

# Holomorphic Evolution Operator について

東大(理) 増田久弥

## §1. はしがき

この話の目的は, holomorphic evolution operator (以下 H. E. O. と略記) に関する Kato-Tanabe の結果:

- (1) Osaka Math. Journal, vol 14, 107-133
  - (2) Osaka Journal of Math., vol 4, 1-4
- の逆を示すことである。最近, 私は, 拡散方程式

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x)u$$

$$(x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

を, 例えば, 連続関数空間

$$C_0 \equiv \{u \mid u(x) \text{ は一様連続且 } |u(x)| \rightarrow 0 \text{ (} |x| \rightarrow \infty \text{)}\}$$

(位相は, maximum norm)

の中で積分する事に興味をもちました。ここで係数は,



( $\alpha$  につき 112 は一様に) Hölder 連続 と仮定すれば,

命題2 各  $t$  に対して,  $A$  と同様にして,  $A(t)$  を定めるならば,  $(A(t))$  は形式的に,

$$A(t)u = \sum a_{jkl}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_{j\alpha}(t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(t)u$$

と与えられる)  $A(t)$  は  $C_0$  で evolution operator  $U(t, \mu)$  を生成する

$$(7) \quad U(t, r) = U(t, \mu) U(\mu, r) \quad (\mu < r < t)$$

$$(8) \quad U(t, t) = I \text{ (identity operator)}$$

$$(9) \quad U(t, \mu) \text{ は, } 0 \leq \mu \leq t \text{ につき 強連続.}$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t, \mu) = A(t) U(t, \mu) \quad (0 < \mu < t)$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} U(t, \mu)x = -U(t, \mu) A(\mu)x \quad (x \in D(A(\mu))).$$

ここで,  $D(A(t))$  は,  $t$  につき変化する ことに注意する必要があります。上の係数に関する条件すらも, もっと弱く  $t$  につき ( $\alpha$  につき一様に) 連続 のみで上の命題2が成るか, 判りかねてしまいました。  $t$  につき 解析的 ならばどうでしょう? (1)及び(2)の結果を適用して

$U(t, \mu)$  は実軸の近傍で,  $t$  と  $\mu$  ( $|\arg(t - \mu)| < \text{const.}$ ) につき, 正則である —  
 ことが示されます。そのような  $U(t, \mu)$  を H.E.O.  
 と呼びます。

## §2. 結果

定理 1.  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .  $\Delta$  を  $(0, \infty)$  の複素  
 凸近傍.  $X$  を 複素 Banach 空間.  $\mathcal{J}_\delta = \{(\mu, t) \mid$   
 $\mu, t \in \Delta, |\arg(t - \mu)| < \delta\}$ .

$\{U(t, \mu)\}$  を,  $(\mu, t) \in \mathcal{J}_\theta$  で定義された  $X$   
 の中の有界作用素の族  $\mathcal{U}$  について条件をみたすとする。

$$(1-1) \quad U(t, \mu)U(\mu, r) = U(t, r) \\
 U(t, t) = I \\
 ((r, \mu), (\mu, t) \in \mathcal{J}_\theta)$$

$$(1-2) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し,} \\
 U(t, \mu) \text{ は } \mathcal{J}_{\theta+\varepsilon} \text{ の中一様有界で } \mathcal{J}_{\theta-\varepsilon} \\
 \text{の } \mu=t \text{ で連続}$$

$$(1-3) \quad U(t, \mu) \text{ は, } (\mu, t) \in \mathcal{J}_\theta \text{ につき正則.}$$

この時,

$$D(A(t)) = \{x \mid \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h, t) - I}{h} x = \text{存在} (=y)\}$$

$A(t)x = y \quad (\equiv \lim_{h \rightarrow 0} [\mathcal{U}(t+h, t) - I]x/h)$   
と定める,

(1-a)  $A(t)$  は稠密に定義された閉作用素  
あるコンパクト集合  $K$  ( $\Delta$  中) とある  $\varepsilon > 0$   
に対して,  $\lambda_0, M$  が存在して

(1-b)

$$\Sigma(\lambda_0; -\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon) (\equiv \Sigma) \subset \rho(A(t))$$

( $t$  は  $K$  のある近傍中)

$$(1-c) \quad \|(z - A(t))^{-1}\| \leq M / |z| \quad \begin{matrix} t \in K \\ (z \in \Sigma) \end{matrix}$$

(1-d)  $(z - A(t))^{-1}$  は, 各  $z$  を固定した時に,  
 $t$  につき 正則 ( $t \in K$ ).

