

ϵ 展開を用いたユニタリー・フェルミ気体の研究

マサチューセッツ工科大学 西田 祐介¹

(2011年1月4日受理)

要旨：本稿では、2007年日本物理学会若手奨励賞（理論核物理）の受賞対象となった論文 [1]

“ ϵ expansion for a Fermi gas at infinite scattering length,”

Yusuke Nishida and Dam Thanh Son, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 050403

について、関連論文 [2, 3] の結果も交えながら解説します。

1 冷却原子気体における超流動状態の実現

2004年にアルカリ原子 ^{40}K , ^6Li を用いて、新しいフェルミ粒子系の超流動状態が実現されました [4, 5]。これまでの金属超伝導やヘリウム超流動にはない大きな特徴として、これらの原子系では様々な実験環境を自由にデザインできるということがあげられます。特にフェッシュバハ共鳴を用いれば、磁場を変化させることで粒子間の相互作用を特徴付ける散乱長を自在に制御することができます。

図1には、実際に測定された ^{40}K における異なる超微細構造準位間の s 波散乱長 a が磁場の関数としてプロットされています。図からも明らかなように、 a は正負ともにその絶対値が小さな値から非常に大きな値 $|a| \sim 2000 a_0$ (a_0 はボーア半径) まで自在に変えることができます。このように原子気体を用いた実験は、量子多体問題を議論する上で非常にクリーンで自由度の高い理想的な舞台を我々に提供するということが言えます。

ここで次のような原子気体の理想化を考えます。原子間力の到達距離 r_0 は ^{40}K で $r_0 \sim 60 a_0$ 、 ^6Li で $r_0 \sim 30 a_0$ 程度ですから、散乱

長に比べて相互作用の到達距離を無視する ($r_0/a \rightarrow 0$) ことができます²。さらに異なる2つの超微細構造準位を単にスピン $\uparrow$ 状態と $\downarrow$ 状態と見立てることにより、原子を短距離力 ($r_0 = 0$) で相

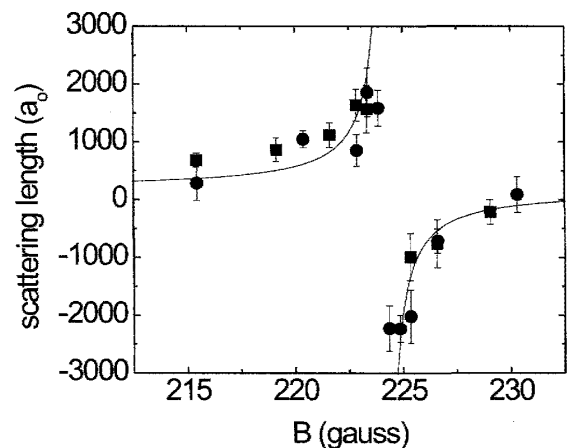


図1: ^{40}K における s 波散乱長 a (単位はボーア半径 a_0) [6]。横軸は磁場 (ガウス)。

¹e-mail address: nishida@mit.edu

²この理想化の下では、系の性質は相互作用ポテンシャルの詳細に依らなくなる (散乱長のみに依存する) ことから普遍的 (universal) と呼ばれます。

相互作用するスピン $1/2$ のフェルミ粒子と見なすことが可能になります。異なるスピン状態間の相互作用の強さを特徴付ける散乱長は、引力が弱い極限 $a^{-1} \rightarrow -\infty$ から引力が強い極限 $a^{-1} \rightarrow +\infty$ まで、連続的に変化します。ここでは同じスピン状態間の相互作用は考えません。このような理想化の下では、原子気体の問題は短距離力（コンタクト相互作用）で相互作用する非相対論的なスピン $1/2$ のフェルミ気体の問題として捉えることができます。ここで理論として明らかにするべきことは、フェルミ気体のフェルミ運動量を k_F としたとき、基底状態とその性質が無次元のパラメータ $-\infty < (ak_F)^{-1} < \infty$ とともにどのように変化するのかということです。

2 BCS-BEC クロスオーバーとユニタリティ極限

この問題に対する定性的な理解は BCS-BEC クロスオーバー [7, 8, 9] と呼ばれるもので与えられます（図 2：横軸）。フェルミ粒子間の引力が非常に弱いとき ($ak_F \rightarrow -0$) には、BCS 機構によりフェルミ気体は超流動転移をするということが知られています。逆にフェルミ粒子間の引力が非常に強い極限 ($ak_F \rightarrow +0$) では、まずフェルミ粒子対が束縛状態を形成し、その束縛分子（ボーズ粒子）がボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) を起こすことで超流動状態となります。 $(ak_F)^{-1} \rightarrow \pm\infty$ の両極端の基底状態が超流動であることから、 $-\infty < (ak_F)^{-1} < \infty$ の全領域に渡ってフェルミ気体は超流動状態であり、かつ相転移がなく連続につながっている（クロスオーバー）と考えられています³。

ak_F が負で小さいときには、系は弱く引力相互作用するフェルミ気体ですので、 $|ak_F| \ll 1$ を展開パラメータとする摂動展開によって定量的な解析が可能になります。ただし、この極限では超流動性は非摂動効果（エネルギー・ギャップ： $\Delta \sim e^{\pi/(2ak_F)}$ ）です。また、 ak_F が正で小さいときには、系は弱く斥力相互作用するボーズ気体として理解することができます。ここでは、ボーズ分子間の散乱長は $0.6a > 0$ で与えられ、やはり $ak_F \ll 1$ を展開パラメータとする摂動展開が可能になります。この極限は、元のフェルミ粒子間の引力に関しては強結合ですが、束縛分子対の系として見れば弱結合系となっていることに注意してください。

