

核子-核子散乱 Phase

Shift の計算

大阪市大 理 野田 松太郎

§1. 序 論

現実の核子-核子散乱問題に、Nambu-Salpeter-Bethe 方程式 (N-S-B 方程式) が適用され、数値的に解かれ始めている。その一歩として、核子線の折れ曲がりを見捨て、 $PS(PS)$ 相互作用の ladder 近似の下で、uncoupled equation に対する計算が、elastic region で終りしている。^{1), 2)}

我々の研究は、この π 中子交換の結果を下にして、核子-核子散乱を、現象論を用いずにどこまで N-S-B 方程式により再現し得るかを、「3-Meson 模型」(π , scalar 及び vector) の立場に変わって統括している。この場合、low-energy の散乱 parameter である scattering length a 及び effective range r_e と、field theoretical に計算し得るので、低エネルギーから高エネルギーまでの統一した記述のために、我々の方法は、特に有効な手段になり得ると思う。³⁾ §2.

において、我々の数値計算のための formalism が与えられ、 π -ladder での計算結果及び、対応する三次元計算⁴⁾及び、分散式による計算⁵⁾との比較が §3. において行なわれる。§4. では、「3-Meson 模型」へのアプローチの一結果が S_0 状態について示され、諸結果が §5. においてまとめられる。

§2. 数値計算の方法

N - S - B 方程式は、全角運動量 (J)、Parity 及び Heisenberg's exchange operator により分類される。⁶⁾ その部分波 N - S - B 方程式は、負エネルギー状態からの寄与の無視で、

$$\varphi(p, p_0) = G(p, p_0; p, 0) + \int_0^\infty d\delta \int_{-\infty}^\infty d\delta_0 G(p, p_0; \delta, \delta_0) \frac{-i}{2\pi^2} S(\delta, \delta_0; E) \varphi(\delta, \delta_0), \quad (2-1)$$

と、 τ 、2-核子 propagator は、

$$S(\delta, \delta_0; E) = 1 / ((E(\delta) - E - \delta_0 - i\varepsilon)(E(\delta) - E + \delta_0 - i\varepsilon)). \quad (2-2)$$

p, p_0 及び E は、相対3元運動量、相対エネルギー及び全エネルギーを表わし、on-shell 運動量 p と E は、 $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ で結びつく。 m は核子の質量である。

(2-1)式は、エネルギー分母による singularity を含む。この singularity を消すために、相互作用 kernel: G における引算を次式の如く行なう。

$$\begin{aligned} \varphi'(p, p_0) = & G(p, p_0; \hat{p}, 0) + \int_0^\infty d\delta \int_{-\infty}^\infty d\delta_0 \left\{ G(p, p_0; \delta, \delta_0) \right. \\ & \left. - \frac{G(p, p_0; \hat{p}, 0) G(\hat{p}, 0; \delta, \delta_0)}{G(\hat{p}, 0; \hat{p}, 0)} \right\} \frac{-i}{2\pi^2} S(\delta, \delta_0; E) \varphi'(\delta, \delta_0). \end{aligned} \quad (2-3)$$

(2-3) 式の kernel は energy-shell の singularity を持たず、振巾 φ' は、元々の振巾 φ と次のように結びつく。

$$\varphi'(\hat{p}, 0) = G(\hat{p}, 0; \hat{p}, 0) \quad (2-4)$$

$$\varphi(p, p_0) = \frac{B}{B - I} \varphi'(p, p_0) \quad (2-5)$$

ここで、Born 項: B 及び高次補正項: I は、

$$B = G(\hat{p}, 0; \hat{p}, 0) \quad (2-6)$$

$$I = \int_0^\infty d\delta \int_{-\infty}^\infty d\delta_0 G(\hat{p}, 0; \delta, \delta_0) \frac{-i}{2\pi^2} S(\delta, \delta_0; E) \varphi'(\delta, \delta_0) \quad (2-7)$$

よって、

$$\varphi(p, p_0) = \frac{B}{B - I} \varphi'(p, p_0). \quad (2-8)$$

(2-7) 式の I は、また $S(\delta, \delta_0; E)$ による主値積分を含み、

$$S(\delta, \delta_0; E) = \frac{\mathcal{P}}{2(E(\delta) - E)} \left\{ \frac{1}{E(\delta) - E - \delta_0 - i\epsilon} + \frac{1}{E(\delta) - E + \delta_0 - i\epsilon} \right\} \quad (2-9)$$

この singularity を連続函数の積分に直すため、恒等式、

$$\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{1}{\delta^2 - p^2} d\delta = 0 \quad (2-10)$$

