

対称群の余不変式環とある誘導表現について

森田英章 (東海大学理学部情報数理学科)

中島達洋 (明海大学経済学部)

1. はじめに

n 次対称群 S_n は n 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ($\mathbb{C}$ は複素数体) に変数の入れ替えとして作用している:

$$(w.f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{w(1)}, x_{w(2)}, \dots, x_{w(n)}),$$

ただし $w \in S_n$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ である. さらに, 各 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して $e_k = e_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で k 次の基本対称式を表し, $e_1, e_2, \dots, e_n$ で生成される $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ のイデアル $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ を考えると, その商環 $R_n = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(e_1, \dots, e_n)$ は S_n の余不変式環とよばれ, S_n の左正則表現を与えることが知られている. $(e_1, \dots, e_n)$ は斉次イデアルなので, R には自然に次数付き代数の構造が入り, その斉次空間分解を

$$R_n = \bigoplus_{d \geq 0} R_n^d$$

で表すことにする. いま, 各整数 $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対して, n を法として k と合同な次数を持つ R_n の斉次成分の直和

$$R_n(k; n) = \bigoplus_{d \equiv k \pmod{n}} R_n^d$$

を考えると, S_n の作用の仕方から明らかなように, $R_n(k; n)$ も再び S_n の表現を与えているが, これらの空間の次元は k によらず一定の値 $(n-1)!$ をとり, しかもそれらは n 次巡回群 C_n の各既約表現を S_n に誘導して得られる表現に同型であることが知られている [KW] [G, Proposition 8.2]. すなわち各 $R_n(k; n)$ は, S_n に一つの部分群 H_n (この場合は n 次巡回群 C_n) を定めておき, その部分群の表現を各 k に対してある一定の方法で構成し (この場合は C_n の既約表現を構成), それを S_n の表現にまで誘導したものとして捉えることが可能なのである. 詳述すると, 巡回置換 $\gamma = (12 \cdots n)$ を考え, γ によって生成される S_n の巡回部分群を $C_n = \langle \gamma \rangle$ とおき, また 1 の原始 n 乗根を $\zeta_n = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$ で表すことにすると, C_n は互いに非同値な n 個の既約表現

$$\psi^{(k)} : C_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times : \gamma \longmapsto \zeta_n^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

をもち, 各 k に対して

$$R_n(k; n) \cong_{S_n} \text{Ind}_{C_n}^{S_n}(\psi^{(k)})$$

となることが知られている. また Kraśkiewicz-Weymann は, これらの表現 $R(k; n)$ における S_n の既約表現 V^λ ($\lambda \vdash n$) の重複度を, λ 上の標準盤に対する major index を用いて記述している [KW]. (これは後に Garsia によってより精密な形に整備されている [G, Theorem 8.6].)

本稿では, 法をとる数をさらに一般の $l = 1, 2, \dots, n$ にして, 以上のストーリーを展開する. 各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対して

$$R_n(k; l) = \bigoplus_{d \equiv k \pmod{l}} R_n^d$$

とおいたとき, R_n の次数付き指標の値 (Proposition 1) をみることにより, これらの空間の次元は k の値によらず一定値 $n!/l$ であることがわかる (Proposition 4). 従って我々の考えるべき問題は, 各

$l = 1, 2, \dots, n$ に対して S_n の部分群 H_l を定め, 各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対してある一定の方法で H_l の表現 $Z(k; l)$ を構成し, この $Z(k; l)$ を S_n にまで誘導したものとして $R(k; l)$ を捉えることの可能性を探ることである. そしてこれが可能であるというのが, 本稿の結論である. この場合においては, $n = dl + r (0 \leq r \leq l-1)$ とすると, 部分群 H_l は l 次巡回群 C_l と r 次対称群 S_r の直積 $C_l \times S_r$ に同型なものがとれる (Section 4). そして, 各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対して, ある一定の方法で H_l の表現 $Z(k; l)$ を構成すると (Section 4), $R_n(k; l)$ は $Z(k; l)$ を H_l から S_n にまで持ち上げた表現として得られることが示される (Theorem 7).