このように $(ak_F)^{-1} \rightarrow \pm\infty$ の弱結合領域（図 2 の左右両端）に関しては、定性的かつ定量的な理解が可能です。しかし、 $|ak_F|^{-1} \lesssim 1$ の領域（図 2 の中央）では、明らかに先程の摂動展開は破綻してしまいます。特に、 $ak_F \rightarrow \infty$ の極限はユニタリティ極限と呼ばれ、展開パラメータが発散するという意味で強結合極限と言えます。（この極限は、ちょうど束縛エネルギーがゼロの束縛分子が現れる点に一致します。）実際に、原子気体を用いた実験では、フェッシュバハ共鳴近傍（図 1 の $B \simeq 224$ G）がまさにこのユニタリティ極限に対応しています⁴。このような強結合のフェルミ気体（ユニタリー・フェルミ気体）の性質を明らかにすることが、実験的にも理論的にも現在進行形の重要な課題です。特に理論にとっては、強相関量子多体系を扱うことになるため、非常

³ 数学的に証明されたわけではないですが、数値シミュレーションや実験結果から、それが最も確からしいと考えられています。また $ak_F \rightarrow \pm 0$ で異なる振る舞いを示すことから、 $ak_F = 0$ には明らかに特異点があります。

⁴ 中性子-中性子散乱の s 波散乱長は -18.5 ± 0.3 fm であり、核力の到達距離 $1/m_\pi \simeq 1.4$ fm よりも十分に大きいのでユニタリティ極限に近いと言えますが、この場合は有効距離 $r_e \simeq 2.7$ fm も大きいためそれを無視するのはあまり良い近似ではありません。

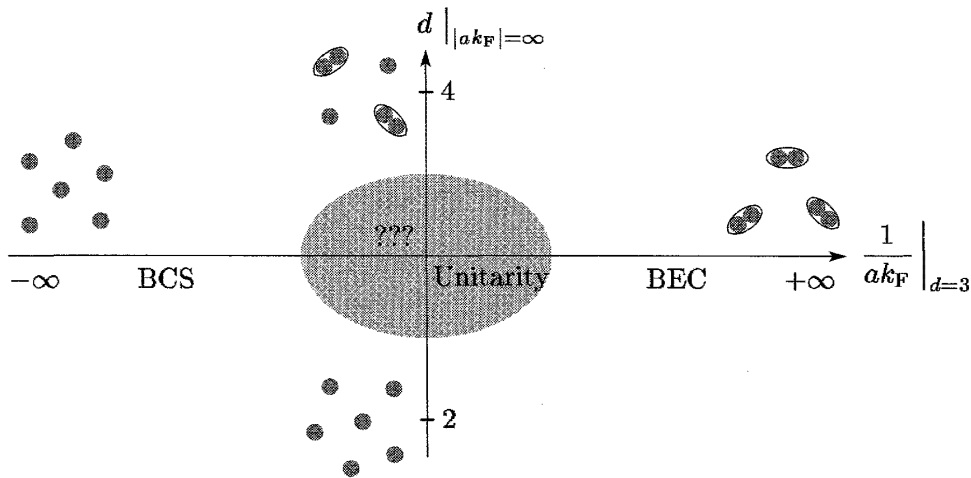


図 2: BCS-BEC クロスオーバーの模式図。横軸は k_F で規格化した散乱長の逆数 $(ak_F)^{-1}$ 、縦軸は空間次元 d 。

に挑戦的な課題であると言えます。

3 ユニタリー・フェルミ気体に対する理論的なアプローチ

ユニタリー・フェルミ気体に対する理論的なアプローチは、主に次の3つに分類できると思います。

1. 平均場近似 (+ 揺らぎ) を用いた計算
2. モンテ・カルロ法に基づく数値シミュレーション
3. 系統的な展開を用いる方法

まず、平均場近似計算は定性的には有効である場合もありますが、ユニタリー・フェルミ気体のような強結合極限においてどの程度有効であるかは定かではありません。モンテ・カルロ数値シミュレーションは、理論的には最も信頼できる方法ですが、有限の粒子数、有限の格子間隔、有限の空間サイズに限られます。また、2つのスピン状態の粒子数が異なる場合には負符号問題が避けられません。最後の「系統的な展開を用いる方法」とは、ユニタリー・フェルミ気体の問題を仮想的に拡張することで小さな展開パラメータを作り、そのパラメータを使って系統的な展開を行う方法です。例えば、フェルミ粒子の種類の数 N での展開 ($1/N$ 展開)、空間次元 d での展開 ($1/d$ 展開) などが考えられます。この方法では、展開パラメータを最終的に現実の値に外挿する操作が必要となります。

本稿では、「系統的な展開を用いる方法」として、空間次元の4あるいは2からのずれを展開パラメータとするアプローチを紹介します。まずユニタリー・フェルミ気体の問題を一般の空間次元 $2 < d < 4$ に拡張し、より広い視点から捉えることを考えてみます (図2: 縦軸)。

4 4次元と2次元の特殊性：直感的な議論

ユニタリー・フェルミ気体において、空間次元が4と2の特殊性を初めて指摘したのは Nussinov たちです [10]。異なるスピンを持ったフェルミ粒子間の相対距離を $\mathbf{r}$ とすると、2体の波動関数はユニタリティ極限では $\psi(\mathbf{r}) \sim 1/r^{d-2}$ ($r \sim 0$) のように振る舞います⁵。ここで、波動関数の規格化積分

$$\int d\mathbf{r} \psi(\mathbf{r})^2 = \int_0^\infty dr \frac{1}{r^{d-3}} \quad (1)$$

を考えると、空間次元が4以上のときには積分が原点で発散することが分かります。従って、空間次元が限りなく4に近い極限では、規格化された波動関数は原点のみに有限の値を持つと言えます。つまり、フェルミ粒子対はあたかも点状のボーズ粒子のように振る舞います。このことから、Nussinov たちは、ユニタリー・フェルミ気体は $d \rightarrow 4$ の極限で自由なボーズ気体に帰着すると予想しました。