を用いる。但し、 $\mathcal{P}$ は常数。

即ち、

$$F(\delta) = \int_{-\infty}^\infty d\delta_0 G(\hat{p}, 0; \delta, \delta_0) \frac{-i}{2\pi^2} S(\delta, \delta_0; E) (E(\delta)^2 - E^2) \varphi'(\delta, \delta_0), \quad (2-11)$$

とすると、

$$F(\mathcal{P}) = G(\mathcal{P}, 0; \mathcal{P}, 0) \frac{E}{\pi} \varphi'(\mathcal{P}, 0) = \frac{E}{\pi} \{G(\mathcal{P}, 0; \mathcal{P}, 0)\}^2. \quad (2-12)$$

よって、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{G}}{E(\mathcal{E})^2 - E^2} F(\mathcal{E}) \\ &= \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{1}{E(\mathcal{E})^2 - E^2} \{F(\mathcal{E}) - F(\mathcal{P})\}, \end{aligned} \quad (2-13)$$

ここで、 φ' へ Wick-rotation を適用し、Gauss 数値積分公式によ、て連立一次方程式に reduce することによって、散乱 Phase Shift $\tan \delta$ は次ぎのように得られる。

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{E}{2\mathcal{P}} \varphi'(\mathcal{P}, 0) \\ &= \frac{E}{2\mathcal{P}} \frac{B^2}{B - I} \end{aligned} \quad (2-14)$$

又、積分範囲は、 $\mathcal{E}$ 及び $\mathcal{E}_4$ (Wick rotation により、 $\mathcal{E}_0 \rightarrow i\mathcal{E}_4$) の両方について、 $0 \sim \infty$ であるので、 $-1 \sim 1$ の Gauss 積分の点 u, v より次ぎの変換により $0 \sim \infty$ の積分にする。

$$\mathcal{E} = \frac{1+u}{1-u} \mathcal{E}_m, \quad \mathcal{E}_4 = \frac{1+v}{1-v} \mathcal{E}_{4m}, \quad (2-15)$$

ここで、 $\mathcal{E}_m$ 及び $\mathcal{E}_{4m}$ は常数である。(積分範囲の中心)より、くわしくは参考文献1) 参照。

§ 3. π -中間子交換による数値結果 1). 2)

i). Singlet Even State

π -ladder における 1S_0 , 1D_2 状態の散乱 phase shift が

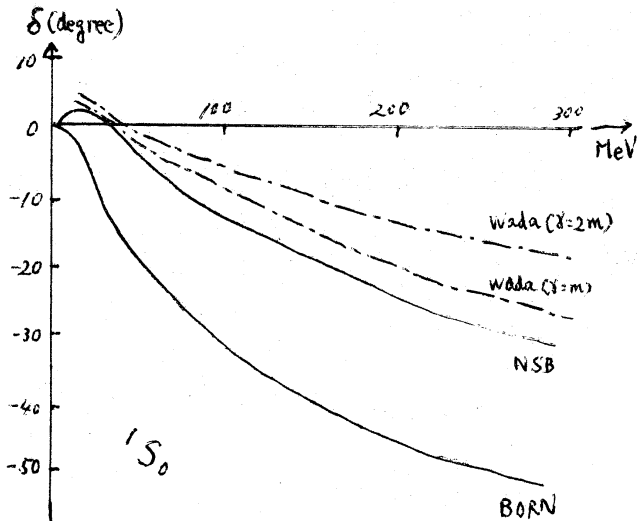


図 1-1

限を核子の質量 (m) に取るか、その 2 倍に取るかで、かなり

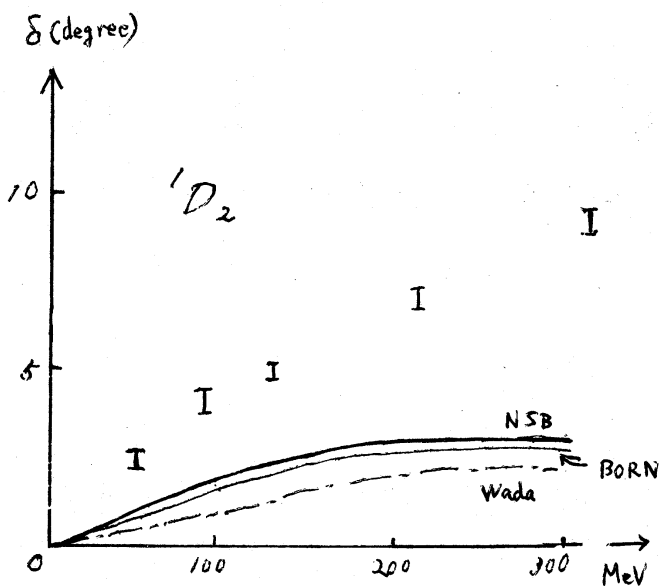


図 1-2

図 1-1 及び 図 1-2 に示
わされている。我々
の結果は実線 (NSB)
であり、対応する三次
元計算の結果が破線で
示されている。

1S_0 状態において、三
次元計算は、積分の上

りの違いを出す。上限
(λ) が $2m$ よりも大き
くなると、わずかに違
いがあるが、さらに解は
「BORN」より離れてゆ
く。これに反して我々
の積分 (cut-off あり)
に、もし cut-off をす
るなら、逆に「BORN」