本稿全体を通じて, $\mathbb{C}$ で複素数体を表し, また (有限) 集合 X に対して $\#X$ でその元の個数を表すものとする.

2. 余不変式環とその次数付指標

n を自然数, S_n を n 次対称群とする. また R_n は S_n の左正則表現 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(e_1, \dots, e_n)$ とし, $R_n = \bigoplus_{d \geq 0} R_n^d$ はその斉次空間分解とする. R_n の次数付指標 $\text{char}_q R_n$ は次で定義される:

$$\text{char}_q R_n := \sum_{d \geq 0} q^d \text{char } R_n^d.$$

このとき, 次の式が知られている [G, Proposition 8.1].

Proposition 1. $\lambda = (1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) \vdash n$ に対して

$$\text{char}_q R_n(\lambda) = \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}{(1-q)^{\alpha_1} (1-q^2)^{\alpha_2} \cdots (1-q^n)^{\alpha_n}}.$$

またこれより次がいえる.

Proposition 2. p は l の約数とし, $n = ep + s$ ($0 \leq s < p$) とする. このとき, θ を 1 の原始 p 乗根とすると, 各 $\lambda \vdash n$ に対して

$$\text{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} \neq 0 \implies \lambda = (1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^e),$$

ただし $\alpha_1 + \cdots + s\alpha_s = s$ が成り立つ.

Proof. $l = n$ の場合の Stembridge の議論を応用すればよい [S] ([G] も見よ). Proposition 1 より, $\lambda = (1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) \vdash n$ に対して

$$\text{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} = \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}{(1-q)^{\alpha_1} (1-q^2)^{\alpha_2} \cdots (1-q^n)^{\alpha_n}} \Big|_{q=\theta}.$$

このとき右辺の分子において 0 になる因子は $1 - q^p, 1 - q^{2p}, \dots, 1 - q^{ep}$ の e 個である. 一方, 分母においては $(1 - q^p)^{\alpha_p}, (1 - q^{2p})^{\alpha_{2p}}, \dots, (1 - q^{ep})^{\alpha_{ep}}$ の $\alpha_p + \alpha_{2p} + \cdots + \alpha_{ep}$ 個である. ここで

$$p\alpha_p + 2p\alpha_{2p} + \cdots + ep\alpha_{ep} \leq \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n (= ep + s)$$

より

$$\alpha_p + 2\alpha_{2p} + \cdots + e\alpha_{ep} \leq e$$

を得る. いま $q = \theta$ として 0 になる $\text{char}_q R_n(\lambda)$ の分子と分母の因子は互いに打ち消し合わねばならないことから,

$$e \leq \alpha_p + \alpha_{2p} + \cdots + \alpha_{ep} \leq \alpha_p + 2\alpha_{2p} + \cdots + e\alpha_{ep} \leq e.$$

従って $\alpha_p = e$ を得る.

さて, 再び $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n$ より

$$\alpha_1 + \cdots + (p\alpha_p) + \cdots + n\alpha_n = n - ep = s.$$

したがって

$$\alpha_i = 0 \quad (s+1 \leq i \leq n, i \neq p), \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + s\alpha_s = s$$

を得る.

□

さて $1 \leq l \leq n$ なる自然数 l と, 各 $0 \leq k \leq l-1$ に対して

$$R_n(k; l) := \bigoplus_{d \equiv k \pmod l} R_n^d$$

と定義する. すなわち

$$R_n = \bigoplus_{k=0}^{l-1} R_n(k; l).$$

このとき $R_n(k; l)$ の次元は k によらず一定である. まず, 次の補題が必要である.

Lemma 3. t を不定元とする複素係数多項式 $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots$ を考える. $m \geq 2$ は整数とし, ζ は 1 の原始 m 乗根とする. このとき, 次の二つの条件は互いに同値である:

- (a) 各 $k = 1, \dots, m-1$ に対して, $f(\zeta^k) = 0$ が成立する.
- (b) $f(t)$ の係数の部分和 $c_l = \sum_{j \geq 1} a_{mj+l}$ は $l = 0, 1, \dots, m-1$ によらず一定である.