一方、空間次元が2以下のときには、どんなに弱い引力ポテンシャルも束縛状態を作ることが知られています。従って $d=2$ では、ユニタリティ極限（束縛エネルギーがゼロの極限）はゼロ相互作用に対応すると言えます。これは、波動関数 $\psi(\mathbf{r}) \sim 1/r^{d-2}$ の原点での特異性が $d \rightarrow 2$ の極限でなくなることからも理解できます。このことから、ユニタリー・フェルミ気体は $d \rightarrow 2$ の極限で自由なフェルミ気体に帰着すると予想できます。

5 場の理論を用いた定式化

こうした Nussinov たちによる直感的な議論は、場の理論的な手法を用いてより厳密な形で言い直すことができます。短距離力で相互作用するスピン 1/2 のフェルミ粒子（質量 m ）は次のラグランジアン密度で記述されます。

$$\mathcal{L} = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \psi_\sigma^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi_\sigma + c_0 \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow. \quad (2)$$

ここでコンタクト相互作用の裸の結合定数 c_0 は、物理量である s 波散乱長 a と

$$\frac{1}{c_0} = -\frac{m}{4\pi a} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \quad \left(\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \right) \quad (3)$$

により関係付けられます。ユニタリティ極限 $a \rightarrow \infty$ では、右辺第1項はゼロとなります。

これを一般の空間次元 d に拡張し、 $d \rightarrow 4$ と $d \rightarrow 2$ の特殊性を見るために、まず密度ゼロの真空中でのフェルミ粒子対の散乱問題を考えてみます。2体散乱の散乱振幅（ T 行列）は、図3にあるようにバブル図形の無限和で与えられます。式(3)を用いれば、ユニタリティ極限での厳密な表式は簡単に得られ、

$$iT(p) = -i \frac{\left(\frac{4\pi}{m}\right)^{d/2}}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \left(-p_0 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{2} - i\delta\right)^{1-d/2} \quad (4)$$

⁵コンタクト相互作用がある場合、 s 波のシュレーディンガー方程式の解は原点で $\psi(\mathbf{r}) \sim r^{2-d} - \text{sgn}(a)|a|^{2-d} + O(r^{4-d})$ と振る舞いますが、 $a \rightarrow \infty$ となるように境界条件を課すことがユニタリティ極限（ゼロ束縛エネルギー）に対応します。

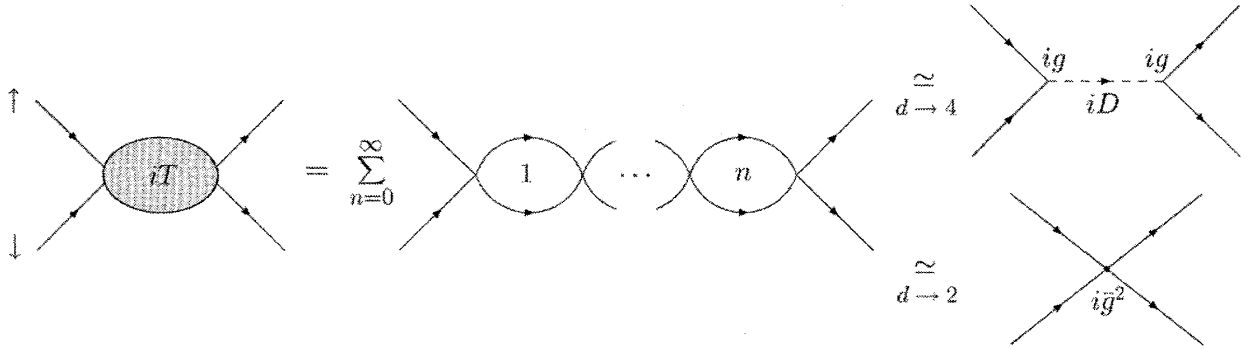


図 3: 真空中でのフェルミ粒子対の散乱。4次元近傍での散乱振幅は、ボーズ粒子の伝播と書き表すことができ、そこでのフェルミ粒子対とボーズ粒子の有効結合定数は g となります。一方、2次元近傍では、散乱振幅は有効結合定数 $\bar{g}^2$ によるコンタクト相互作用と書き表せます。

となります。分母のガンマ関数は $d = 2, 4, \dots$ で極を持ちますから、散乱振幅は $d = 2, 4$ でゼロとなります。これは、 $d \rightarrow 4$ と $d \rightarrow 2$ の極限では相互作用がなくなること意味します。

さらに4次元近傍では、 T 行列に $d = 4 - \epsilon$ を代入し、 ϵ の1次まで展開することにより

$$iT(p) = -\frac{8\pi^2\epsilon}{m^2} \frac{i}{p_0 - \frac{\epsilon p^2}{2} + i\delta} + O(\epsilon^2) \quad (5)$$

を得ます。 $D(p) \equiv (p_0 - \frac{\epsilon p^2}{2} + i\delta)^{-1}$ の部分は、ちょうど質量 $2m$ の粒子の伝播関数（プロパゲーター）と同じ形をしていますから、散乱振幅はフェルミ粒子対が点状のボーズ粒子を形成しそれが伝播しているものとして理解できます（図3：上）。ここでのフェルミ粒子対とボーズ粒子との有効的な結合定数 g は

$$g^2 = \frac{8\pi^2\epsilon}{m^2} \quad (6)$$

で与えられます。ここで重要な事実は、有効結合定数 $g \sim \sqrt{\epsilon}$ は4次元近傍 ($\epsilon \ll 1$) で小さいということです。従って、4次元近傍のユニタリー・フェルミ気体では、この有効結合定数 $g \ll 1$ を展開パラメータとする系統的な「摂動」展開が可能であるということが言えます⁶。

