Poincaré metric on Δ とし, $A(\Delta, G)$ を cusp forms for G on Δ とする. すなわち

$$A(\Delta, G) = \{ \varphi : \text{holomorphic on } \Delta, \varphi(g(t))g'(t)^2 = \varphi(t) \text{ for } \forall t \in \Delta, \forall g \in G \text{ \& } |X^2\varphi| : \text{bounded on } \Delta \}$$

この時

$$\exists \beta^* : A(\Delta, G) \rightarrow PH'_\Delta(G, \Pi) \quad (\text{anti-linear, injective}).$$

β^* を Bers の写像 と言う. (Bers [1], Kra [4])

Δ 上の holomorphic function F が Eichler integral とは

$$F(g(t))g'(t)^{-1} - F(t) \in \Pi \quad \text{for all } g \in G$$

なる事を言う. Δ 上の Eichler integral F が bounded とは

$$\frac{d^3}{dt^3} F(t) \in A(\Delta, G)$$

なる事を言う. $\mathcal{E}$ は Δ 上の bounded Eichler integrals の全

体を Π で割ったものを $E_b(\Delta, G)$ と書く. この時

$$\alpha : E_b(\Delta, G) \rightarrow PH'_\Delta(G, \Pi)$$

を $\alpha(\langle F \rangle)(g)(t) = F(g(t))g'(t)^{-1} - F(t)$ で定義すれば α は linear
かつ injective である. (Kra [4]) さらに

$$PH_{\Delta}^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Delta, G)) \oplus \alpha(E_{\Delta}(\Delta, G)) \quad (\text{Kra [4]}).$$

今 Δ と Δ' を 2 つの G -invariant union of components of $\Omega(G)$ とし, かつ $\Delta \subset \Delta'$ とすると $A(\Delta, G) \subset A(\Delta', G)$ であり,
又 $PH_{\Delta}^1(G, \Pi) \subset PH_{\Delta'}^1(G, \Pi)$ である. そこで次の事を考える.
すなわち, G を不変成分をもつ finitely generated Kleinian
group とした時

$$PH_{\Omega(G)}^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G)) \stackrel{?}{\Leftrightarrow} G: \text{quasi-conformally stable}.$$

所で, とくに $\beta^*(A(\Omega(G), G)) \subset PH^1(G, \Pi)$ (Kra [4]) であるから
次の事を問題にする.

$$PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G)) \stackrel{?}{\Leftrightarrow} G: \text{quasi-conformally stable}$$

以下でこの問題に対して肯定的な解を与える. 又 G の quasi-
conformal deformation に関する一つの応用も与える.

3. Cohomology と quasi-conformal stability.

$\{r_1, \dots, r_N\}$ を a system of generators for G とする.

$$\text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \ni \theta \mapsto (\theta(r_1), \dots, \theta(r_N)) \in \text{Möb}^N$$

すなわち $\text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \subset \text{Möb}^N$. $\text{Möb} = SL(2, \mathbb{C})/\pm I$: complex Lie
group. $\mathfrak{g}$ は Möb の Lie algebra を $\mathfrak{g}$ とすれば

$$\mathfrak{g} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) : a+d=0 \right\}.$$

以下, Möb の単位元 e における接空間 $T_e(\text{Möb})$ と $\mathfrak{g}$ とを identify する.

$g \in \text{Möb}$ に対して, $Ad(g) \in GL(\mathfrak{g})$ ($GL(\mathfrak{g})$: group of all non-singular linear maps of $\mathfrak{g}$) を $Ad(g)(X) = d(A_g)_e(X)$ for $X \in \mathfrak{g} (= T_e(\text{Möb}))$ で定義する. 1-1 $A_g: \text{Möb} \rightarrow \text{Möb}$ は $A_g(h) = g^{-1} \circ h \circ g$ for $h \in \text{Möb}$ なる写像. この時 $Ad: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ は anti-homomorphism i.e. $Ad(g_1 \circ g_2) = Ad(g_2) \circ Ad(g_1)$ for all $g_1, g_2 \in G$. 従, 2 前と同様に parabolic cohomology space

$PH^1(G, \mathfrak{g}) \equiv PZ^1(G, \mathfrak{g}) / B^1(G, \mathfrak{g})$ を得る. すなわち

$z \in PZ^1(G, \mathfrak{g}) \Leftrightarrow z(g_1 \circ g_2) = Ad(g_2)(z(g_1)) + z(g_2)$ for all $g_1, g_2 \in G$ &

$\forall g \in G: \text{parabolic}$ に対して $\exists X \in \mathfrak{g}$ such that $z(g) = Ad(g)(X) - X$.