Proof. (b) $\Rightarrow$ (a): この場合, $f(t)$ は $1 + t + t^2 + \cdots + t^{m-1} = (1 - t^m)/(1 - t)$ で割り切れることより明らか.

(a) $\Rightarrow$ (b): 連立一次方程式系

$$f(\zeta^k) = a_0 + a_1 \zeta^k + a_2 (\zeta^k)^2 + \cdots = 0$$

($k = 1, \dots, m-1$) を考える. これは次の連立一次方程式系を考えることと同値である:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \cdots + c_{m-1} \zeta^{m-1} = 0, \\ c_0 + c_1 \zeta^2 + c_2 (\zeta^2)^2 + \cdots + c_{m-1} (\zeta^2)^{m-1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ c_0 + c_1 \zeta^{m-1} + c_2 (\zeta^{m-1})^2 + \cdots + c_{m-1} (\zeta^{m-1})^{m-1} = 0. \end{cases}$$

この連立一次方程式系の係数行列の階数は $m-1$ であるので, その解空間の次元は 1 であり, かつ $(c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) = (1, 1, \dots, 1)$ が明らかに解であることから条件 (b) が従う. □

Proposition 4. $l = 1, 2, \dots, n$ とする. このとき任意の $k = 0, 1, \dots, l$ に対して, $R_n(k; l)$ の次元は一定である. すなわち

$$\dim R_n(k; l) = \frac{n!}{l}.$$

Proof. $l = 1$ の場合は明らかなので, $l \geq 2$ としてよい. Proposition 1 より, $\text{char}_q R_n$ の単位元上での値は

$$\begin{aligned} \text{char}_q R_n(1^n) &= \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}{(1-q)^n} \\ &= (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \end{aligned}$$

である. ここで 1 の原始 l 乗根 ζ_l に対して $1 + \zeta_l + \cdots + \zeta_l^{l-1} = 0$ であることに注意する. また, $l = 2, \dots, n$ のとき, 各 ζ_l^k ($k = 1, \dots, l-1$) は, ある $2 \leq m \leq l$ に対して, 1 の原始 m 乗根になっているので, Lemma 3 の条件 (a) を満たす. 多項式 $\text{char}_q R_n(1^n)$ の d 次の係数が $\dim R_n^d$ であることに注意すれば, 部分和 $\dim R_n(k; l) = \dim R_n^k + \dim R_n^{k+l} + \cdots$ が k によらず一定であるがわかる. □

森田英章 (東海大学理学部情報数理学科) 中島達洋 (明海大学経済学部)

以下この表現論的意味付けを与える. $n = dl + r$ ($0 \leq r < l$) のとき, S_{dl} および S_r を次のように S_n に埋め込んでおく:

$$S_{dl} = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i \text{ for all } i = dl + 1, \dots, n\},$$

$$S_r = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i \text{ for all } i = 1, \dots, dl\}.$$

また $\lambda = (1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) \vdash n$ に対して

$$z_\lambda = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

と定める. C_λ で cycle type が λ の共役類を表すとき, z_λ は $n!/\#C_\lambda$ に等しいことに注意する.

Proposition 5. $n = dl + r$, $0 \leq r \leq l - 1$ とする. このとき

$$\text{char}_q R_n \equiv \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q (R_{dl} \otimes R_r) \pmod{q^l - 1}.$$

Proof. これを示すためには, 各 $\lambda \vdash n$ に対して

$$\text{char}_q R_n(\lambda) \equiv \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\lambda) \pmod{q^l - 1}$$

を示す. これは q に関する高々 $l - 1$ 次の多項式の等式と思ってよいので, 1 の原始 p 乗根 θ (p は l の約数) に対して

$$\text{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} = \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\lambda)|_{q=\theta}.$$

を示せば十分である.