一方、2次元近傍では、 T 行列に $d = 2 + \bar{\epsilon}$ を代入し、 $\bar{\epsilon}$ の1次まで展開することにより

$$iT(p) = i\frac{2\pi}{m}\bar{\epsilon} + O(\bar{\epsilon}^2). \quad (7)$$

を得ます。 $\bar{\epsilon}$ の最低次では、散乱振幅は外線のエネルギー・運動量 (p) に依らないので、フェルミ粒子対は単に有効結合定数が

$$\bar{g}^2 = \frac{2\pi}{m}\bar{\epsilon}, \quad (8)$$

で与えられるコンタクト相互作用をしているものとして理解できます（図3：下）。やはり、ここで重要な事実は、有効結合定数 $\bar{g}^2 \sim \bar{\epsilon}$ は2次元近傍 ($\bar{\epsilon} \ll 1$) で小さいということです。従って、2次元近傍のユニタリー・フェルミ気体では、この有効結合定数 $\bar{g}^2 \ll 1$ を展開パラメータとする系統的な「摂動」展開が可能であるということが言えます。

⁶当然ですが、ここで言う「摂動」展開は、本来の ak_F を展開パラメータとする摂動展開とは区別する必要があります。本来の意味では、 ϵ 展開は非摂動的手法です。

ここで図2に戻りますと、ユニタリー・フェルミ気体 ($ak_F \rightarrow \infty$) は、4次元近傍では弱結合のフェルミ・ボーズ混合気体、2次元近傍では弱結合のフェルミ気体として記述することができます。そこでは空間次元のずれ $\epsilon = 4 - d$ (あるいは $\bar{\epsilon} = d - 2$) が結合定数の役割をし、 $\epsilon(\bar{\epsilon})$ が小さいときにはそれを展開パラメータとする摂動展開を行うことが可能となります。こうした系統的な展開を用いて空間次元が3の強結合領域を理解しようとする研究が、本稿で解説するアプローチです。

6 有限密度系への拡張と ϵ のべき勘定則

前節の議論は密度ゼロの場合でしたが、 ϵ ($\bar{\epsilon}$) 展開のアイデアはつかめたかと思います。ここではユニタリー・フェルミ気体を記述するために、有限密度系での定式化とそこでの $\epsilon = 4 - d$ 展開のべき勘定則 (power counting rule) を議論します。この節の説明は技巧的にならざるを得ないのですが、必要のない方は飛ばされても次節以降の結果は理解できると思います。

有限密度系への拡張は、式(2)のラグランジアン密度に化学ポテンシャル $\mu \psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma$ を導入することで行えます。4点相互作用項に対しハバード・ストラトノヴィッチ変換を施し、南部-ゴルコフ表示 $\Psi = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)^T$ を用いることにより、ラグランジアン密度を次のように書き直すことができます。

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\sigma_3 \nabla^2}{2m} + \sigma_3 \mu \right) \Psi - \frac{1}{c_0} \phi^* \phi + \Psi^\dagger \sigma_+ \Psi \phi + \Psi^\dagger \sigma_- \Psi \phi^*. \quad (9)$$

ここで $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$ であり、 $\sigma_{1,2,3}$ は2行2列のパウリ行列です。これからの計算では、簡単のため次元正則化を用いることにします⁷。次元正則化では、式(3)の右辺第2項もゼロとなるので、裸の結合定数 c_0 はユニタリティ極限で $c_0 \rightarrow \infty$ となり、上式第2項 $\frac{1}{c_0} \phi^* \phi$ を落とすことができます。

有限密度系の基底状態は超流動状態ですので、補助場 ϕ は有限の真空期待値 $\langle \phi \rangle = \phi_0$ を持ちます。 ϕ を実数に選んだ ϕ_0 の周りで展開することで、

$$\phi = \phi_0 + g\varphi, \quad g = \frac{(8\pi^2\epsilon)^{1/2}}{m} \left(\frac{m\phi_0}{2\pi} \right)^{\epsilon/4} \quad (10)$$

と書くことができます。ここで揺らぎの場合 φ の前に、前節で議論した有効結合定数 g を導入しました。式(6)にはなかった余分な因子は、 φ が非相対論場と同じ次元を持つように選びました⁸。式(10)をラグランジアン密度(9)に代入し、 $\mathcal{L}$ を次で定義される3つの部分の和として、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$

⁷もちろん、カットオフ正則化(運動量積分にカットオフ Λ を導入し、式(3)を使って発散を処理してから $\Lambda \rightarrow \infty$ をとります)を用いても最終的に同じ結果を得ます。

⁸この因子の違いは常に φ の定義に吸収できるので、最終結果はこの因子の選び方に依りません。

と書き直します。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \Psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\sigma_3 \nabla^2}{2m} + \sigma_+ \phi_0 + \sigma_- \phi_0 \right) \Psi + \varphi^* \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} \right) \varphi, \\ \mathcal{L}_1 &= g\Psi^\dagger \sigma_+ \Psi \varphi + g\Psi^\dagger \sigma_- \Psi \varphi^* + \mu\Psi^\dagger \sigma_3 \Psi + 2\mu\varphi^* \varphi, \\ \mathcal{L}_2 &= -\varphi^* \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} \right) \varphi - 2\mu\varphi^* \varphi.\end{aligned}\tag{11}$$

φ 場の運動項と化学ポテンシャル項をそれぞれ $\mathcal{L}_0$ と $\mathcal{L}_1$ に加え、同じものを $\mathcal{L}_2$ で引いています。当然ながら、和 $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ は式 (9) に等しく、何も変更を加えていないことに注意してください。 $\mathcal{L}_0$ は非摂動項、 $\mathcal{L}_1$ は摂動項、 $\mathcal{L}_2$ は発散を打ち消すためのカウンター項の役割をします。

