

不動点組合せ子の非循環性に関連する性質 について*

岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)

島根大学 総合理工学部

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

Matsue, Shimane, Japan, 690-8504

e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

概要

本稿では、不動点組合せ子の非循環性、非基礎ループ性と停止性について述べる。最初に Turing の不動点組合せ子 $U[1]$, $[5]$ が U -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つことを示す。次に Curry らの不動点組合せ子 $Y[1]$, $[2]$ も Y -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つことを示す。さらに、我々は組合せ子 U が持つ書換え規則の右辺を一般化した組合せ子 U^n を提案し、 U^n -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つことを示す。

1 準備

本稿の定義は文献 [3], [4], [6] に準ずる。

シグネチャ $\mathcal{F}$ を引数を持つ関数記号の集合とする。引数が 0 の関数記号を定数と呼ぶ。変数の可算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)。構文的等式を $\equiv$ で表す。 $\mathcal{F}$ 上の項の集合 $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する。(1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ (2) f を n 引数関数記号 ($n \geq 0$), $t_1, \dots, t_n \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ ならば $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 。変数を含まない項を基礎項といい、基礎項全体の集合を $T(\mathcal{F})$ により表す。シグネチャ $\mathcal{F} \cup \{\square\}$ 上の項を文脈という。すなわち、0 個以上のホール $\square$ を含む項の集合 $T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する。(1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$, (2) $\square \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$, (3) f を n 引数関数記号 ($n \geq 0$), $t_1, \dots, t_n \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ ならば $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ 。文脈 C がホール $\square$ を 1 つだけ含むとき、 $C[\]$ と表す。 $C[t]$ は文脈 $C[\]$ のホール $\square$ を項 t で置き換えた結果である。 $t \equiv C[s]$ として表すことができるならば、 s は t の部分項であるといい、 $s \leq t$ と表す。項 t に出現する変数の集合を $Var(t)$ と表す。代入 σ を $\mathcal{V}$ から $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への定義域 $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限である写像とする。すべての代入 σ は項 $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対して、 $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$ を満たす写像 $\sigma: T(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \rightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ へ拡張できる。以下では、 $\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用

*This paper is an extended abstract and the detailed version will be published elsewhere.

する。書換え規則 $l \rightarrow r$ は $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の方向付けられた等式であり、次の条件を満たす：
 $l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$ 。項書換えシステム (TRS) は書換え規則の集合である。TRS $\mathcal{R}$ により項 s が項 t に書換えられるとは、ある代入 σ 、文脈 $C[]$ と書換え規則 $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ が存在し $s \equiv C[l\sigma]$ かつ $t \equiv C[r\sigma]$ を満たすときをいい、 $s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$ と表す。項 $l\sigma$ をリデックスという。項 s 中のリデックス Δ を書換えることにより t が得られるとき、 $s \rightarrow^{\Delta}_{\mathcal{R}} t$ と表す。TRS $\mathcal{R}$ が無限書換え列 $t_0 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{R}} \dots$ を持たないとき、**停止性を持つ**という。TRS $\mathcal{R}$ の書換え $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ の推移的閉包を $\rightarrow_{\mathcal{R}}^+$ で表す。TRS $\mathcal{R}$ において、書換え $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^+ t$ を**循環**であるという。TRS $\mathcal{R}$ が循環書換えを持たないとき、**非循環性を持つ**という。 $C[]$ を文脈、 σ を代入とする。TRS $\mathcal{R}$ において、書換え $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^+ C[t\sigma]$ を**ループ**という。TRS $\mathcal{R}$ がループを持たないとき、**非ループ性を持つ**という。TRS $\mathcal{R}$ において、書換え $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^+ C[t]$ を**基礎ループ**という。TRS $\mathcal{R}$ が基礎ループを持たないとき、**非基礎ループ性を持つ**という。

以下では、組合せ子 Δ を定数として扱う。また、シグネチャ $\mathcal{F}(\Delta)$ を定数 Δ と引数2の関数記号 a だけからなる集合とする。 $\mathcal{F}(\Delta)$ 上の変数が出現しないすべての項を**基礎 Δ -項**といい、基礎 Δ -項全体の集合を $CL(\Delta)$ と表す。代入は写像 $\sigma: \mathcal{V} \rightarrow CL(\Delta)$ と制限し、組合せ子 Δ に対する TRS を $\mathcal{R}(\Delta)$ と表す。以降の節では、 $CL(\Delta)$ 上の書換え関係 $\rightarrow_{\mathcal{R}(\Delta)}$ を考える。

2 不動点組合せ子の性質

定義 2.1 Δ -項の長さを次のように再帰的に定義する。

- (1) $|\Delta| = 1$,
- (2) $|a(X, Y)| = |X| + |Y| \ (X, Y \in CL(\Delta))$.