に近づくであろうことが図1-1より容易にわかる。即ち、我々の結果と対応する三次元計算の結果は、定性的には同じように振る舞うが、定量的には、definite な差を持つ。これは、本来変数であるべき相対エネルギーを三次元計算においては、F-S-T type で fix してしまっているからであり、retardation の効果を不完全に計算しているのに反し、N-S-Bの解では、retardation を十分に考慮しているからである。

一方、 1D_2 状態においては、retardation 効果は小さいということがわかる。さらに、 1D_2 状態の結果は分散式の結果とも似ている^{*}が、 1S_0 状態では、分散式の方で現象論的パラメーターの使用がなければ計算し得ないので、直接の比較は出来ない。

このことは、 1D_2 状態においては、ボルン近似が非常に正しい近似になっているのに反して、 1S_0 状態のボルン近似はあまり良くなく、実際の N-S-B の解とボルン近似での phase shift とが、かなり違っていることの一つの反映となっている。

なお、phase shift analysis の解(縦線)とは、両状態共に大きく違い、引力が不足している。

*) 吉市 達氏の御指摘による。

ii), Triplet Odd State.

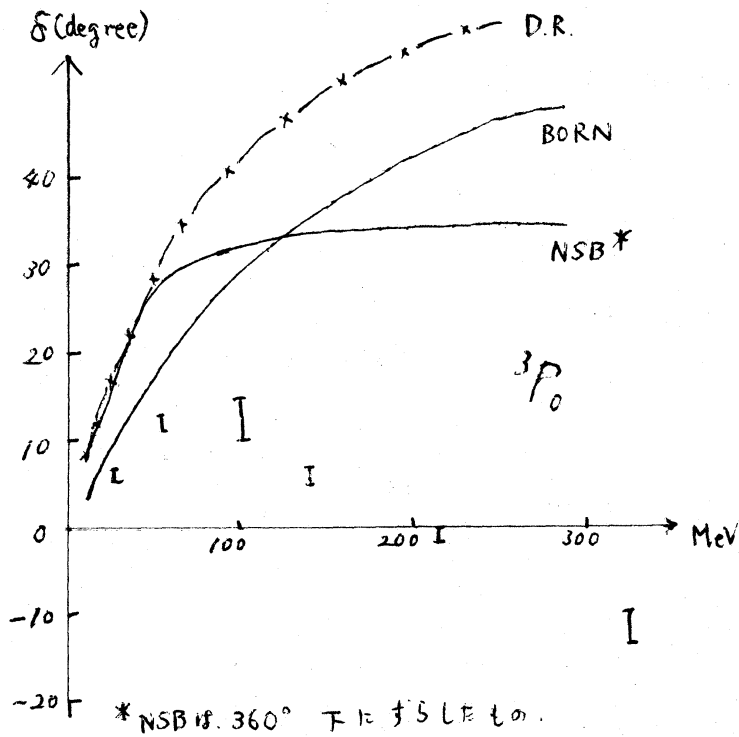


図 2-1

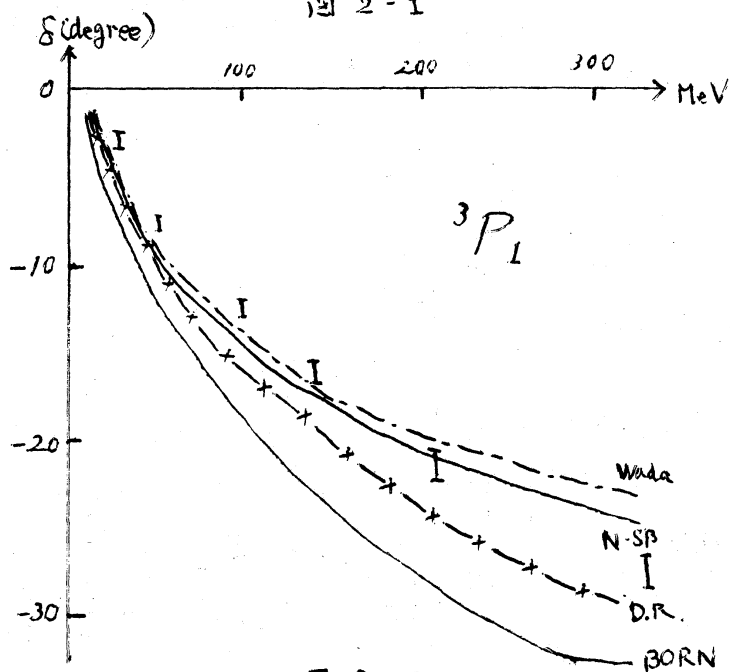


図 2-2

3O の核力から、こ
こでは、 3P_0 , 3P_1 , 3P_2
の各状態を見る。

図 2-1 には、 3P_0 状
態の phase shift が、
分散式の結果 (x) と
共に示されている。

(NSB の解は、本来
 360° から出発するし
の T になる。) 詳しい
議論を後に行なうが、
こゝで我々は 2 つ
の束縛状態を持つ。

図 2-2 には、対応
する分散式及び三次
元計算と共に 3P_1 -
状態の結果が示され
ている。これら
色々の方法での結果

は、良く一致しており、ボルン近似も目茶に悪いといえな
い。

又、図示されているのが、 3F_2 状態との mixing を無視した
 3P_2 状態の phase shift も、ボルン近似と違ふ。 3F_2 mixing
を考慮した分散式の結果とも
よく一致している。これは

3P_2 - 3F_2 mixing parameter:

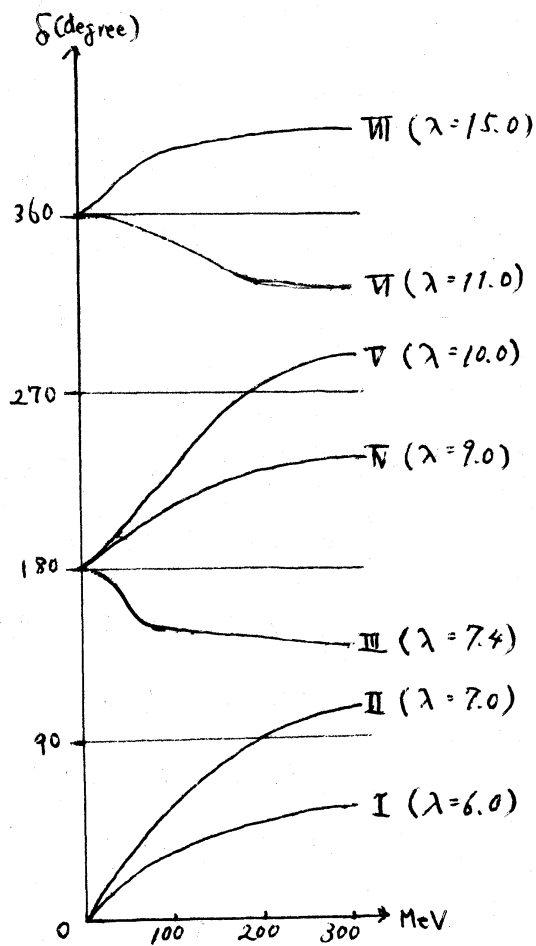


図 3

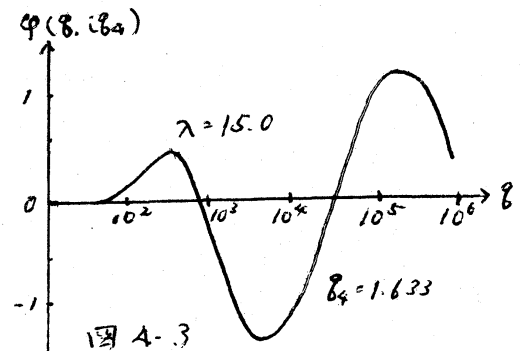


図 4-3

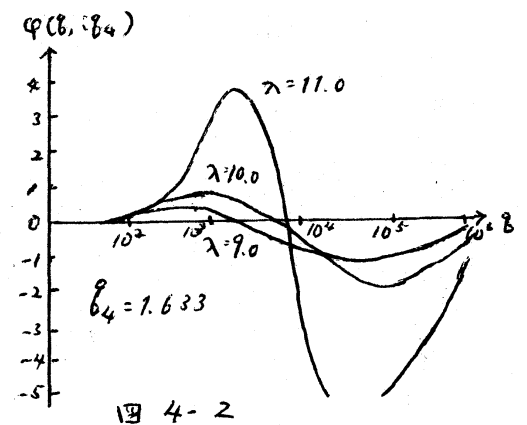


図 4-2

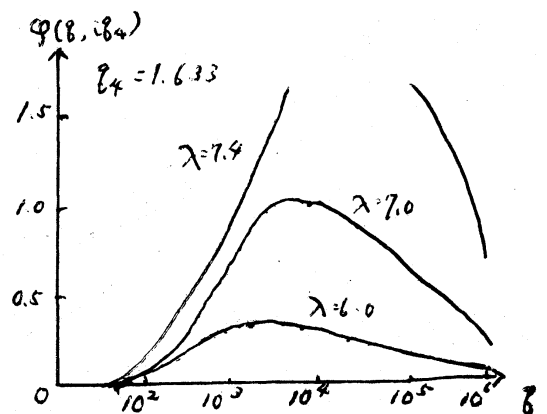


図 4-1

ϵ_2 の小ささと共に、我々の解が妥当であり、ボルン近似の良さが、分散式との一致性を意味するという考えを否定しない。

図3.には、 3P_0 phase shift の πN 結合常数: λ への依存性が示されている。($\lambda = g^2/4\pi$) 又、 λ の各々の値 λ_i に対する 3P_0 状態の波動函数 $\varphi(\delta, i\delta_4)$ の三元輝動量 (δ) 依存性が、図4-1, -2, -3 に書かれている。即ち、図2-1の NSB phase shift は、図3の case III に相当し、その波動函数が図4-3に示されている。図3で、小さな引力が I に表われ、散乱 phase shift は II で 90° を横切る。即ち、共鳴状態が表われ、 λ の増加と共に引力はより大きくなり、III で束縛状態を作る。この両の波動函数が図4-1であり、I $\rightarrow$ III と共に $\varphi(\delta, i\delta_4)$ は大きくなる。(2-7)、(2-11)、(2-13)、(2-14) 式等より容易に、 $\varphi(\delta, i\delta_4)$ の増加と、 $\tan\delta$ の零への移行、束縛状態の出現が理解しうる。IV において、波動函数は、その振舞いと、図4-2 の通り変える。この波動函数の形 (IV $\rightarrow$ V) は再び大きくなり、引力の増加をしたらし、V でオニの共鳴状態を、VI でオニの束縛状態を形成する。

N-S-B 方程式を解いて、 3P_0 状態には、このように2つの二核子系束縛状態が存在することになるが、対応する分散式

の計算では束縛状態は表われない。このことは、二つのスカラー-核子間をオミのスカラー-粒子が交換する模型において、 K , V , Vasavadaが行なった分散式 (N/D の方法) と、 $N-S-B$ 方程式の結果の比較と矛盾しない⁷⁾。この場合、強い引力の時は、 $N-S-B$ phase shift は N/D の解より、はるかに大きくなっており、その因は、多粒子交換 (2 粒子以上) による left-hand cut からの寄与が、 N/D では無視されるのに反して、 $N-S-B$ においては ladder type のみは含まれているという点にある。