まず非摂動部分 $\mathcal{L}_0$ は、フェルミ粒子を表す場 Ψ の伝播関数

$$G(p) = \frac{1}{p_0^2 - E_p^2 + i\delta} \begin{pmatrix} p_0 + \varepsilon_p & -\phi_0 \\ -\phi_0 & p_0 - \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (E_p = \sqrt{\varepsilon_p^2 + \phi_0^2}) \tag{12}$$

とボーズ粒子を表す場 φ の伝播関数 $D(p)$ を生成します。摂動部分 $\mathcal{L}_1$ の最初の 2 項は、結合定数 g に比例する Ψ 場と φ 場の間の相互作用を表します。また最後の 2 項は Ψ 場と φ 場の化学ポテンシャル項ですが、後にギャップ方程式を解くことで $\mu/\phi_0 \sim \epsilon$ であることが分かるので、初めから化学ポテンシャル μ は小さいものとして摂動として扱います。

ここで一般のファインマン図形がどのような ϵ のべきを持つか考えてみます。 $g \sim \sqrt{\epsilon}$ 、 $\mu/\phi_0 \sim \epsilon$ ですから、あるファインマン図形が持つ ϵ のべきは、図形に含まれる結合定数の数 N_g と化学ポテンシャルの数 N_μ を用いて、簡単に $N_g/2 + N_\mu$ で与えられることが予想されます。しかし、図 4 の (a) のファインマン図形は、ループ積分が 4 次元で対数的に発散しているために、 $d = 4 - \epsilon$ 次元では ϵ の逆べきを出し、上の簡単な規則は一見成り立ちません。ここでこの図形に $\mathcal{L}_2$ のカウン

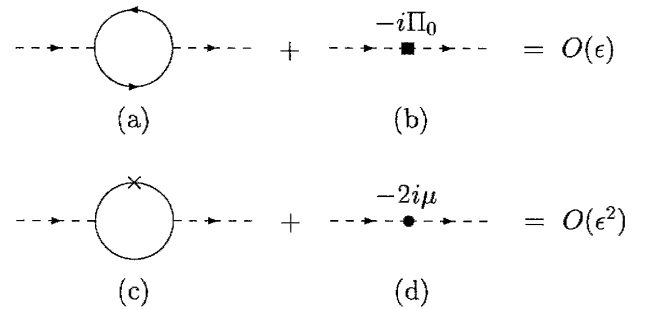


図 4: 実線は Ψ 場の伝播関数 iG 、点線は φ の伝播関数 iD を表します。× 印は化学ポテンシャル μ を表します。

ター項の 1 つ、 $\Pi_0(p) = p_0 - \varepsilon_p/2$ 、から生成されるファインマン図形 (b) を足すと、 ϵ の逆べきに比例する項を打ち消すことができます。従って、(a) と (b) の和が持つ ϵ のべきは、元の $N_g/2 + N_\mu$ から予想される 1 で与えられます。

同様に、図 4 の (c) のファインマン図形においても、ループ積分が ϵ の逆べきを出します。この図形に $\mathcal{L}_2$ のもう 1 つのカウンター項、 -2μ 、から生成されるファインマン図形 (d) を足すことで、 ϵ の逆べきに比例する項を打ち消すことができます。従って、(c) と (d) の和が持つ ϵ のべきは、やはり $N_g/2 + N_\mu$ に従い 2 で与えられます。

これらのファインマン則と ϵ のべき勘定則をまとめると、あるファインマン図形が与えられたとき、もしその図形に図 4(a)、あるいは図 4(c) が含まれていたら、その部分を 4(b)、あるいは図

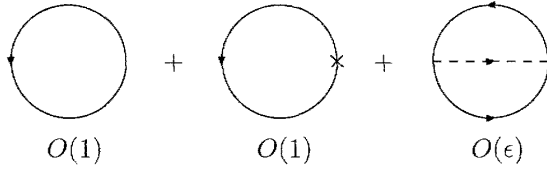


図 5: 有効ポテンシャルに寄与する $O(\epsilon)$ までのファインマン図形。

4(d) でそれぞれ置き換えたファインマン図形を足します。この約束の下で、そのファインマン図形が持つ ϵ のべきは、 $N_g/2 + N_\mu$ で与えられます（その図形はオーダー $O(\epsilon^{N_g/2 + N_\mu})$ であると言えます）。ただし、たった一つだけ例外があり、化学ポテンシャルを 1 つ含んだ Ψ 場の 1 ループ真空図形（図 5：中央）はオーダー $O(\epsilon)$ ではなく、ループ積分が ϵ の逆べきを出すことから $O(1)$ となります。

また、ここでは詳述しませんが、 $\bar{\epsilon} = d - 2$ による展開も同様に定式化することができます [2]。

7 ユニタリー・フェルミ気体における ϵ 展開

状態方程式 — 前節で詳述した ϵ のべき勘定則を使って、ユニタリー・フェルミ気体の様々な物理量について ϵ の系統的なべき展開を行うことができます。ここでは、まずユニタリー・フェルミ気体の状態方程式を求めてみます。ゼロ温度のユニタリティ極限では、 k_F 以外に次元を持つ量が存在しないことから、熱力学量の間に次の簡単な関係式が存在することを示すことができます。

$$\frac{P}{\epsilon_F N} = \frac{2}{d+2} \xi, \quad \frac{E}{\epsilon_F N} = \frac{d}{d+2} \xi, \quad \frac{\mu}{\epsilon_F} = \xi. \quad (13)$$