定義 2.2 TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ のシグネチャ $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$ を定数 $\mathbf{Y}$ と2引数関数記号 a から成る集合とし、TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{Y}) = \{a(\mathbf{Y}, x) \rightarrow a(x, a(\mathbf{Y}, x))\}.$$

定理 2.3 TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ は $CL(\mathbf{Y})$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つ。

(証明) TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ は次のような無限書換え列が存在するから $CL(\mathbf{Y})$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たない。

$$a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(\mathbf{Y}, a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(\mathbf{Y}, a(\mathbf{Y}, a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}))) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} \dots$$

$\mathbf{Y}$ -文脈に関する帰納法より $CL(\mathbf{Y})$ 上の TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ による書換えで $\mathbf{Y}$ -項の長さが次のように単調増加することを示すことができる。すなわち、TRS $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$ は非循環性を持つ。

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} t$ ($s, t \in CL(\mathbf{Y})$) とする。ある $X \in CL(\mathbf{Y})$ に対して、 $s \equiv C[a(\mathbf{Y}, X)]$ 、 $t \equiv C[a(X, a(\mathbf{Y}, X))]$ と表される。このとき、 $|s| < |t|$ を $\mathbf{Y}$ -文脈に関する帰納法により示す。

- $C[] = \square$ のとき； $s \equiv a(\mathbf{Y}, X) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(X, a(\mathbf{Y}, X)) \equiv t$ 。 $|s| = 1 + |X| < 2 + |X| + 1 = |t|$ 。

- $C[] = a(Z, C'[])$ のとき ; $s \equiv a(Z, C'[a(Y, X)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(Y)} a(Z, C'[a(X, a(Y, X))]) \equiv t$.
帰納法の仮定より $|C'[a(Y, X)]| < |C'[a(X, a(Y, X))]|$. したがって, $|s| = |Z| + |C'[a(Y, X)]| < |Z| + |C'[a(X, a(Y, X))]| = |t|$ が成立する.
- $C[] = a(C'[], Z)$ のとき ; 前項と同様. □

定義 2.4 TRS $\mathcal{R}(U)$ のシグネチャ $\mathcal{F}(U)$ を定数 U と 2 引数関数記号 a から成る集合とし, TRS $\mathcal{R}(U)$ を次のように定義する :

$$\mathcal{R}(U) = \{a(a(U, x), y) \rightarrow a(y, a(a(x, x), y))\}.$$

定理 2.5 TRS $\mathcal{R}(U)$ は $CL(U)$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つ.

(証明) TRS $\mathcal{R}(U)$ は次のような無限書換え列が存在するから $CL(U)$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たない.

$$a(a(U, U), U) \rightarrow_{\mathcal{R}(U)} a(U, a(a(U, U), U)) \rightarrow_{\mathcal{R}(U)} a(U, a(U, a(a(U, U), U))) \rightarrow_{\mathcal{R}(U)} \cdots$$

U -文脈に関する帰納法より $CL(U)$ 上の TRS $\mathcal{R}(U)$ による書換えで U -項の長さが次のように単調増加することを示すことができる. すなわち, TRS $\mathcal{R}(U)$ は非循環性を持つ.

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(U)} t$ ($s, t \in CL(U)$) とする. ある $X, Y \in CL(U)$ に対して, $s \equiv C[a(a(U, X), Y)]$, $t \equiv C[a(Y, a(a(X, X), Y))]$ と表される. このとき, $|s| < |t|$ を U -文脈に関する帰納法により示す.

- $C[] = \square$ のとき ; $s \equiv a(a(U, X), Y) \rightarrow_{\mathcal{R}(U)} a(Y, a(a(X, X), Y)) \equiv t$. $|s| = 1 + |X| + |Y| < 2|X| + 2|Y| = |t|$.
- $C[] = a(Z, C'[])$ のとき ; $s \equiv a(Z, C'[a(a(U, X), Y)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(U)} a(Z, C'[a(Y, a(a(X, X), Y))]) \equiv t$. 帰納法の仮定より $|C'[a(a(U, X), Y)]| < |C'[a(Y, a(a(X, X), Y))]|$. したがって, $|s| = |Z| + |C'[a(a(U, X), Y)]| < |Z| + |C'[a(Y, a(a(X, X), Y))]| = |t|$ が成立する.
- $C[] = a(C'[], Z)$ のとき ; 前項と同様. □

定義 2.6 TRS $\mathcal{R}(U^n)$ のシグネチャ $\mathcal{F}(U^n)$ を定数 U^n と 2 引数関数記号 a から成る集合とし, TRS $\mathcal{R}(U^n)$ を次のように定義する :

$$\mathcal{R}(U^n) = \{a(a(U^n, x), y) \rightarrow a(y, a(a(\overbrace{a(a(x, x), x) \cdots (x)}^{n+1}), y))\} (n \geq 0).$$

このとき, $U^0 = \delta[7]$ ($O[5]$, $SI[1]$) かつ $U^1 = U$ ($A[1]$) である.

