

$O(1, \ell+1)$ 上の wave form について.

東工大・理 高瀬 幸一 (Koichi Takase)

本講では、符号数 $(1, \ell+1)$ の 2 次形式の直交群上の wave form を定義して、それに附随する 2 種類の Dirichlet series の解析接続と関数方程式について考察する。Mellin 変換と Rankin-Selberg method により 2 種類の Dirichlet series が与えられるが、後者は前者の部分和に相当する。最後の § では、 $\ell=2$ の場合に、虚 2 次体上の $GL(2)$ 上の automorphic form との関連で考察する。

§1. 記号.

1. 符号数 $(1, \ell+1)$ ($\ell > 0$) の対称行列 $S \in \text{Mat}(\ell+2, \mathbb{Q})$ を取り、
 $S = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ ($S_0 \in \text{Mat}(\ell, \mathbb{Q})$ s.t. ${}^t S_0 = S_0 > 0$) であるとする。 $\tilde{G}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された reductive 代数群で、 $\mathbb{Q}$ -rational points は、

$$\tilde{G}_{\mathbb{Q}} = \{ g \in GL(\ell+2, \mathbb{Q}) \mid {}^t g S g = \nu(g) S \text{ for } \nu(g) \in \mathbb{Q}^{\times} \}$$

とする。 $\tilde{G}$ の元 g は、 $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \ell \\ 1 \end{matrix}$ とブロック分けて表わす。

$\tilde{G}$ の semi-simple part は、 $G = \{ g \in \tilde{G} \mid \nu(g) = 1 \}$ である。

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in G \right\}$$

は, $\mathbb{Q}$ 上定義された G の minimal parabolic subgroup である。 P は, 分

解 $P = N \cdot A \cdot M$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}$$

と置く。 $\mathbb{Q}$ 上の同型 $n: \mathbb{Q}^3 \xrightarrow{\sim} N_{\mathbb{Q}}$ が

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 - {}^t x \cdot S_0 & -\frac{1}{2} {}^t x \cdot S_0 \cdot x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定義される。 $\tilde{G}_0$ は, $\mathbb{Q}$ 上定義された, 連結 reductive 代数群
 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ -rational points は,

$$\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} = \left\{ c \in GL(3, \mathbb{Q}) \mid \begin{array}{l} {}^t c \cdot S_0 \cdot c = v(c) \cdot S_0 \text{ for } v(c) \in \mathbb{Q}^* \\ \det c = v(c)^{1/2} \text{ if } 3 \text{ is even} \end{array} \right\}$$

と置く。 代数群 $\tilde{G}, G, P$, etc. の $\mathbb{Q}$ 上の adèlization $\tilde{G}_A, G_A, P_A$, etc. と置く。

2. $L_0 \subset \mathbb{Q}^3$ は, S_0 に関する maximal integral $\mathbb{Z}$ -lattice (i.e. $\frac{1}{2} {}^t x \cdot S_0 \cdot x \in \mathbb{Z}$ for $\forall x \in L_0$ となる最大の $\mathbb{Z}$ -lattice) とする。

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3+2} \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L_0 \right\}$$

は, S に関する maximal integral $\mathbb{Z}$ -lattice である。 $\mathbb{Q}$ の finite place p に関する,

とし,

$$\tilde{K}_p = \{ g \in \tilde{G}_p \mid g(L_p) = L_p \} \quad (L_p = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおく, $\tilde{K}_f = \prod_{p < \infty} \tilde{K}_p$ は, $\tilde{G}_A$ の finite part $\tilde{G}_f$ の open compact subgroup となる. $\tilde{G}_\infty$ の maximal compact subgroup $\tilde{K}_\infty$

$$\tilde{K}_\infty = \left\{ g \in \tilde{G}_\infty \mid {}^t g \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & S_0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & S_0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると, $\tilde{K} = \tilde{K}_\infty \times \tilde{K}_f$ は $\tilde{G}_A$ の compact subgroup である. $K = \tilde{K} \cap G_A$ とおく.