ここで P は圧力、 E はエネルギー密度、 $\epsilon_F = k_F^2/2m$ は粒子数密度 N から決まるフェルミ・エネルギーです。 ξ は空間次元のみによる無次元数です。中央の表式の $\frac{d}{d+1} \epsilon_F N \equiv E_{\text{free}}$ が自由フェルミ気体のエネルギー密度に一致することから、 $\xi = E/E_{\text{free}}$ は密度を固定したときにユニタリティ極限の引力相互作用によってどれだけエネルギーを得たかを示す量とも言えます。このようにゼロ温度のユニタリー・フェルミ気体の状態方程式は、ただ一つの普遍パラメータ ξ だけで決まります。

場の理論を用いた定式化では、熱力学量は有効ポテンシャル V_{eff} を計算することによって求められます。 ϵ の最低次とその次の次数までの有効ポテンシャルに寄与するファインマン図形は 3 つあり、図 5 に挙げられています。その他全てのファインマン図形は ϵ のべきがさらに掛かるため、 ϵ が小さいとき無視できます。実際にループ積分を実行することにより、

$$V_{\text{eff}}(\phi_0) = \left[\frac{\phi_0}{3} \left\{ 1 + \frac{7 - 3(\gamma + \ln 2)}{6} \epsilon - 3C\epsilon \right\} - \frac{\mu}{\epsilon} \left\{ 1 + \frac{1 - 2(\gamma - \ln 2)}{4} \epsilon \right\} \right] \left(\frac{m\phi_0}{2\pi} \right)^{d/2} + O(\epsilon^2) \quad (14)$$

を得ることができます。ここで $C = 0.14424$ は数値積分を実行して得られる定数です。

超流動の秩序変数 ϕ_0 の値は、有効ポテンシャルを最小化する（＝ギャップ方程式を解く）ことで

$$\phi_0(\mu) = \frac{2\mu}{\epsilon} [1 + (3C - 1 + \ln 2) \epsilon] \quad (15)$$

$$i\mu\sigma_3 = \text{---} \times \text{---}$$

$$-i\Sigma = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---}$$

図 6: Ψ 場の自己エネルギーに寄与する $O(\epsilon)$ のファインマン図形。

と決まります。これにより前節で仮定した事実 $\mu/\phi_0 \sim \epsilon$ が確かめられます。このギャップ方程式の解を式 (14) の有効ポテンシャルに代入することで、圧力 $P(\mu) = -V_{\text{eff}}(\phi_0(\mu))$ が得られます。この圧力の表式から、状態方程式を決める無次元のパラメータ ξ を

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\epsilon^{3/2}}{2} \exp\left(\frac{\epsilon \ln \epsilon}{8 - 2\epsilon}\right) \left[1 - \left(3C - \frac{5}{4}(1 - \ln 2)\right) \epsilon + O(\epsilon^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{3/2} + \frac{1}{16} \epsilon^{5/2} \ln \epsilon - 0.0246 \epsilon^{5/2} + O(\epsilon^{7/2}) \end{aligned} \quad (16)$$

のように、 ϵ のべき展開として求めることができます。

フェルミ準粒子の分散関係 — ϵ 展開は、もちろん、他の物理量を計算するのにも使えます。ここでは、超流動中のフェルミ準粒子の分散関係を求めてみます。 ϵ の最低次では、分散関係は裸の伝播関数 (12) の極、 $\omega(\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}}$ で与えられます。 $O(\epsilon)$ の自己エネルギーには、図 6 に挙げた 3 つのファインマン図形が寄与します。フェルミ準粒子の分散関係は、方程式 $\det[G^{-1}(\omega, \mathbf{p}) + \mu\sigma_3 - \Sigma(\omega, \mathbf{p})] = 0$ を解くことにより、

$$\omega(\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}} + \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} + \frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22} - 2\mu}{2E_{\mathbf{p}}} \epsilon_{\mathbf{p}} + O(\epsilon^2) \quad (17)$$

と求められます。ここで Σ_{11} と Σ_{22} は自己エネルギー $\Sigma(E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \sim \epsilon$ の 2 つの対角成分です。実際にループ積分を実行し式 (15) を用いれば、特に運動量が有限の値 $|\mathbf{p}| = \sqrt{2m\epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 2\mu + O(\epsilon^2) \quad (18)$$

で与えられるときに、分散関係は最低の励起エネルギー（エネルギー・ギャップ）

$$\Delta = \frac{2\mu}{\epsilon} [1 + (3C - 1 - 8 \ln 3 + 13 \ln 2)\epsilon + O(\epsilon^2)] = \frac{2\mu}{\epsilon} [1 - 0.345\epsilon + O(\epsilon^2)] \quad (19)$$

を持つ、ということが分かります。

8 3次元への外挿と数値シミュレーションとの比較

このように ϵ 展開では、ユニタリー・フェルミ気体の様々な物理量を簡単な摂動展開を使って計算することができます。もちろん、これらの結果は厳密には空間次元が 4 に近い領域 ($\epsilon \ll 1$) で有効な展開です。ここでは、これらの展開を、現実の空間次元が 3 の場合に外挿するということを議論します。その最も単純な方法は、ある次数までで ϵ 展開を止めて $\epsilon \rightarrow 1$ と置くことです。

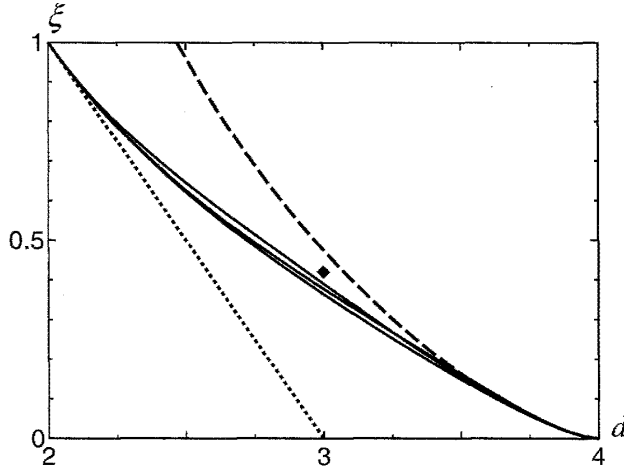


図 7: 空間次元 d を横軸にとったときの状態方程式のパラメータ ξ の振る舞い。上の破線が ϵ 展開 (16)、下の点線が $\bar{\epsilon}$ 展開 (21) によるものです。中央の 3 つの実線は、ボレル-パデ近似を用いて 2 つの展開をフィットしたものです。 $d = 3$ での $\diamond$ 印は $\xi \simeq 0.42(1)$ [11] を表します。