定理 2.7 TRS $\mathcal{R}(U^n)$ は $CL(U^n)$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つ ($n \geq 0$).

(証明)

- $n = 0$ のとき； $U^0 = O$ より，文献 [3] から $\mathcal{R}(U^0)$ は停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ．
- $n = 1$ のとき； $U^1 = U$ より，定理 2.5 から $\mathcal{R}(U^1)$ は停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ．
- $n > 1$ のとき；TRS $\mathcal{R}(U^n)$ は次のような無限書換え列が存在するから $CL(U^n)$ 上で停止性と非基礎ループ性を持たない．

$$\begin{aligned} & a(a(U^n, U^n), U^n) \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} a(U^n, a(a(\cdots \overbrace{a(a(U^n, U^n), U^n)}^{n+1}, \cdots, U^n), U^n)) \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} \\ & \cdots \end{aligned}$$

U^n -文脈に関する帰納法より $CL(U^n)$ 上の TRS $\mathcal{R}(U^n)$ による書換えで U^n -項の長さが次のように単調増加することを示すことができる．すなわち，TRS $\mathcal{R}(U^n)$ は非循環性を持つ．

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} t$ ($s, t \in CL(U^n)$) とする．ある $X, Y \in CL(U^n)$ に対して， $s \equiv C[a(a(U^n, X), Y)]$ ， $t \equiv C[a(Y, a(a(\cdots, a(a(X, X), X), \cdots, X), Y))]$ と表される．このとき， $|s| < |t|$ を U^n -文脈に関する帰納法により示す．

- $C[] = \square$ のとき； $s \equiv a(a(U^n, X), Y) \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} a(Y, a(a(\cdots, a(a(X, X), X), \cdots, X), Y)) \equiv t$ ． $|s| = 1 + |X| + |Y| < |X| + n|X| + 2|Y| = |t|$ ．
- $C[] = a(Z, C'[])$ のとき； $s \equiv a(Z, C'[a(a(U^n, X), Y)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} a(Z, C'[a(Y, a(a(\cdots, a(a(X, X), X), \cdots, X), Y))]) \equiv t$ ．帰納法の仮定より $|C'[a(a(U^n, X), Y)]| < |C'[a(U^n, a(a(\cdots a(a(U^n, U^n), U^n), \cdots, U^n), U^n))]|$ ．したがって， $|s| = |Z| + |C'[a(a(U^n, X), Y)]| < |Z| + |C'[a(U^n, a(a(\cdots a(a(U^n, U^n), U^n), \cdots, U^n), U^n))]| = |t|$ が成立する．
- $C[] = a(C'[], Z)$ のとき；前項と同様． □

3 むすび

本稿では，不動点組合せ子の非循環性，非基礎ループ性，停止性について述べた．最初に Turing の不動点組合せ子 U が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムが U -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つことを示した．次に Curry らの不動点組合せ子 Y が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムも Y -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つことを示した．さらに，組合せ子 U が持つ書換え規則の右辺を一般化した組合せ子 U^n を提案し， U^n が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムが U^n -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つことを示した．本稿で得られた結果を表 1 にまとめる．

表 1: 不動点組合せ子を持つ性質

非循環性 $\Leftarrow$ 非基礎ループ性 $\Leftarrow$ 非ループ性 $\Leftarrow$ 停止性
 非循環性 $\nRightarrow$ 非基礎ループ性 $\nRightarrow$ 非ループ性 $\nRightarrow$ 停止性

組合せ子	非循環性	非基礎ループ性	非ループ性	停止性
$Y[1, 2]$	○	⊗	⊗	×
$U[5](A[1])$	○	⊗	⊗	×
U^n (本研究)	○	⊗	⊗	×

(○ : 成立 (本研究), ⊗ : 不成立 (本研究), × : 不成立)

参考文献

- [1] Barendregt, H.P.: The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics, 2nd revised edition, North-Holland (1984).
- [2] Curry, H.B. and Feys, R.: Combinatory Logic, Vol.1, North-Holland (1958).
- [3] 岩見宗弘: 組合せ子の非循環性と関連する性質について, 情報処理学会論文誌 プログラミング, 2(2), pp.97-104 (2009).
- [4] Ohlebusch, E.: Advanced Topics in Term Rewriting, Springer-Verlag (2002).
- [5] Smullyan, R.: To Mock a Mockingbird, Knopf, New York (1985).
- [6] Terese: Term Rewriting Systems, Cambridge University Press (2003).
- [7] Zantema, H.: Normalization of infinite terms, Proc. of 19th International Conf. of Rewriting Techniques and Application, LNCS, 5117, pp.441-455 (2008).