$\mathbb{Q}$ の finite place p に対して,

$$\tilde{U}_p = \left\{ e \in \tilde{G}_{0,p} \mid e(L_{0,p}) = L_{0,p} \right\} \quad (L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおく, $\tilde{U}_f = \prod_{p < \infty} \tilde{U}_p$ は $\tilde{G}_{0,A}$ の finite part $\tilde{G}_{0,f}$ の open compact subgroup となる.

§2. wave forms.

3. 実 Lie 群 G_∞ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし, $D = 2 \cdot (\mathfrak{g}-1) \times$ Casimir element for $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおく, D は G_∞ 上の両側不変微分作用素である. D の作用は次の様に表わされる; G_∞ 上の右 $\tilde{K}_\infty$ -不変 C^∞ -関数 φ に対して,

$$F(x, y) = \varphi\left(n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & \\ & 1 \\ & & y^{-1} \end{pmatrix}\right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^k, 0 < y \in \mathbb{R}$$

とおく,

$$D \cdot F = \left\{ y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\mathfrak{g}-1) y \frac{\partial}{\partial y} + 2y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \cdot S_0^{-1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\} F$$

となる ($\mathfrak{g} = n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & \\ & 1 \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot k \in G_\infty$ ($k \in \tilde{K}_\infty$) は G_∞ の右決分解を与える).

$\mathbb{R}^k$ の連続 unitary character w_∞ , $p \in \mathbb{C}$, 及び $u \in \mathbb{R}^k$ に対して, 実解析

的関数 $W: \tilde{G}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ で、条件

$$1) \quad W(z \cdot n(x) \cdot j \cdot k) = w_\infty(z) \cdot \Lambda_\infty(\tau u \cdot S_0 \cdot x) \cdot W(j) \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{\frac{g}{2}}, \forall k \in \tilde{K}_\infty$$

(但し, $\Lambda_\infty(r) = \exp(-2\pi F \cdot r)$ for $r \in \mathbb{R}$)

$$2) \quad D \cdot W = \left\{ p^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \right\} \cdot W$$

$$3) \quad \left| W \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right| \leq C \cdot \text{Max} \{ y^r, y^{-r} \} \quad \text{for } \forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (\text{但し, } C > 0, r \geq 0 \text{ は } y \text{ に よ る 定数}).$$

を満す W の成す $\mathbb{C}$ -vector space を $W(w_\infty, p, u)$ とすると、次の lemma が成り立つ。

Lemma 1. 1) $u \neq 0$ のとき, $\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, p, u) = 1$ である

$$W_{p,u} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = K_p(4\pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot \tau u \cdot S_0 \cdot u)^{\frac{1}{2}} \cdot |y|) \cdot |4\pi (\frac{1}{2} \cdot \tau u \cdot S_0 \cdot u)^{\frac{1}{2}} \cdot y|^{\frac{g}{2}} \quad (y \in \mathbb{R}^*)$$

なる $\mathbb{C}$ -base $W_{p,u} \in W(w_\infty, p, u)$ がある。 $z = z''$

$$K_p(x) = \int_0^\infty \cosh(pt) \cdot \exp(-x \cdot \cosh t) dt \quad (x > 0)$$

は modified Bessel 関数である。

2) $u = 0$ のときは, $\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, p, u) = 2$ である

$$W_p^{(1)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = |y|^{\frac{g}{2}+p}, \quad W_p^{(2)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{cases} |y|^{\frac{g}{2}-p} & : \text{if } p \neq 0 \\ |y|^{\frac{g}{2}} \cdot \log |y| & : \text{if } p = 0 \end{cases}$$

なる $\mathbb{C}$ -base $\{W_p^{(1)}, W_p^{(2)}\} \subset W(w_\infty, p, u)$ がある。

4. idele class group $\mathbb{Q}_A^*/\mathbb{Q}^*$ の連続 unitary character ω , & $\forall p \in \mathbb{C}$ に対して,