式 (16)、(18)、(19) の結果に $\epsilon = 1$ を代入すると、 $d = 3$ で次のような値を得ることができます。

$$\xi \approx 0.475, \quad \frac{\epsilon_0}{\mu} \approx 2, \quad \frac{\Delta}{\mu} \approx 1.31. \quad (20)$$

これらの値はモンテ・カルロ数値シミュレーションの結果 [11]、 $\xi \simeq 0.42(1)$ 、 $\epsilon_0/\mu \simeq 1.9$ 、 $\Delta/\mu \simeq 1.2$ 、に非常に近いことが分かります。本来 ϵ 展開は 4 次元近傍で有効であったことを考えると、これは驚くべきことだと思います⁹。また、式 (16) と (19) の $O(\epsilon)$ の補正は、 $\epsilon \rightarrow 1$ と置いた後も、最低次の項より十分小さい補正でしかないことも分かります。これらのことから、本来 4 次元近傍で有効な、弱く相互作用するフェルミ粒子とボーズ粒子の混合気体というユニタリー・フェルミ気体の描象は、空間次元が 3 の現実においても良い出発点になっているのではないかということが示唆されます。

また、平均場近似での値、 $\xi = 0.591$ 、 $\epsilon_0/\mu = 1$ 、 $\Delta/\mu = 1.16$ 、と比べてみても、 ϵ 展開は改善された結果を与えると言うことができます。

9 $\bar{\epsilon} = d - 2$ 展開とのマッチング

状態方程式 — ϵ 展開を現実の空間次元が 3 の場合に外挿する別の方法は、空間次元 2 の近傍の結果と組み合わせることです。詳述しませんでした、 $\bar{\epsilon} = d - 2$ による展開も同様に実行することができ、状態方程式を決めるパラメータ ξ について

$$\xi = 1 - \bar{\epsilon} + O(\bar{\epsilon}^2) \quad (21)$$

という結果を得ます [2]。この結果と $\epsilon = 4 - d$ 展開による ξ の結果 (16) を空間次元 d の関数としてプロットしたものが図 7 です。また、ボレル-パデ近似を用いて 2 つの展開をフィットしたものも同時にプロットしています。

図からも明らかなように、 $\xi = E/E_{\text{free}}$ は $d \rightarrow 2$ で $\xi \rightarrow 1$ のように振る舞います。これは、4 節で議論した通り、ユニタリー・フェルミ気体が 2 次元で自由なフェルミ気体に帰着するということ

⁹ 臨界現象の理論においても、同様の ϵ 展開の方法が非常に良い結果を与えるということが知られています。これらには何か深い理由があるのでしょうか？

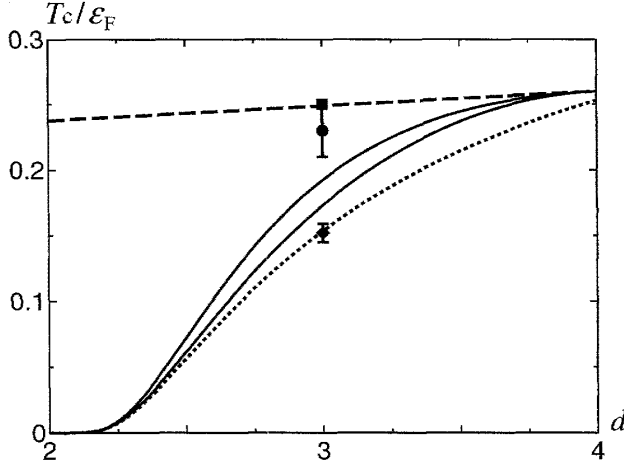


図 8: 空間次元 d を横軸にとったときの臨界温度 T_c/ε_F の振る舞い。上の破線が ε 展開 (22)、下の点線が $\bar{\varepsilon}$ 展開 (23) によるものです。中央の 2 つの実線は、ボレル-パデ近似を用いて 2 つの展開をフィットしたものです。 $d = 3$ での印は、上から $T_c/\varepsilon_F \simeq 0.25$ [15]、 $T_c/\varepsilon_F \simeq 0.23(2)$ [13]、 $T_c/\varepsilon_F \simeq 0.152(7)$ [14] を表します。

から理解できます。また $d \rightarrow 4$ では、ユニタリー・フェルミ気体は自由なボーズ気体に帰着するということを議論しました。そこでは全てのボーズ粒子は BEC によりゼロ・エネルギー状態に凝縮し、かつ束縛エネルギーもゼロなので、全エネルギーもゼロ ($\xi \rightarrow 0$) となります¹⁰。

$\varepsilon(\bar{\varepsilon})$ 展開は $d \rightarrow 4$ ($d \rightarrow 2$) の極限での振る舞いをきちんと再現し、かつどのような傾きで $\xi \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 1$) に近づいていくかを教えてくれます。式 (16) と (21) の 2 つの展開をボレル-パデ近似を用いてフィットし (図 7: 実線)、空間次元 3 に内挿することにより、 $\xi \approx 0.378 \pm 0.013$ を得ます。ここでの不定性は、パデ近似子の選び方によるものです。参考のため、冷却原子気体を用いた最新の実験では、 $\xi \approx 0.41(15)$ [12] という値が得られています。