が成立する。

---

この逆は, H. Komatsu (東大理学部紀要, '61) に  
はじまり, Kato-Tanabe は, (1) (2) の中で, 次  
の如く与えた。

定理 2 (Kato-Tanabe)  $\{A(t)\}$  を, 上の

(1-a) ~ (1-d) をみたす  $X$  の中の作用素の族とする。  
この時  $\mathcal{U}_0$  上で定義された  $X$  の中の有界作用素の族  
 $\{\mathcal{U}(t, \mu)\}$  で, (1-1) (1-2) (1-3) 及び

$$(1-4) \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t, \rho) = A(t) U(t, \rho) \\ (A, t) \in \Omega_\theta$$

$$(1-5) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} U(t, \rho) \alpha = -U(t, \rho) A(\rho) \alpha \\ (A, t) \in \Omega_\theta, \alpha \in D(A(\rho))$$

をみたすものが存在する。

### §3 定理1の証明

任意の  $t^* \in \Delta$  を固定する。十分小さい  $\eta > 0$  と  
 すると、次の如き  $\delta > 0$  と  $t_1, \dots, t_4 \in \Delta$  が存在す  
 る；

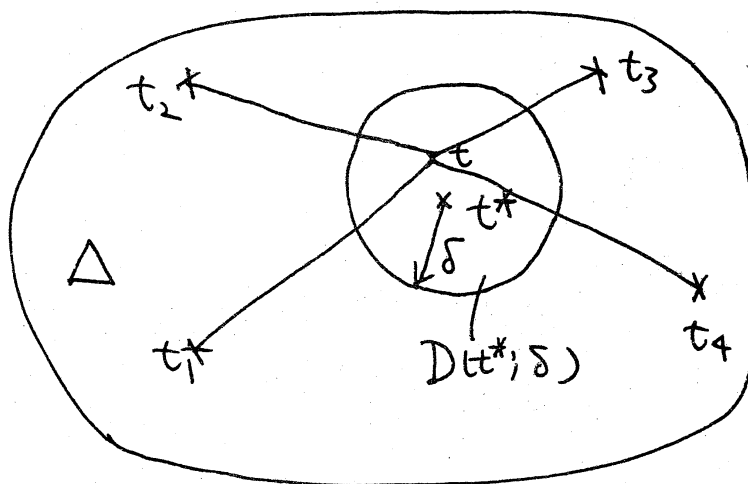
$$\theta - 2\eta < \arg(t - t_1) < \theta - \eta$$

$$\theta - 2\eta < \arg(t_3 - t) < \theta - \eta$$

$$-\theta + \eta < \arg(t - t_2) < -\theta + 2\eta$$

$$-\theta + \eta < \arg(t_4 - t) < -\theta + 2\eta$$

$$(\forall t \in D(t^*; \delta) \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t^*| \leq \delta\})$$



$$V(t, t_1; z) \equiv \int_{t_1}^t e^{-z(t-\lambda)} U(t, \lambda) d\lambda$$

(積分路は線分  $[t_1, t]$ )

と定めると、これは次の性質をもつ。

(i)  $V(t, t_1; z)$  は  $t \in D(t^*, \delta)$  につき 正則

(ii)  $\|V(t, t_1; z)\| \leq \text{const.} / |z|$

( $t \in D(t^*, \frac{\delta}{2})$ ,  $-\frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta$ )

(iii)  $\|V_t(t, t_1; z)\| \leq \text{const.} / |z|$

(iii) と同じ  $t, z$  に対し  $z$ )

(iv)  $\lambda V(t, t_1; \lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} I$  (strongly)

( $\lambda$  は実数)

(v) 任意の  $x \in X$  に対し  $z, V(t, t_1; z)x \in D(A(t))$

(vi)  $(z - A(t))V(t, t_1; z) = I - V_t(t, t_1; z).$

以下、順次証明する。

$$J_\varepsilon \equiv \int_{t_1}^{t-\varepsilon} e^{-z(t-\lambda)} U(t, \lambda) d\lambda \quad \text{は} \quad (1-3) \text{ につき}$$

正則。  $\varepsilon \downarrow 0$  の時、この積分は、尤もき一樣に、

(1-2) につき、

$$J \equiv \int_{t_1}^t e^{-z(t-\lambda)} U(t, \lambda) d\lambda$$

に収束する。さうして  $J$  は正則である。

$$\begin{aligned} \|V(t, t_1; z)\| &\leq \int_{t_1}^t e^{-\operatorname{Re}[z(t-A)]} \|U(t, A)\| dA \\ &\leq \operatorname{const.} / |z| \cos(\theta' + \theta'') \end{aligned}$$

( $\theta' = \arg z$ ,  $\theta'' = \arg(t - t_1)$ )  
 かつ  $(iv)$  を得る。  $V(t, t_1; z)$  は正則かつ

$$V(t, t_1; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\zeta|=\delta} \frac{V(\zeta, t_1; z)}{\zeta - t} d\zeta$$