Proposition 2 より

$$\text{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} \neq 0 \implies \lambda = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^e)$$

である. 従って示すべきことは

- (a) $\lambda = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^e)$ のとき, $\text{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} = \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\lambda)|_{q=\theta}$,
- (b) それ以外の $\lambda \vdash n$ に関しては, $\text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\lambda)|_{q=\theta} = 0$.

の二つである.

$\lambda \vdash n$ に対して C_λ で S_n の cycle type indicator を表すことにする. すなわち, C_λ は S_n 上の関数で, 次のように定義される:

$$C_\lambda(\sigma) = \begin{cases} 1, & \lambda(\sigma) = \lambda, \\ 0, & \lambda(\sigma) \neq \lambda. \end{cases}$$

ただし $\lambda(\sigma)$ は $\sigma \in S_n$ の cycle type を表す. また, S_n 上の二つの関数 f, g に対して

$$\langle f, g \rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) g(\sigma)$$

と定めると, S_n 上の任意の類関数 ϕ に対して

$$\langle \phi, C_\lambda \rangle_{S_n} = z_\lambda^{-1} \phi(\lambda)$$

であることに注意する. 従って (a) を示すには, $\lambda = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^e)$ に対して

$$\langle \text{char}_q R_n, C_\lambda \rangle_{S_n} \Big|_{q=\theta} = \left\langle \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q (R^{S_{dl}} \otimes R^{S_r}), C_\lambda \right\rangle_{S_n} \Big|_{q=\theta}$$

を示せばよい. この式の左辺は, Proposition 1 より

$$z_\lambda^{-1} \frac{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}{(1-q)^{\alpha_1} \dots (1-q^s)^{\alpha_s} (1-q^p)^e} \Big|_{q=\theta}$$

対称群の余不変式環とある誘導表現について

に等しいことがわかる. 右辺の値を計算しよう. $\lambda = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^e)$ のとき,

$$\begin{aligned} & \left\langle \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q(R_{dl} \otimes R_r), C_\lambda \right\rangle_{S_n} \Big|_{q=\theta} \\ &= \left\langle \text{char}_q(R_{dl} \otimes R_r), \text{Res}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} C_\lambda \right\rangle_{S_{dl} \times S_r} \Big|_{q=\theta} \\ &= \frac{1}{(dl)!r!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_{dl} \times S_r} \text{char}_q(R_{dl} \otimes R_r)(\sigma, \tau) C_\lambda(\sigma, \tau) \Big|_{q=\theta} \end{aligned}$$

さて, $\lambda = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^e)$ を dl と r の分割に分ける分け方は $(p^{e-f}) \vdash dl$ と $(1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^f) \vdash r$ の一通りしかないことに注意すると, $(\sigma, \tau) \in S_{dl} \times S_r$ に対して,

$$C_\lambda(\sigma, \tau) = 1 \iff \begin{cases} \lambda(\sigma) = \left(p^{d \frac{1}{p}}\right) = (p^{e-f}) \vdash dl \\ \lambda(\tau) = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^f) \vdash r, \end{cases}$$

ただし

$$\begin{aligned} n &= dl + r \quad (0 \leq r \leq l-1) \\ &= ep + s \quad (0 \leq s \leq p-1), \end{aligned}$$