又、実際の核子-核子系には、重陽子 (${}^3S_1 + {}^3D_1$) 以外には、束縛状態は見い出されておかないので、 π -ladder 以外の機構を導入することによって、現在出ている束縛状態を消去し、phase shift analysis の解と合わせねばならぬであろう。

iii) Triplet Even State

3E の核力として考えうるのは、 3S_1 , 3D_1 , 3D_2 及び 3D_3 の各状態である。しかし、 3D_2 以外の状態は全て他の状態と混じり合っている—— ${}^3S_1 + {}^3D_1$, ${}^3D_3 + {}^3G_3$ ——ので、詳しい議論は、行ない得ない。特に 3S_1 , 3D_1 の混じり合う 2 つの状態 (重陽子状態) は、共に NSB phase shift

が、Born phase shift から、かなり離れており、色々な効果が効いてくるものと見られる。但し、対応する三次元計算等がないため、比較は不可能であり、かつ、 3S_1 phase shift は、用いている近似の下では全く 1S_0 phase shift と同じになる。さらに、 3S_1 , 3D_1 両状態とも斥力が主に効くようになっているため、元中子交換の ladder 近似のみでは、重陽子束縛状態を示めし得ないのではなかと思う。

3D_3 状態では、ボルン近似が良い近似になっているが、これも詳しい議論は coupled equation を解いてからになる。

一方、 3D_2 状態については、図5に示めされる通り、対応する三次元計算との比較がなされ得る。NSB phase shift は、ボルン phase shift とかなり違っており、当然、retardation の効果の取り扱いによる差が期待され、それが積分の上限の二通りの三次元計算における取り方—— $\gamma = m$ 及び $\gamma = 2m$ ——の結果での差により、 1S_0 状態と全く同じ議論が、図5から行ない得る。さらに、三次元計算では、meson-propagator へ Feynman-cut: R を導入したものが有り、丸印付きの線(—○—)で図5に示めされている。この