Φ が $\tilde{G}_A$ 上の wave form of type (ω, p) であるとは,

1) Φ は $\tilde{G}_A$ 上の複素数値連続関数であり, $\tilde{G}_A$ の infinite part に関して

では, 実解析的である,

2) $\Phi(x \cdot y \cdot z \cdot k) = \omega(x) \cdot \Phi(y)$ for $\forall x \in \mathbb{Q}_A^*, \forall y \in \tilde{G}_\mathbb{Q}, \forall k \in \tilde{K}$,

3) $D \cdot \Phi = \{p^2 - (\frac{p}{2})^2\} \cdot \Phi$,

4) slowly increasing,

を満たす Φ である。 $\tilde{G}_A$ 上の wave form of type (ω, p) の成す $\mathbb{C}$ -vector space を $A(\omega, p)$ とする。 $\dim_{\mathbb{C}} A(\omega, p) < \infty$ である。

$\forall \Phi \in A(\omega, p)$ は Fourier 展開

$$\bar{\Phi}(n(x) \cdot y) = \sum_{u \in \mathbb{Q}^\times} \bar{\Phi}_u(y) \cdot \Lambda(u \cdot S_0 \cdot x)$$

である。 $z = z'$, Λ は $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ の連続 unitary character で $\Lambda_\infty(x) =$

$= \exp(-2\pi i x)$ なるものとする。 $\tilde{G}_A$ の infinite part 上の関数 Φ として

$\bar{\Phi}_u$ は $W(\omega_\infty, p, u)$ の元であって (ω_∞ は ω の infinite part), Lemma 1

より,

$$\bar{\Phi}_u(y) = \zeta_u(\bar{\Phi}, y_f) \cdot W_{p,u}(y_\infty) \quad (u \neq 0)$$

とおく。 $\lambda, e \in \tilde{G}_{0,A}, y \in \mathbb{Q}_A^*$ に対して,

$$\bar{\Phi}_0 \left(\begin{pmatrix} v(e) \cdot y & & \\ & e & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right) = a(\bar{\Phi}, e) \cdot W_p^{(1)} \begin{pmatrix} |y|_A & & \\ & 1 & \\ & & |y|_A^{-1} \end{pmatrix} + b(\bar{\Phi}, e) \cdot W_p^{(2)} \begin{pmatrix} |y|_A & & \\ & 1 & \\ & & |y|_A^{-1} \end{pmatrix}$$

とおく ($|y|_A$ は, idele y の絶対値)。

$S(w, p) = \{ \Phi \in A(w, p) \mid \Phi_0(g) = 0 \text{ for } \forall g \in \tilde{G}_A \}$ は, cuspidal wave forms の成る $\mathbb{C}$ -vector space である。

$A(w, p) \neq 0$ となるのは, $w = 1 \cdot |A|^\sigma$ ($\sigma \in \sqrt{f} \cdot \mathbb{R}$) の場合に限りこれに注意する。

wave form の Fourier 係数に関して, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 2 wave form $\Phi \in A(w, p)$ と, $e \in \tilde{G}_{0,f}$, $a \in \mathbb{Q}_f^*$, $0 \neq u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$ に対して,

$$C_u(\Phi, \begin{pmatrix} \nu(e) \cdot a & \\ & e \\ & & a^{-1} \end{pmatrix}) \neq 0$$

となるのは, $u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}} \cap (a \cdot \nu(e))^{-1} \cdot e \cdot \prod_{p < \infty} \hat{L}_{0,p}$ の場合に限る。ここで

$$\hat{L}_{0,p} = \{ y \in \mathbb{Q}_p^{\mathbb{Z}} \mid {}^t y \cdot S_0 \cdot x \in \mathbb{Z}_p \text{ for } \forall x \in L_{0,p} \} \quad (p < \infty)$$