又 $z \in B^1(G, \mathfrak{g}) \Leftrightarrow \exists X \in \mathfrak{g}$ such that $z(g) = Ad(g)(X) - X$ for all $g \in G$.

$J: \mathfrak{g} \rightarrow \Pi$ を $J(X) = -ct^2 + 2at + b$ で定義する. 1-1 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. この時 $J(Ad(g)(X)) = P(g)(J(X))$. 従, J は isomorphism $\tilde{J}: PZ^1(G, \mathfrak{g}) \rightarrow PZ^1(G, \Pi)$ を induce する.

($\tilde{J}(z)(g) = J(z(g))$ と可成り). 又この isomorphism は $PH^1(G, \mathfrak{g})$ と $PH^1(G, \Pi)$ の間の isomorphism を induce する.

よって $z \in PZ^1(G, \mathfrak{g})$ と (1-1) 時, z は uniquely determined by $(z(r_1), \dots, z(r_N)) \in \mathfrak{g}^N = T_e(\text{Möb})^N$. $\exists = \tau$

$$PZ^1(G, \mathfrak{g}) \ni z \mapsto (z(r_1), \dots, z(r_N)) \in \mathfrak{g}^N$$

なる対応により $PZ^1(G, \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^N$ と見る.

$\{\omega_\alpha(g_1, \dots, g_N)\}_{\alpha \in A}$ is set of all words in N letters $g_1, \dots, g_N$ such that $\omega_\alpha(r_1, \dots, r_N) = e$ for all $\alpha \in A$ and $\exists$. $\wedge \{\omega_\beta(g_1, \dots, g_N)\}_{\beta \in B}$ is set of all words in N letters $g_1, \dots, g_N$ such that $\omega_\beta(g_1, \dots, g_N)$ is parabolic element. $\tau = \tau''$ $W_\alpha: \text{Möb}^N \rightarrow \text{Möb}$ & $\forall$
 $W_\beta: \text{Möb}^N \rightarrow \mathbb{C}$ is defined as follows.

$$W_\alpha(g_1, \dots, g_N) = \omega_\alpha(g_1, \dots, g_N) \text{ for } (g_1, \dots, g_N) \in \text{Möb}^N,$$

$$W_\beta(g_1, \dots, g_N) = \tau^2 \omega_\beta(g_1, \dots, g_N) - 4 \text{ for } (g_1, \dots, g_N) \in \text{Möb}^N.$$

この時

$$\{\bigcap_\alpha W_\alpha^{-1}(e)\} \cap \{\bigcap_\beta W_\beta^{-1}(0)\} = \text{Hom}_P(G, \text{Möb}).$$

さらに $L(r_1, \dots, r_N)$ is left translation of Möb^N and $\tau = \tau''$ 時

$$\{\bigcap_\alpha \ker d(W_\alpha \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e, \dots, e)}\} \cap \{\bigcap_\beta \ker d(W_\beta \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e, \dots, e)}\}$$

$$= \text{PZ}'(G, \mathbb{Q}) \subset T_e(\text{Möb})^N \quad (\text{see [3], [8]})$$

λ is Poincaré metric on $\Omega(G)$ and $\mathcal{L}$, $A_1(\Omega(G), G) =$

$\{\varphi \in A(\Omega(G), G) : |\lambda^{-2} \varphi| < 1\}$ and $\exists$. $\varphi \in A_1(\Omega(G), G)$ is for

τ $\mu = \lambda^{-2} \bar{\varphi}$ and $\mathcal{L}$, w^μ is μ -conformal self-mapping of $\hat{\mathbb{C}}$ such that $w^\mu(0) = 0$, $w^\mu(1) = 1$, $w^\mu(\infty) = \infty$ and $\exists$, w^μ is compatible with G if $\exists$. 従って τ $g \in \text{Möb}$ is for τ $w = g \circ w^\mu$ and $\exists$ $\gamma(g, \varphi) \in \text{Möb}$ such that $w \circ \gamma = \gamma(g, \varphi) \circ w$ for all $\gamma \in G$. τ

τ $f: \text{Möb} \times A_1(\Omega(G), G) \rightarrow \text{Möb}^N$ is

$$f(g, \varphi) = (r_1(g, \varphi), \dots, r_N(g, \varphi))$$

is defined. この時 $f(\text{Möb} \times A_1(\Omega(G), G)) \subset \text{Hom}_{\mathbb{Q}\mathbb{C}}(G, \text{Möb})$