とかけれる。 かつ  $\zeta$ ,

$$V_t(t, t_1; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\zeta|=\delta} \frac{V(\zeta, t_1; z)}{(\zeta - t)^2} d\zeta$$

にあるから,

$$\begin{aligned} \|V_t(t, t_1; z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\zeta|=\delta} \frac{\|V(\zeta, t_1; z)\|}{(\zeta - t)^2} d\zeta \\ &\leq \operatorname{const.} \|V(\zeta, t_1; z)\| \\ &\leq \operatorname{const.} / |z| \quad [(iv) \text{ かつ}] \end{aligned}$$

を得る。  $(iv)$  を示す。

$$\begin{aligned} \lambda V(t, t_1; z) &= \lambda \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-A)} U(t, A) dA \\ &= \int_0^{\lambda(t-t_1)} e^{-A} U(t, t - \frac{A}{\lambda}) dA \\ &\xrightarrow{(3.5)} \int_0^\infty e^{-A} dA U(t, t) \end{aligned}$$

$$= I \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

ここで、仮定 (1-1) (1-2) を用いた、容易な計算より

$$\begin{aligned} V(t+h, t_1; z) - V(t, t_1; z) &= \int_{t_1}^{t+h} e^{-z(t+h-A)} U(t+h, A) dA \\ &\quad - \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} U(t, A) dA \\ &= \int_t^{t+h} e^{-z(t+h-A)} U(t+h, A) dA \\ &\quad + \int_{t_1}^t [e^{-z(t+h-A)} - e^{-z(t-A)}] U(t+h, A) dA \\ &\quad + \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} [U(t+h, A) - U(t, A)] dA \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

左辺は、(A) に於て、 $z$  正則かつ、両辺を  $h$  について  $h \downarrow 0$  とすることにより、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\xrightarrow[\text{(強)}]{} V_t(t, t_1; z) \quad (h \downarrow 0) \\ \text{容易に、} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{h} J_1 \rightarrow \textcircled{\otimes} I \quad (h \downarrow 0)$$

$$\frac{1}{h} J_2 \rightarrow -z \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} U(t, A) dA$$

$$= -z V(t, t_1; z)$$

とこより、仮定 (1-1) により、

$$J_3 = [U(t+h, t) - I] V(t, t_1; z)$$

を得る。故に

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h, t) - I}{h} V(t, t_1; z) = \text{存在}$$

且

$$V_t(t, t_1; z) = I - z V(t, t_1; z) + A(t) V(t, t_1; z)$$

をみたす。これは (N), (N') の成立を示す。

同様に、

$$W(t_3, t; z) \equiv \int_t^{t_3} e^{-z(\lambda - t)} U(\lambda, t) d\lambda$$

と定義すると、この  $W$  は、(N) (N') 以外に、

(N') 任意の  $x \in D(A(t))$  に対し、

$$W(t_3, t; z) \bigwedge_{\lambda} A(t) x = x + W_t(t_3, t; z) x$$

をみたす。

さて、 $\lambda_0$  を十分大きくとって、

$$\|V_t(t, t_1; z)\| < \frac{1}{2}$$

$$\|W_t(t_3, t; z)\| < \frac{1}{2}$$

が、 $|z| \geq \lambda_0$  に対し成立するとする。(N'') による。

次に,

$$B(t, t_1; z) = V(t, t_1; z) (1 - V(t, t_1; z))^{-1}$$

とおく, (iv) — (iv') により

(12)  $B(t, t_1; z)$  は,  $t \in D(t^*, \frac{\delta}{2})$  に対し正則.

$$(13) \|B(t, t_1; z)\| \leq 2 \|V(t, t_1; z)\|$$

$$\leq \text{const.} / |z|$$

$$(z \in \sum(\lambda_0) - \frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta))$$

$$(14) (z - A(t)) B(t, t_1; z) = I$$

(iv') と (v') により  $D(A(t))$  は  $X$  の稠密且  
又 (iv') を考慮すれば,  $B(t, t_1; z) = (z - A(t))^{-1}$   
且

$$(1) \sum(\lambda_0) - \frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta) \subset \rho(A(t))$$

$$(2) \|(z - A(t))^{-1}\| \leq \text{const.} / |z|$$

$$(z \in \sum(\lambda_0) - \frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta))$$

(1)  $(z - A(t))^{-1}$  は,  $t \in D(t^*, \frac{\delta}{2})$  に対し  
正則

が示される。同様に,  $t_1, t_3$  の代わりに,  $t_2, t_4$  を  
用い,  $t^*$  が  $\Delta$  の任意の元,  $\eta$  は任意に小さい数,  
コンパクト集合  $K (\subset \Delta)$  は  $D(t_j^*, \delta_j)$  の有限個で  
おおわれる事を考慮すれば, 求めるべき結論を得る。