は, S_0 に関して $L_{0,p}$ の dual lattice である。

§3. Mellin 変換

5. $w = 1 \cdot |A|^\sigma$ ($\sigma \in \sqrt{f} \cdot \mathbb{R}$), と $p \in \mathbb{C}$ を取る。wave form $\Phi \in A(w, p)$ と連続関数 $\Psi: \tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f \rightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} Z(s; \Phi, \Psi) &= 2^{\frac{f}{2}-1} \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(s + \frac{f}{2} + p\right)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(s + \frac{f}{2} - p\right)\right) \times \\ &\times \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}} \sum_e C_u(\Phi, \begin{pmatrix} \nu(e) & \\ & e \\ & & 1 \end{pmatrix}) \cdot \nu(e) \cdot |\nu(e)|^{\frac{1}{2}(s-\sigma)} \cdot \left(\frac{1}{2} {}^t u \cdot S_0 \cdot u\right)^{-\frac{s}{2}} \end{aligned}$$

とおく。ここで、 $\sum_e$ は $\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$ の完全代表系上の和 ($\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$ は有限集合), $\chi|_f$ は $\chi|_A$ の finite part である。Lemma 2 より, $Z(s; \chi, \varphi)$ は Dirichlet series となり, χ の増大条件より, $Z(s; \chi, \varphi)$ は, $\operatorname{Re} s \gg 0$ で絶対収束する。一方 $\check{\chi}(g) = \chi(g) \cdot w(v(g))^{-1}$ とおくと, $\check{\chi} \in A(w^{-1}, p)$ である。このとき, 次の定理が成り立つ。

Theorem 1 Dirichlet series $Z(s; \chi, \varphi)$ は全 s -平面に有理的に解析接続され, 関数等式 $Z(s; \chi, \varphi) = Z(-s; \check{\chi}, \check{\varphi})$ を満たす。ここで $\check{\varphi}(e) = \varphi(v(e)^{-1} \cdot e)$ とおく。更に,

$$Z(s; \chi, \varphi) + a(\chi, p) \cdot (s + \frac{p}{2} + p)^{-1} + b(\chi, p) \times \begin{cases} (s + \frac{p}{2} - p)^{-1} & : \text{if } p \neq 0 \\ -(s + \frac{p}{2})^{-2} & : \text{if } p = 0 \end{cases} \\ - a(\check{\chi}, \check{p}) \cdot (s - \frac{\check{p}}{2} - p)^{-1} - b(\check{\chi}, \check{p}) \times \begin{cases} (s - \frac{\check{p}}{2} + p)^{-1} & : \text{if } p \neq 0 \\ (s - \frac{\check{p}}{2})^{-2} & : \text{if } p = 0 \end{cases}$$

は, s の entire function である。ここで

$$a(\chi, p) = \sum_e a(\chi, e) \cdot \varphi(e), \quad b(\chi, p) = \sum_e b(\chi, e) \cdot \varphi(e)$$

とおく ($\sum_e$ は, $\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$ の完全代表系上の和)。

Remark φ とし, $\tilde{G}_{0,f}$ における $\tilde{G}_{0,\mathbb{Q}} \tilde{U}_f$ の characteristic function を取

ると, Theorem 1 は, Dirichlet series

$$\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^\times} \zeta_u(\chi, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot \tau_u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}} \quad (\operatorname{Re} s \gg 0)$$

の解析接続, 関数等式, 及び, possible poles を与える. 上の Dirichlet series は Maass [2] により考察された.

§4. Rankin-Selberg method.

6. この § を通じて, $S_0 = \left(\begin{smallmatrix} S'_0 & 0 \\ 0 & S''_0 \end{smallmatrix} \right)_{g-m}^{1m}$ ($0 < m < g$) と仮定し, 更に $\mathbb{Z}$ -lattice $L'_0 \subset \mathbb{Q}^m$, $L''_0 \subset \mathbb{Q}^{g-m}$ があって,

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^g \mid x \in L'_0, y \in L''_0 \right\}$$

となる (i.e. L_0 は orthogonal splitting $L_0 = L'_0 \oplus L''_0$ をもつ) と仮定する.