$\subset \text{Hom}_p(G, \text{Möb})$. 2.3.12

$$d(L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f)_{(e, o)} (T_e(\text{Möb}) \times T_o(A_1(\Omega(G), G))) \subset PZ^1(G, \mathcal{G})$$

いあり, か?

$$\tilde{T}(d(L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f)_{(e, o)} (T_e(\text{Möb}) \times T_o(A_1(\Omega(G), G))))$$

= space of cocycles that correspond to Bers cohomology space $\beta^*(A(\Omega(G), G))$ (Gardiner & Kra [3])

従, 次の図を得る.

$$\begin{array}{ccc} \text{Möb} \times A_1(\Omega(G), G) & \xrightarrow{L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f} & T_e(\text{Möb})^N \\ & & \downarrow d(W_\alpha \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e \dots e)} \\ & & \text{Möb}^N \\ & & \downarrow W_\alpha \circ L(r_1, \dots, r_N) \\ T_e(\text{Möb}) \times T_o(A_1(\Omega(G), G)) & \xrightarrow{d(L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f)_{(e, o)}} & T_e(\text{Möb})^N \\ & & \downarrow d(W_\beta \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e \dots e)} \\ & & \mathbb{C}^N \end{array}$$

$$d(L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f)_{(e, o)} (T_e(\text{Möb}) \times T_o(A_1(\Omega(G), G))) \subset PZ^1(G, \mathcal{G}) \text{ であるか}$$

5

$$d(L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f)_{(e, o)} (T_e(\text{Möb}) \times T_o(A_1(\Omega(G), G)))$$

$$\subset \left\{ \bigcap_{\alpha} \ker d(W_\alpha \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e \dots e)} \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\beta} \ker d(W_\beta \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e \dots e)} \right\}.$$

従, 7 今 $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$ とする

$$d(L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f)_{(e, o)} (T_e(\text{Möb}) \times T_o(A_1(\Omega(G), G)))$$

$$= \left\{ \bigcap_{\alpha} \ker d(W_\alpha \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e \dots e)} \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\beta} \ker d(W_\beta \circ L(r_1, \dots, r_N))_{(e \dots e)} \right\}$$

従, 7 Weil [8] より $\exists U'$: neighborhood of $(e, \dots, e)$ in Möb^N

such that

$$\begin{aligned} & \{L(r_1^{-1}, \dots, r_N^{-1}) \circ f(\text{Möb} \times A_1(\Omega(G), G))\} \cap U' \\ &= \left\{ \bigcap_{\alpha} (W_{\alpha} \circ L(r_1, \dots, r_N))^{-1}(e) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\beta} (W_{\beta} \circ L(r_1, \dots, r_N))^{-1}(o) \right\} \cap U' \end{aligned}$$

すなわち

$$f(\text{Möb} \times A_1(\Omega(G), G)) \cap U = \left\{ \bigcap_{\alpha} W_{\alpha}^{-1}(e) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\beta} W_{\beta}^{-1}(o) \right\} \cap U$$

for $U = L(r_1, \dots, r_N)(U') : \text{neighborhood of } (r_1, \dots, r_N) \text{ in } \text{Möb}^N. - \bar{\gamma}$

$$f(\text{Möb} \times A_1(\Omega(G), G)) \subset \text{Hom}_{\mathcal{G}_C}(G, \text{Möb}),$$

$$\left\{ \bigcap_{\alpha} W_{\alpha}^{-1}(e) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\beta} W_{\beta}^{-1}(o) \right\} = \text{Hom}_P(G, \text{Möb}).$$

よって $\text{Hom}_{\mathcal{G}_C}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_P(G, \text{Möb})$. 従って,

$$\text{Hom}_P(G, \text{Möb}) \cap U = \text{Hom}_{\mathcal{G}_C}(G, \text{Möb}) \cap U.$$

従って, G は quasi-conformally stable.

以上により, G が finitely generated Kleinian group であり, $\text{PH}^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$ ならば G は quasi-conformally stable であることが示された. (なお, 以上の証明方法は, 本質的に Gardiner & Kra [3] に基づく.)