および $r = fp + s$ ($0 \leq s \leq p$) である. (よって $dl/p = e - f$.) 従って

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(dl)!r!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_{dl} \times S_r} \text{char}_q(R_{dl} \otimes R_r)(\sigma, \tau) C_\lambda(\sigma, \tau) \Big|_{q=\theta} \\ &= \frac{\#C_{(p^{e-f})}}{(dl)!} \frac{\#C_{(1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^f)}}{r!} \text{char}_q R_{dl}(p^{e-f}) \text{char}_q R_r(1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^f) \Big|_{q=\theta} \\ &= z_{(p^{e-f})}^{-1} z_{(1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^f)}^{-1} \frac{(1-q) \dots (1-q^{dl})}{(1-q^p)^{e-f}} \frac{(1-q) \dots (1-q^r)}{(1-q)^{\alpha_1} \dots (1-q^s)^{\alpha_s} (1-q^p)^f} \Big|_{q=\theta} \\ &= z_{(p^{e-f})}^{-1} z_{(1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^f)}^{-1} \binom{e}{f}^{-1} \frac{(1-q) \dots (1-q^{dl})(1-q^{1+dl}) \dots (1-q^{r+dl})}{(1-q)^{\alpha_1} \dots (1-q^s)^{\alpha_s} (1-q^p)^e} \Big|_{q=\theta} \\ &= z_\lambda^{-1} \frac{(1-q) \dots (1-q^{dl})(1-q^{1+dl}) \dots (1-q^{r+dl})}{(1-q)^{\alpha_1} \dots (1-q^s)^{\alpha_s} (1-q^p)^e} \Big|_{q=\theta} \\ &= \langle \text{char}_q R_n, C_\lambda \rangle_{S_n} \Big|_{q=\theta}. \end{aligned}$$

これで (a) が示せた. 次に (b) を示す. そこで

$$\left\langle \text{char}_q(R_{dl} \otimes R_r), \text{Res}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} C_\lambda \right\rangle_{S_{dl} \times S_r} \Big|_{q=\theta} \neq 0$$

と仮定する. このとき

$$\begin{aligned} & \left\langle \text{char}_q(R_{dl} \otimes R_r), \text{Res}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} C_\lambda \right\rangle_{S_{dl} \times S_r} \Big|_{q=\theta} \\ &= \frac{1}{(dl)!r!} \sum_{(\sigma, \tau) \in S_{dl} \times S_r} \text{char}_q(R_{dl} \otimes R_r)(\sigma, \tau) C_\lambda(\sigma, \tau) \Big|_{q=\theta} \end{aligned}$$

森田英章 (東海大学理学部情報数学科) 中島達洋 (明海大学経済学部)

なので, ある $(\sigma, \tau) \in S_{dl} \times S_r$ が存在して,

$$\text{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\sigma, \tau)|_{q=\theta} = \text{char}_q R_{dl}(\sigma)|_{q=\theta} \text{char}_q R_r(\tau)|_{q=\theta} \neq 0.$$

したがって

$$\text{char}_q R_{dl}(\sigma)|_{q=\theta} \neq 0, \quad \text{char}_q R_r(\tau)|_{q=\theta} \neq 0$$

でなければならない. よって, $\lambda(\sigma) = (p^{\frac{dl}{p}}) = (p^{e-f})$ かつ $\lambda(\tau) = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^f)$ が従う. 一方, このような (σ, τ) に対して $C_\lambda(\sigma, \tau) \neq 0$ が成り立たねばならない. そしてこのとき $\lambda = \lambda(\sigma) \cup \lambda(\tau)$ である. よって $\lambda = \lambda(\sigma) \cup \lambda(\tau) = (1^{\alpha_1} \dots s^{\alpha_s} p^e)$. $\square$

3. n が l で割り切れる場合について

n は自然数, l はその約数とする. C_l で l 次の巡回群をあらわす. よく知られているように, C_l の既約表現は l 個ある. それらを $\psi^{(0)}, \dots, \psi^{(l-1)}$ であらわすことにする. ただし,

$$\psi^{(k)} : C_l \longrightarrow \mathbb{C}^\times : \gamma \longmapsto \zeta_l^k$$

とする. ここで γ は長さ l の巡回置換 $(12 \dots l)$, ζ_l は 1 の原始 l 乗根とする. また C_l を, 次のように S_n に埋め込む:

$$C_l \cong \langle \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_d \rangle \subset S_n,$$

ただし $\gamma_1 = (1, 2, \dots, l)$, $\gamma_2 = (l+1, l+1, \dots, 2l)$, $\dots$, $\gamma_d = ((d-1)l+1, \dots, dl)$.