$S' = \left(\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & S'_0 \end{smallmatrix} \right)$ に対して, §1 と同様に, 代数群 G', P', N', A', M' を定義する. G' は, 写像

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{smallmatrix} \right)_{1m1} \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h & i & 0 & j \end{smallmatrix} \right)_{1mm1}$$

により, G の部分代数群と同一視する.

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{m+2} \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L'_0 \right\}$$

として, L' に対して, §1 と同様に G'_A の compact subgroup K' を定義する. 上の同一視により $K' \subset K$ となる.

7. L' が S' に関して maximal integral $\mathbb{Z}$ -lattice であることから,

$G'_A = P'_A \cdot K'$ となるから, $s \in \mathbb{C}$ と $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \cdot k \in G'_A$ ($k \in K'$) に対して,

$$\theta(g, s) = |a|_A^s$$

とおく. $M'_A \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K'$ 上の複素数値連続関数 ψ を取る

($M'_A \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K'$ 上の連続関数は, $\psi \longmapsto \psi|_{M'_A}$ により, $M'_A \backslash M'_A / (M'_A \cap K')$

上の連続関数 ψ に対して対応する). G' の parabolic subgroup P' と ψ に附随する Eisenstein series は,

$$E(\psi; s, g) = \sum_{\gamma \in P'_Q \backslash G'_Q} \psi(\gamma g) \cdot \theta(\gamma g, s + \frac{m}{2}) \quad (s \in \mathbb{C}, g \in G'_A)$$

により定義される. $E(\psi; s, g)$ は $\operatorname{Re} s > \frac{m}{2}$ で絶対収束し, 全 s -平面に解析接続されて, s に関して関数方程式を満たす (c.f. Arthur [1]).

特に $m=1$ のときは, $M' = \{\pm 1\}$ で, $E(1; s, g)$ の関数方程式は,

$$E(1; s, g) = \operatorname{vol}(B_{L_0})^{-1} \cdot \sqrt{2/S'_0} \cdot \frac{Z(2s)}{Z(2s+1)} \cdot E(1; -s, g)$$

となる. ここで $Z(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$ である.

8. 連続関数 $\psi: M'_Q A'_A N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$ と wave form $\psi \in A(w, P)$,

及び $0 \neq u \in \mathbb{Q}^{\delta-m}$ に対して,

$$C_{u, \psi}(\psi) = \sum_h C_{(u)}^{(0)}(\psi, h) \cdot \psi(h)$$

とおく. ここで, $\sum_h$ は $M'_Q \backslash M'_f / (M'_f \cap K')$ の完全代表系上の和である

(M'_f は M'_A の finite part, 又 $M'_Q \backslash M'_f / (M'_f \cap K')$ は有限集合である).

このとき, 次の定理が成り立つ.

Theorem 2. 連続関数 $\psi: M'_Q A'_A N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$ と cuspidal wave form

$\psi \in S(w, P)$ に対して, 次の Rankin-Selberg type の等式を得る;

$$\int_{G'_A \backslash G'_A} \Phi(g) \cdot E(\varphi; s - \frac{m}{2}, g) dg \quad (\operatorname{Re} s \gg 0)$$

$$= 2^{\frac{s}{2}-1} \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{s}{2} + p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{s}{2} - p)) \times \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{s-m}} C_{u, \varphi}(\Phi) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0'' \cdot u)^{-\frac{s}{2}}.$$

特に, Dirichlet series $\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{s-m}} C_{u, \varphi}(\Phi) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0'' \cdot u)^{-\frac{s}{2}}$ は全 s -平面に有理形に解析接続される。

連続関数 $\varphi: M_Q \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$ とし, $\varphi|_{M'_f}$ が $M'_Q \cdot (M'_f \cap K')$ の characteristic function とするものを取れば, Theorem 2 から, 次の corollary を得る。

Corollary 1. 任意の cuspidal newform $\Phi \in S(w, p)$ に対して, Dirichlet series $\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{s-m}} C_{(u)}^{(0)}(\Phi, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0'' \cdot u)^{-\frac{s}{2}} \quad (\operatorname{Re} s \gg 0)$ は, 全 s -平面に, 有理形に解析接続される。