臨界温度 — 同様の解析を、ユニタリー・フェルミ気体の超流動相転移の臨界温度 T_c についても行うことができます [3]。 $\varepsilon = 4 - d$ 展開からは

$$\frac{T_c}{\varepsilon_F} = \sqrt{\frac{2}{3\pi^2}} - 0.0112\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0.260 - 0.0112\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (22)$$

を、 $\bar{\varepsilon} = d - 2$ 展開からは、ゼロ温度でのエネルギー・ギャップ $\Delta/\varepsilon_F = (2/e)e^{-1/\bar{\varepsilon}}$ より

$$\frac{T_c}{\varepsilon_F} = \frac{e^\gamma}{\pi} \frac{\Delta}{\varepsilon_F} = \left[\frac{2}{\pi} e^{\gamma-1} + O(\bar{\varepsilon}) \right] e^{-1/\bar{\varepsilon}} \quad (23)$$

を得ることができます。これらの結果を空間次元 d の関数としてプロットしたものが図 8 です。また、ボレル-パデ近似を用いて 2 つの展開をフィットしたものも同時にプロットしています。

図からも明らかなように、 T_c/ε_F は $d \rightarrow 2$ で指数関数的に減少していきます。これは、ユニタリー・フェルミ気体が $d \rightarrow 2$ で弱結合のフェルミ気体に帰着し、そこでは超流動性は非摂動効果 $\sim e^{-1/\bar{\varepsilon}}$ であることと整合しています。またユニタリティ極限での T_c を BEC 極限の臨界温度 T_{BEC} と比較すると、 $d \rightarrow 4$ では $T_c/T_{\text{BEC}} \rightarrow \sqrt{8/9}$ となります。自由なボーズ気体の BEC の臨界温度は $d = 4$ でボーズ粒子数密度の累乗根に比例しますから、臨界温度付近の 4 次元のユニタリー・

¹⁰空間次元 $2 < d < 4$ を変数とするユニタリー・フェルミ気体の振る舞いが、3 次元で $-\infty < ak_F < \infty$ を変数とする BCS-BEC クロスオーバーと定性的に似ているのは興味深い点です。

フェルミ気体では、フェルミ粒子対 9 個のうち 8 対がボーズ粒子を形成し、1 対が解離しているといえることが言えます。

これら 2 つの展開をボレル-パデ近似を用いてフィットし（図 8：実線）、空間次元 3 に内挿することにより、 $T_c/\varepsilon_F \approx 0.183 \pm 0.014$ を得ます。ここでの不定性は、パデ近似子の選び方によるものです。参考のため、モンテ・カルロ数値シミュレーションでは、 $T_c/\varepsilon_F \simeq 0.23(2)$ [13]、 $T_c/\varepsilon_F \simeq 0.152(7)$ [14]、 $T_c/\varepsilon_F \simeq 0.25$ [15]、という値が得られています。 ϵ 展開の結果はそれ程遠くないと言えらると思います。

10 まとめとその後の展開

ユニタリー・フェルミ気体は空間次元 4 の近傍では、弱く相互作用するフェルミ粒子とボーズ粒子の混合気体として理解することができます。そこでは、空間次元のずれ $\epsilon = 4 - d$ を展開パラメータとする系統的な摂動展開を行うことができます。その結果を、空間次元が 3 の場合に外挿することにより、あるいは $\bar{\epsilon} = d - 2$ 展開と組み合わせることにより、数値シミュレーションや冷却原子気体を用いた実験結果とも近い値を得ることができます。

ϵ 展開は非常に簡便で汎用性の高い有効な手段であるために、その後様々な解析に用いられています。ここでは触れられなかった話題として、2 つのスピン状態の粒子数が異なる（分極がある）場合のユニタリティ極限近傍の相構造 [2]、有限温度での熱力学 [3]、調和振動子型のポテンシャル中のエネルギー固有値の計算 [16]、などがあります。以下の参考文献と筆者の学位論文 [17]、そして最近のレビュー [18] を参照して頂ければ幸いです。

参考文献

- [1] Y. Nishida and D. T. Son, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 050403.
- [2] Y. Nishida and D. T. Son, Phys. Rev. A **75** (2007), 063617.
- [3] Y. Nishida, Phys. Rev. A **75** (2007), 063618.
- [4] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 040403.
- [5] M. W. Zwierlein *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 120403.
- [6] C. A. Regal and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90** (2003), 230404.
- [7] D. M. Eagles, Phys. Rev. **186** (1969), 456.
- [8] A. J. Leggett, J. Phys. (Paris), Colloq. **41** (1980), C7-19.
- [9] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59** (1985), 195.
- [10] Z. Nussinov and S. Nussinov, Phys. Rev. A **74** (2006), 053622.
- [11] J. Carlson and S. Reddy, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 060401.

- [12] L. Tarruell *et al.*, in *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi,”* edited by M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (IOS Press, Amsterdam, 2008) [arXiv:cond-mat/0701181].
- [13] A. Bulgac, J. E. Drut, and P. Magierski, Phys. Rev. Lett. **96** (2006), 090404.
- [14] E. Burovski, N. Prokofev, B. Svistunov, and M. Troyer, Phys. Rev. Lett. **96** (2006), 160402.
- [15] V. K. Akkineni, D. M. Ceperley, and N. Trivedi, Phys. Rev. B **76** (2007), 165116.
- [16] Y. Nishida and D. T. Son, Phys. Rev. D **76** (2007), 086004.
- [17] 西田祐介、学位論文（2007 年 東京大学）[arXiv:cond-mat/0703465].
- [18] Y. Nishida and D. T. Son, to appear in *BCS-BEC crossover and the Unitary Fermi Gas*, edited by W. Zwerger (Lecture Notes in Physics, Springer, 2011) [arXiv:1004.3597].