Feynman-cut を用いた結果は我々のものと似かよってくる。このことは、retardation の効果が、Feynman-cut による

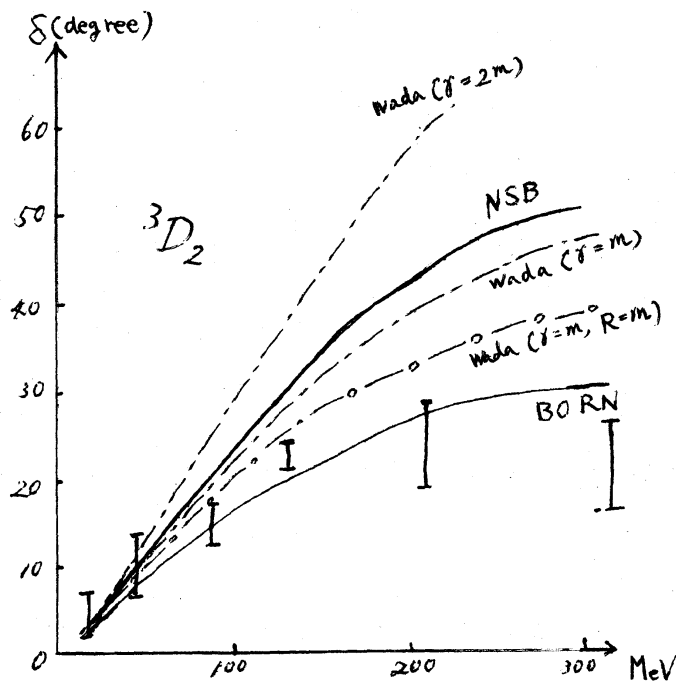


図 5

効果と似た寄与を有
えることを示めて

いる。

高エネルギーの振
舞いで、NSB phase
shift と phase shift
analysis の解を再現
する事は出来ない。

iv). Singlet Odd State

こゝでは、 1O 状
態の核力として 1P_1
状態のみを見る。

NSB の結果は、ボ
ルン近似のもと、
そう変わらないが、
三次元計算の結果と
200 MeV 以上では、
定量的な差を産んで
くる。今までの慣

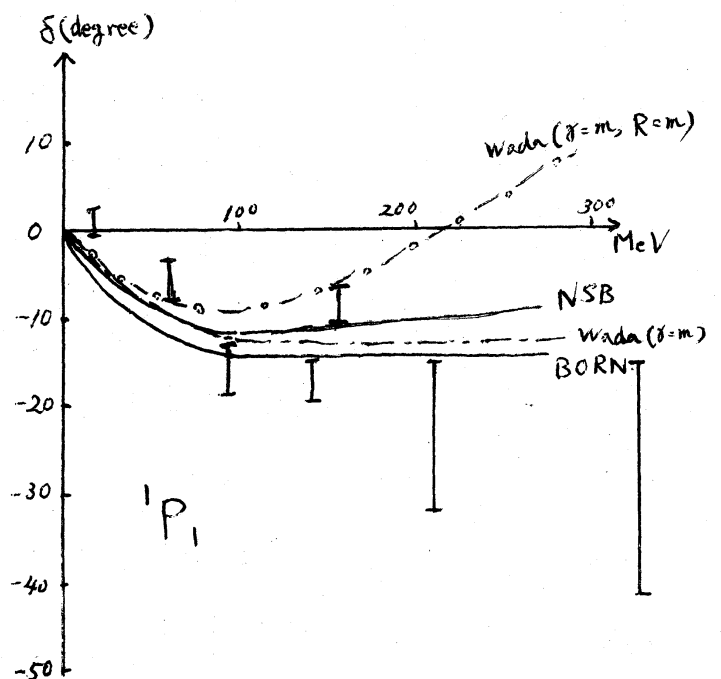


図 6

例とは違った意味において、この差を、やはり retardation の効果によるものとする。即ち、 1S_0 , 3D_2 状態における retardation の効果は、phase shift をボルン phase shift に近づける働きをしたが、 1P_1 状態では、それが逆に成り、ボルン phase shift から遠ざける働きをしている。これをも retardation とする因は、三次元計算が、ほとんど cut-off 依存性を持たぬからである。又、 1S_0 , 3D_2 等と同じく、こゝでも retardation の効果は、三次元計算での meson-propagator への Feynman-cut (R) と等しい効果と同じような寄与を与えている。