$m=1$ のときには, $E(1; s, g)$ の関数等式と Theorem 2 から, 次の corollary を得る。

Corollary 2. $m=1$ とする。cuspidal newform $\Phi \in S(w, p)$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(s, \Phi) &= 2^{-s} \cdot \pi^{-2s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{s}{2} + p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{s}{2} - p)) \times \\ &\quad \times \zeta(2s) \cdot \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{s-1}} C_{(u)}^{(0)}(\Phi, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0'' \cdot u)^{-\frac{s}{2}} \quad (\operatorname{Re} s \gg 0) \end{aligned}$$

は, 全 s -平面 に有理形 に解析接続され, 関数等式

$$\tilde{Z}(1-s, \mathfrak{E}) = \text{vol}(\mathbb{R}X'_0) \cdot \sqrt{S'_0/2} \cdot \tilde{Z}(s, \mathfrak{E})$$

が成り立つ。

§5. $g=2$ の場合.

9. 虚 2 次体 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ($m \in \mathbb{Z}$: square-free) を取り, その整数環 $\mathcal{O}_F$ とする. $F/\mathbb{Q}$ の norm を $N_{F/\mathbb{Q}}$ と書くとき, $(F, N_{F/\mathbb{Q}})$ は, quadratic space over $\mathbb{Q}$ で正定値であり, $\mathcal{O}_F$ は $N_{F/\mathbb{Q}}$ に関して, maximal integral $\mathbb{Z}$ -lattice となる. F の $\mathbb{Q}$ -base $\{1, \sqrt{m}\}$ に対し, 2 次形式 $N_{F/\mathbb{Q}}$ は行列表現 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2m \end{pmatrix}$ である. $\{1, \sqrt{m}\}$ により $F = \mathbb{Q}^2$ とし, $S_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2m \end{pmatrix}$, $L_0 = \mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathbb{Q}^2$ とおく. $V = \{X \in \text{Mat}(2, F) \mid {}^t X = \bar{X}\}$ とおくと, $(V, -\det)$ は quadratic space over $\mathbb{Q}$ で, 符号数は $(1, 3)$ である.

V の $\mathbb{Q}$ -base

$$\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m} \\ -\sqrt{m} & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

に関して, 2 次形式 $-\det$ は行列表現 $S = \begin{pmatrix} 1 & \\ & S_0 \end{pmatrix}$ である.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ により $V = \mathbb{Q}^4$ とするとき, $L = V \cap \text{Mat}(2, \mathcal{O}_F)$ は,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L_0 \right\}$$

となる. $(V, -\det)$ の similitude のつなぐ直交群

$$GO_{\mathbb{Q}}(V, -\det) = \{\varphi \in GL_{\mathbb{Q}}(V) \mid \det \circ \varphi = \nu(\varphi) \cdot \det \text{ for } \nu(\varphi) \in \mathbb{Q}^{\times}\}$$

$\varepsilon \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ に關して行列表現すると, $GO_{\mathbb{Q}}(V, -det) = \tilde{G}_{\mathbb{Q}}$ となる.

$\mathcal{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で, $\mathbb{Q}$ -rational points は, $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = GL(2, F)$

なるものとする. $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{G}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された準同型写像で,

$$\pi_{\mathbb{Q}}(g) \cdot X = g \cdot X \cdot {}^t \bar{g} \quad \text{for } g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, X \in V$$

なるものとする. π は, adelicization $\pi_A: \mathcal{G}_A \rightarrow \tilde{G}_A$ に延長される.

$$F^* \ni x + y\sqrt{m} \mapsto \begin{pmatrix} x & my \\ y & x \end{pmatrix} \in \tilde{G}_{0, \mathbb{Q}} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

なる $\mathbb{Q}$ 上の同型に注意する.