次に G を, 不変成分をもつ finitely generated Kleinian group とする. $\gamma = \bar{\gamma}$, このような G に対して, G : quasi-conformally stable $\Rightarrow \text{PH}^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$ を示す. そのために Maskit の Combination Theorem I, II を用いて, G を基本的な群に分解する. (Maskit [5])

(1). Γ を non-elementary Kleinian group, Γ_1, Γ_2 を finitely generated Kleinian group とし, さらに $\Gamma \stackrel{I}{=} \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$

とする. (i.e. Γ は, Maskit の Combination Theorem I により, 部分群 Γ_1, Γ_2 から generate されるとする.) $\therefore \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ は parabolic cyclic か elliptic cyclic か もしくは identity のみとする. この時 Γ が quasi-conformally stable なら Γ_1, Γ_2 も共に quasi-conformally stable である. (Nakada [7])

(2). Γ を non-elementary Kleinian group, Γ_1 を finitely generated Kleinian group, $g \in \text{Möb}$ とし, さらに $\Gamma \stackrel{\text{II}}{=} \langle \Gamma_1, g \rangle$ とする. (i.e. Γ は Maskit の Combination Theorem II により 部分群 Γ_1 及び $g \in \text{Möb}$ から generate されるとする.) $\therefore$ conjugated subgroup (see Maskit [5]) は parabolic cyclic か elliptic cyclic か もしくは identity のみとする. この時, Γ が quasi-conformally stable なら Γ_1 も quasi-conformally stable である. (Nakada [7])

$\therefore$ G を不変成分をもつ finitely generated Kleinian group とする. この時 $G_1, \dots, G_s$ (G_i : elementary group か finitely generated quasi-Fuchsian group か もしくは finitely generated totally degenerate group without APT's) が存在して G は $G_1, \dots, G_s$ から generate される. ただし generate のされ方は Maskit の Combination Theorem I, II の仮定を満たすように generate される. (see Maskit [5]) (注. elementary groups, finitely generated quasi-Fuchsian groups, finitely generated

totally degenerate groups without APT's を基本的な群という)
 今, G を quasi-conformally stable とする. この時, 上の2
 つの結果(1), (2) を次々に応用する事により, $G_1, \dots, G_n$ が
 quasi-conformally stable である事を得る. 一方 totally
 degenerate groups without APT's は not quasi-conformally
 stable (例えば Gardiner & Kra [3]). 従って $G_1, \dots, G_n$ は
 elementary group であるか finitely generated quasi-Fuchsian
 group である. 所で $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$ である事と $G_1, \dots,$
 G_n が elementary か finitely generated quasi-Fuchsian である
 事とは同値. (Nakada [6]). 従って G が quasi-conformally
 stable ならば $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$.

以上により, 不変成分をもつ finitely generated Kleinian
 group G に対して, G : quasi-conformally stable $\Leftrightarrow PH^1(G, \Pi)$
 $= \beta^*(A(\Omega(G), G))$ が示された. さらに Nakada [6] とを合わせ
 ると次の定理を得る.

定理. G を不変成分をもつ finitely generated Kleinian
 group とすると次の3つの条件は同値である.

- ① G は quasi-conformally stable.
- ② $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$
- ③ G は Maskit の Combination Theorem I, II により elementary
 groups の finitely generated quasi-Fuchsian groups $G_1, \dots, G_n$

に分解される.

この系として次を得る.

系. G を不変成分をもつ finitely generated Kleinian group とし, w を quasi-conformal self-mapping of $\hat{\mathbb{C}}$ compatible with G とする. この時 G が quasi-conformally stable ならば $w \circ G \circ w^{-1}$ も又 quasi-conformally stable である.

参考文献

- [1] L. Bers : Inequalities for finitely generated Kleinian groups, J. d'Analyse Math., 18 (1967), 23-41.
- [2] L. Bers : On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I, Ann. of Math., 91 (1970), 570-600.
- [3] F. Gardiner and I. Kra : Quasi-conformal stability of Kleinian groups, Indiana Univ. Math. J., 21 (1972) 1037-1059.
- [4] I. Kra : On cohomology of Kleinian groups II, Ann. of Math., 90 (1969), 575-589.
- [5] B. Maskit : Decomposition of certain Kleinian groups, Acta Math., 130 (1973), 243-263.

- [6] M. Nakada : Cohomology of finitely generated Kleinian groups with an invariant component, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 699-711.
- [7] M. Nakada : Quasi-conformal stability of finitely generated function groups, to appear.
- [8] A. Weil : Remarks on cohomology of groups, Ann. of Math., 80(1964), 149-157.