§4 3-中間子模型

我々は、§3.において phase shift analysis の解を再現する為には、 π 中間子交換の ladder 近似 (かつ、真エネルギー状態からの寄与を無視する近似) だけでは不十分であり、他の機構を考える事の必要性を見た。その試みの中の一つとして、場の理論的に核子-核子問題を解くために、擬スカラー以外の相互作用でかつ、くりこみ可能なものを考えると、スカラー及びベクトル相互作用がある。(ベクトル中間子のベクトル相互作用では、核子-核子 isospin 状態として、 $T=1$ のみと考えるので、発散の困難はない)。この3

種の間接子交換で phase shift analysis の解を求める立場を
 「3-中間子模型」と名付ける。又、その第一歩として
 「3-中間子模型」を 1S_0 状態に適用してゆく。「3-

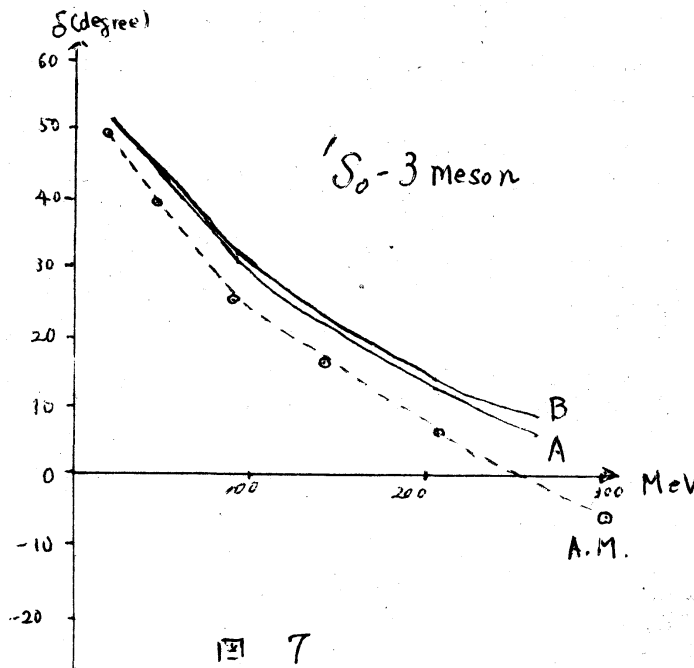


図 7

中間子模型」と現象
 論なしに押し進める
 ために、オーに π
 -中間子の質量 ($m_\pi = 135.0 \text{ MeV}$)
 及び結合常数 ($g_\pi^2/4\pi = 14.4$) 以外の
 パラメーターである
 スカラー及びベクトル

ル中間子の質量 (m_s 及び m_v)、結合常数 ($g_s^2/4\pi$ 、 $g_v^2/4\pi$)
 の決定をしなければならない。未知パラメーターの中、
 m_s と $g_s^2/4\pi$ 及び m_v と $g_v^2/4\pi$ は各々相互に関連を持ち
 て、未定の変数は2種であり、低エネルギー散乱パラメタ
 ーの scattering length α と effective range r_e の2つ
 から、その組みと見出す事が出来る。 r_e は N-S-B 方程
 式の zero energy 波動函数から導く事が出来る³⁾ので、我
 らは α と r_e を含むパラメーターの組みを求め得、そ
 れらで有限エネルギーの phase shift を含む作業を行う。

。図7に於て、その極く一例として、 π -中子以外に次ぎの数値を取ったグラフが各々A, Bとして描かれている。

$$A: \quad m_v = 620.0 \text{ MeV} \quad g_v^2/4\pi = 4.0$$

$$m_s = 475.2 \text{ MeV} \quad g_s^2/4\pi = 4.15$$

$$B: \quad m_v = 620.0 \text{ MeV} \quad g_v^2/4\pi = 2.0$$

$$m_s = 432.0 \text{ MeV} \quad g_s^2/4\pi = 2.56$$

又、「A・M」の点線は phase shift analysis の解の一つである。⁸⁾ A, B は共にエネルギー増加と共に斥力不足により phase shift analysis の解を再現しないが、ベクトル中子の結合定数の増加で「A・M」に近づいているので、いまだ、「3-中子模型」のみの立場は否定的であるとも言えない。本当に「3-中子模型」のみでいいのか、又はこれだけでは悪く、一種の現象論を加えることが要求されるのか、という問題は、今后に待たねばならない。

§5 ま と め

以上、核子-核子散乱を elastic region において、次ぎの近似のもとに見てきた。

- 1) PS(ps) 相互作用 の ladder 近似
- 2) 負エネルギー状態からの寄与無視
- 3) 状態の mixing 無視

各状態の phase shift の Born phase shift からのはずれは、
大きさは 4 つに分類される。

図 8 の如く、

$$\alpha = \frac{\text{Min}[|\delta|, |\delta^{\text{BORN}}|]}{\text{Max}[|\delta|, |\delta^{\text{BORN}}|]}$$