そして各 $k = 0, \dots, l-1$ に対して

$$\tau^{(k)} := \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \zeta_l^{-ik} (\gamma_1 \dots \gamma_d)^i$$

とおくと, これはベキ等元になっている.

一般に S_n の群環 $\mathbb{C}[S_n]$ のベキ等元 ρ により生成される $\mathbb{C}[S_n]$ の左イデアル $\mathbb{C}[S_n]\rho$ によって与えられる S_n の表現の指標は, 下で定義される作用素 Γ_n を用いて $\Gamma_n \rho$ で得られる (see e.g., [G, Proposition 5.2] [R, Lemma 8.4]):

$$\Gamma_n : \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n] : \rho \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \sigma^{-1} \rho \sigma.$$

従って,

$$\text{Ind}_{C_l}^{S_n} \text{char}(\psi^{(k)}) = \Gamma_n \tau^{(k)}.$$

さて Proposition 3 より, 各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対して, 我々の空間

$$R_n(k; l) = \bigoplus_{d \equiv k \pmod{l}} R_n^d y$$

の次元は一定であるが, 我々が指摘したいのは次の事実である.

Proposition 6. 各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対して

$$R_n(k; l) \cong_{S_n} \text{Ind}_{C_l}^{S_n} (\psi^{(k)}).$$

Proof. 次を示せばよい:

$$\text{char}_q R_n \equiv \sum_{k=0}^{l-1} q^k \text{Ind}_{C_l}^{S_n} \text{char}(\psi^{(k)}) \pmod{q^l - 1}.$$

先程と同様に, q に ζ_l^s ($s = 0, 1, \dots, l-1$, ζ_l は 1 の原始 l 乗根) を代入したときの両辺の相等をみれば,

対称群の余不変式環とある誘導表現について

ここでまず $k = 0, \dots, l-1$ に対して

$$\text{Ind}_{C_l}^{S_n}(\psi^{(k)}) \cong_{S_n} \mathbb{C}[S_n]_{\tau^{(k)}}$$

が誘導表現に関する基本的な議論より従うことに注意する. 従って

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{C_l}^{S_n} \text{char}(\psi^{(k)}) &= \text{char } \mathbb{C}[S_n]_{\tau^{(k)}} \\ &= \Gamma_n \tau^{(k)} \end{aligned}$$

である. よって件の式の右辺は

$$\sum_{k=0}^{l-1} q^k \text{Ind}_{C_l}^{S_n} \text{char}(\psi^{(k)}) = \sum_{k=0}^{l-1} q^k \Gamma_n \tau^{(k)}$$

となる. ここで $q = \zeta_l^s$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l-1} (\zeta_l^s)^k \Gamma_n \tau^{(k)} &= \Gamma_n (\gamma_1 \cdots \gamma_d)^s \sum_{k=0}^{l-1} \tau^{(k)} \\ &= \Gamma_n (\gamma_1 \cdots \gamma_d)^s. \end{aligned}$$

を得る. 従って示すべきは

$$\text{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\zeta_l^s} = \begin{cases} z_\lambda, & \lambda = \lambda((\gamma_1 \cdots \gamma_d)^s), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

すなわち, l の各約数 p に対して, θ を 1 の原始 p 乗根としたとき,

$$\text{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} = \begin{cases} z_{(p^{\frac{n}{p}})}, & \lambda = (p^{\frac{n}{p}}) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を示せばよいことになるが, これは Proposition 2 と Proposition 1 よりすぐに従う. $\square$

4. 主定理

n は自然数, l は $1 \leq l \leq n$ を満たす整数とする. また $n = dl + r$, ただし $0 \leq r \leq l-1$ としておく. また R_n は S_n の余不変式環とし, $R_n = \bigoplus_{d \geq 0} R_n^d$ は斉次空間分解とする. そして各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対して

$$R_n(k; l) := \bigoplus_{d \equiv k \pmod{l}} R_n^d$$

と定義した.