10. wave form $\tilde{\Phi} \in A(w, p)$ に對して, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi} \circ \pi_A$ は, automorphic form on $GL(2)$ over F となり (c.f. Weil [4]), Fourier 展開

$$\tilde{\Phi} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_0 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{t \in F^*} C(\tilde{\Phi}, t \cdot \text{diag } y) \cdot W \begin{pmatrix} t y_{\infty} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (y \in F_A^*)$$

をえつ. ここで $\text{diag } y$ は $y \in F_A^*$ に對する F の ideal, y_{∞} は $y \in F_A^*$ の infinite part, 又 W は $GL(2, \mathbb{C})$ 上の複素数値実解析的関数で

$$W \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} = K_p(4\pi y) \cdot (4\pi y) \quad (0 < y \in \mathbb{R})$$

なるものである (K_p は modified Bessel 関数). 更に

$$C(\tilde{\Phi}, \text{diag } y) = C_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{\Phi}, \pi_y \begin{pmatrix} y_f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \quad (y \in F_A^*)$$

となる. ここで, y_f (resp. π_y) は $y \in F_A^*$ (resp. π_A) の finite part

である. このとき,

$$\int_{F_A^*/F^*} (\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_0) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= (2\pi)^{1-2s-\sigma} \cdot \Gamma(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1+p}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1-p}{2}) \times \sum_{\mathfrak{a} \subset F} \zeta(\tilde{\chi}, \mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{a})^{-s}$$

($N(\mathfrak{a})$ は, F の ideal $\mathfrak{a}$ の 絶対 norm) は, $\tilde{\chi}$ に 附随し F standard L-function である。 - 方

$$\int_{F_A^*/F^*} (\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_0) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y = \int_{F_A^*} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\pi_A \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= \frac{2\pi}{|V_F|} \cdot Z(2s+\sigma; \tilde{\chi}, 1) \quad (V_F: F \text{ の 単数群})$$

である。よって, $Z(2s+\sigma; \tilde{\chi}, 1)$ は $\tilde{\chi}$ の standard L-function に 対応する。

11. $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ とする, $L_0 = \mathbb{Z} \oplus \sqrt{m}\mathbb{Z}$ なる orthogonal splitting を生ずるので, $L'_0 = \sqrt{m} \cdot \mathbb{Z}$, $L''_0 = \mathbb{Z}$ とし, §4 の議論を適用する。

$$\sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} \zeta_{\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}}(\tilde{\chi}, 1) \cdot u^{-s} = \sum_{0 < t \in \mathbb{Q}} \zeta(\tilde{\chi}, (t)) \cdot t^{-s}$$

となるが $(t) = t \cdot \mathcal{O}_F$ は, F の principal ideal,

$$\int_{\mathbb{Q}_A^*} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s+1+p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s+1-p)) \times \sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} \zeta_{\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}}(\tilde{\chi}, 1) \cdot u^{-s}$$

であるから、 Φ が 全 z の Hecke operator の eigen function であるならば、Dirichlet series $\sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{(\frac{u}{1})}(\Phi, 1) \cdot u^{-s}$ は Euler 積をもつ (c.f. Sugano [3, §3]), それは、Langlands の意味で、 Φ に 附随する standard L-function となる。よって、

$$\sum_{0 < t \in \mathbb{Q}} c(\tilde{\Phi}, (t)) \cdot t^{-s}$$

は、 Φ の standard L-function に 対応する。

References.

- [1] Arthur, J.: Eisenstein series and the trace formula.
Proc.Sympos.Pure Math. vol 33. Part I, Amer.Math.Soc.
Providence R.I. (1979) 253-274.
- [2] Maass, H.: Automorphe Funktionen von mehreren Veranderlichen
und Dirichletsche Reihen.
Abh.Math.Sem.Univ. Hamburg 16 (1949) 72-100.
- [3] Sugano, T.: On Dirichlet series attached to holomorphic cusp
forms on $SO(2, q)$. (to appear)
- [4] Weil, A.: Dirichlet series and automorphic forms.
Lecture Notes in Math. 189. (1971) Springer-Verlag.