を用いると明らかなように、

Born とのはずれの大きさが

最大 (3P_0)、大 ($^1S_0, ^3S_1$ 及

び 3D_2)、中 ($^1P_1, ^3P_1$ 及び 3D_1)

そして 小 ($^3P_2, ^1D_2, ^3D_3$) と分類される。

このずれの因として、考えられる大きな因子は (7.7') により $T=1$ と $T=0$ の 3 倍になる iso spin、及び遠心力に依く、全角運動量、そして相互作用が引力か、斥力か、という要素である。

これらの因子より、iso spin については、 $T=1$ に対して * 印を、 $T=0$ に 0 印を、又 全角運動量について '00' を $T=0$ に、'0' を $T=1$ に '1' を $T=2$ に当てはめる。

さらに相互作用が引力か斥力かに因し、引力 (A) の場合に 0 印、斥力 (R) の場合に * 印を書き、これらの 0 印の数を σ として表わしたものが、次ページに他の、既に議論された物理量との関係をも含んで書かれている。Born とのはずれの大小関係と σ の大小関係は、ほぼ対応する事がわかる。

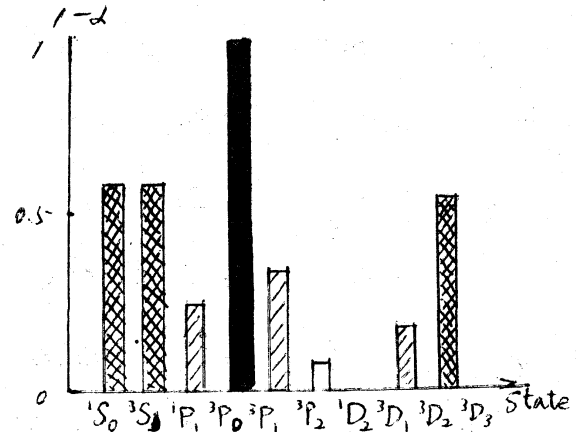


図 8

状態	J	T	A or R	σ	Born と の差	3次元計算 との差	分散式計算 との差
1S_0	00	*	*	2	大	有	/
3P_0	00	*	0	3	最大	/	有 (bound state)
3S_1	0	0	*	2	大	/	/
1P_1	0	0	*	2	中	有	/
3P_1	0	*	*	1	中	無	無
3D_1	0	0	*	2	中	/	/
3P_2	*	*	0	1	小	/	無
1D_2	*	*	0	1	小	無	(無)
3D_2	*	0	0	2	大	有	/
3D_3	*	0	*	1	小	/	/

さらに、3次元計算との差 (retardation)、及び分散式の計算との差 (多粒子交換の left-hand cut からの寄与の計算の差 — many particle exchange effect) の有無は、まさに σ の値によることが見られる。J, T, A or R は、状態の分類と Born phase shift の計算のみで、下一部分波以上の高い波についても容易にわかるので、NSB phase shift を、どの部分波まで求めてやればよいから、 σ の計算でわかるようになる。

次の段階として、「3-中間子模型」が、どのように考えられるか——核子-核子散乱が elastic region では、これのみで記述されるか、あるいは何人らかの現象論が必要なのか——、又 coupled equation の計算をどう行なうてゆくか、さらに $N-S-B$ 方程式の特徴の一つとして、「負エネルギー状態」からの寄与がどの程度あるのか等々を見てゆき、それと共に核子-核子束縛状態の計算も実行に移してゆかねばならない。

なお、本研究は、室田 敏行（北九 理）、田中 富士男（奈良高専）と筆者による共同研究であり、それを筆者がまとめたものであります。

参 考 文 献

- 1) T. Murota, M.T. Noda and F. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), No. 5.
- 2) M.T. Noda, Prog. Theor. Phys. submitted.
- 3) M. Mizouchi, T. Murota and M.T. Noda,

Prog. Theor. Phys. 40 ('68), 1079.

4). M. Wada, Prog. Theor. Phys. 37 ('67), 763.

M. Wada, Prog. Theor. Phys. 41 ('69), 105.

5). S. Furuichi, Prog. Theor. Phys. 27 ('62), 51.

S. Furuichi, Prog. Theor. Phys. 29 ('63), 235.

6). H. Ito, M. Mizouchi, T. Murota, T. Nakano,
M. T. Noda and F. Tanaka,

Prog. Theor. Phys. 37 ('67), 372.

7). K. V. Vasavada, Phys. Rev. 165 ('68), 1830.

8). R. A. Arndt and M. H. MacGregor,

Phys. Rev. 141 ('66), 873.