さて, 各 $l = 1, 2, \dots, n$ に対して, S_n の部分群 H_l を次のように定義する:

$$\begin{aligned} H_l &:= \langle \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_d \rangle \times S_r \\ &\cong C_l \times S_r, \end{aligned}$$

ただし各 $i = 1, 2, \dots, d$ に対して γ_i は巡回置換 $((i-1)l+1, (i-1)l+2, \dots, il)$ を表すものとし, また S_r は S_n の文字 $1, \dots, n-r$ に対する固定部分群である.

また, 各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対して H_l の表現 $Z(k; l)$ を次の様に定義する: $n = dl + r$ ($0 \leq r \leq l-1$) のとき

$$Z(k; l) := \bigoplus_{\lambda \vdash r} \bigoplus_{T \in \text{STab}(\lambda)} \psi^{(k - \text{maj}(T))} \otimes V^\lambda,$$

森田英章 (東海大学理学部情報数理学科) 中島達洋 (明海大学経済学部)

ただし, V^λ は λ によってパラメトライズされる S_r の既約表現である. これらの表現の次元は k によらず一定であり, 従ってそれを S_n にまで誘導した $\text{Ind}_{H_l}^{S_n} Z(k; l)$ の次元も再び, k によらず一定であることに注意する. 実際,

$$\begin{aligned} \dim Z(k; l) &= \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{T \in \text{STab}(\lambda)} \dim \psi^{(k - \text{maj}(T))} \otimes V^\lambda \\ &= \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{T \in \text{STab}(\lambda)} \# \text{STab}(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \vdash r} \# \text{STab}(\lambda)^2 \\ &= r!, \end{aligned}$$

である. 従って

$$\dim \text{Ind}_{H_l}^{S_n} (Z(k; l)) = r! \times \frac{n!}{lr!} = \frac{n!}{l}$$

となり, これは Proposition 4 より, $R_n(k; l)$ の次元に等しい. 実はこの両者は S_n の表現として同値なのである.

Theorem 7 (Main result). $l = 1, 2, \dots, n$ とする. このとき, 各 $k = 0, 1, \dots, l-1$ に対して次が成り立つ:

$$R_n(k; l) \cong_{S_n} \text{Ind}_{H_l}^{S_n} (Z(k; l))$$

Proof. 任意の $\lambda \vdash n$ に対して, 次を示せばよい:

$$\text{char}_q R_n(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{l-1} q^k \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{T \in \text{STab}(\lambda)} \text{Ind}_{H_l}^{S_n} \text{char}(\psi^{(k - \text{maj}(T))} \otimes V^\lambda)(\lambda) \pmod{q^l - 1}. \quad (*)$$

$n = dl + r$, ただし $0 \leq r \leq l-1$ とし, S_{dl} を文字 $dl+1, \dots, n$ に対する S_n の固定化部分群とする. H_l は $S_{dl} \times S_r$ の部分群であるから

$$\text{Ind}_{H_l}^{S_n} (\psi^{(k - \text{maj}(T))} \otimes V^\lambda) \cong_{S_n} \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \left(\text{Ind}_{H_l}^{S_{dl} \times S_r} (\psi^{(k - \text{maj}(T))} \otimes V^\lambda) \right),$$

が, 任意の $\lambda \vdash n$ に対して成立する. よって (2) 式の右辺は, 以下のように計算される:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{T \in \text{STab}(\lambda)} q^k \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{Ind}_{C_l \times S_r}^{S_{dl} \times S_r} \text{char}(\psi^{(k - \text{maj}(T))} \otimes V^\lambda) \\ &= \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \left(\sum_k \sum_\lambda \sum_T q^k \text{Ind}_{C_l}^{S_{dl}} \text{char}(\psi^{(k - \text{maj}(T))}) \cdot \text{char}(V^\lambda) \right) \\ &= \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \left(\sum_k \sum_\lambda \sum_T q^{k - \text{maj}(T)} \text{Ind}_{C_l}^{S_{dl}} \text{char}(\psi^{(k - \text{maj}(T))}) \cdot q^{\text{maj}(T)} \text{char}(V^\lambda) \right). \quad (**) \end{aligned}$$

ここで

$$\sum_k q^{k - \text{maj}(T)} \text{Ind}_{C_l}^{S_{dl}} \text{char}(\psi^{(k - \text{maj}(T))}) \equiv \sum_k q^k \text{Ind}_{C_l}^{S_{dl}} \text{char}(\psi^{(k)}) \pmod{q^l - 1}.$$

に注意すれば, この式の右辺は $\text{char}_q R_{dl}$ に $q^l - 1$ を法として合同であることがわかる. 一方, Kraśkiewicz - Weymann の結果より

$$[R_d^{(n)} : V^\lambda] = \# \{T \in \text{STab}(\lambda) \mid \text{maj}(T) = d\}$$

となる [G, Theorem 8.6][R, Theorem 8.8] ので,

$$\text{char}_q R_r = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{T \in \text{STab}(\lambda)} q^{\text{maj}(T)} \text{char}(V^\lambda).$$

を得る. このことから (**) 式は

$$\text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} (\text{char}_q R_{dl} \cdot \text{char}_q R_r) = \text{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \text{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)$$

に等しく, あとは Proposition 5 により $\text{char}_q R_n$ に $q^l - 1$ を法として合同であることが従う. $\square$

また, λ を n の分割としたとき, S_n の既約表現 V^λ の $R(k; l)$ における重複度は次で与えられる.

Proposition 8. $[R_n(k; l) : V^\lambda] = \#\{T \in \text{STab}(\lambda) \mid \text{maj}(T) \equiv k \pmod{l}\}.$

Proof. S_n の余不変式環 $R_n = \bigoplus_{d \geq 0} R_n^d$ の斉 d 次空間 R_n^d における V^λ の重複度 $[R_n^d : V^\lambda]$ は, [G, Theorem 8.6] により

$$[R_n^d : V^\lambda] = \#\{T \in \text{STab}(\lambda) \mid \text{maj}(T) = d\}$$

で与えられる. この事実より, 命題はすぐに従う. $\square$

Example 9. $n = 5$ のとき $l = 3$ とする. この場合, 部分群 H_3 は $\langle (123) \rangle \times \langle (45) \rangle$ となり, これは $C_3 \times S_2$ に同型である. このとき

$$R_5(k; 3) \cong_{S_5} (\psi^{(k)} \otimes V^{(2)}) \uparrow_{H_3}^{S_5}$$

が, 各 $k = 0, 1, 2$ に対して成立している. また $n = 11$, $l = 4$ ($r = 3$) の場合には, H_4 は $\langle (1234)(5678) \rangle \times \langle (9, 10), (10, 11) \rangle$ で与えられる $C_4 \times S_2$ に同型な部分群である. そして, 各 $k = 0, 1, 2, 3$ に対して, $R_{(11)}(k; 4)$ は以下に上げた H_4 の表現を S_{11} に誘導したものと同値である:

$$\begin{aligned} Z(0; 4) &= (\psi^{(0)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(3)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(2)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(1)} \otimes V^{(1,1,1)}), \\ Z(1; 4) &= (\psi^{(1)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(0)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(3)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(2)} \otimes V^{(1,1,1)}), \\ Z(2; 4) &= (\psi^{(2)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(1)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(0)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(3)} \otimes V^{(1,1,1)}), \\ Z(3; 4) &= (\psi^{(3)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(2)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(1)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(0)} \otimes V^{(1,1,1)}). \end{aligned}$$

REFERENCES

- [G] A. M. Garsia, Combinatorics of the free Lie algebra and the symmetric group, in *Analysis, et cetera...*, Jürgen Moser Festschrift. Academic Press, New York, 1990, pp. 309-382.
- [KW] W. Kraskiewicz and J. Weymann, Algebra of coinvariants and the action of Coxeter elements, preprint, Math. Inst. Univ. Copernic, Toruń, Poland, 1987.
- [Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.
- [R] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [S] J. R. Stembridge, Cyclic exponents for symmetric groups, reflection groups and wreath products.
- [W] H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1946.