

Weak and Strong Convergence of Implicit Iterative Sequences for Nonlinear Operators

芝浦工業大学 厚芝 幸子 (Sachiko Atsushiba)
Department of Mathematics,
Shibaura Institute of Technology

1. 序論

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときである. $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. 不動点近似 (写像の不動点をみつける問題) はいろいろな非線形問題と関わっており, 多くの数学者により研究されてきた. そのような中で Hilbert 空間の閉凸部分集合上の非拡大写像に対する不動点近似として, Xu-Ori [34] は有限個の写像 $T_1, T_2, \dots, T_r$ に対して次の陰的点列近似法 (implicit iteration process) を導入した: $x = x_0 \in C$ とし,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_n x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

ここで $\{\alpha_n\}$ を $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とし, $T_n = T_{n+r}$ とする. そして Xu-Ori [34] は (1) で定義される iteration process の弱収束定理を Hilbert 空間において証明した. Liu [23] は (1) で定義される iteration process を研究し, 一様凸な Banach 空間において, 写像族 $T_1, T_2, \dots, T_r$ の中で semicompact となる写像 T_i が存在するという仮定のもとで強収束定理を証明した ([2, 3, 12, 4, 20, 21, 28, 35] も参照).

H を Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とする. C から H への作用素 A が単調であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq 0$$

が成立するときという. A を C から H への単調作用素とする. このとき, すべての $v \in C$ に対して

$$\langle v - u, Au \rangle \geq 0$$

が成り立つとき, $u \in C$ を変分不等式の解といい, その解の集合を $VI(C, A)$ で表す. 変分不等式の解 u をみつける問題は変分不等式問題とよばれる. この問題に関する研究は, Stampacchia [26, 27] によって始まり, その後, 多くの数学者によって幅広く研究が行われてきた. Takahashi-Toyoda [31] は, 非拡大写像 S の不動点集合 $F(S)$ と変分不等式問題の解集合 $VI(C, A)$ の共通部分の点, 即ち, $F(S) \cap VI(C, A)$ の点を見つけるという問題に対して研究し, 点列近似法で $F(S) \cap VI(C, A)$ の点への弱収束定理を証明した.

この論文では, まず, $F(S) \cap VI(C, A)$ の点を見つけるという問題に対して, [12, 4, 31, 34] などの考えを用いて, 非拡大写像と inverse-strongly-monotone operator に対する implicit iteration process を導入する. そして, それにより $F(S) \cap VI(C, A)$ の点へ

の弱および強収束定理を証明する. さらに, Hilbert 空間における変分不等式問題を拡張したつぎの問題を扱う ([1] 参照).

Problem 1.1. E をなめらかな Banach 空間とし, E^* を E の共役空間とする. $\langle x, f \rangle$ で $x \in E$ における $f \in E^*$ の値を表す. C を空でない閉凸部分集合とし, A を C から E への増大作用素とする. すべての $v \in C$ に対して

$$\langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0$$

をみたす $u \in C$ をもとめよ. ただし, J は E の双対写像である.

Problem 1.1 の解 $u \in C$ の集合を $S(C, A)$ であらわす. つまり,

$$S(C, A) = \{u \in C : \text{すべての } v \in C \text{ に対して } \langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0\}$$

とする. この問題は, 非拡大写像の不動点問題, 増大作用素の零点をもとめる問題等と関連がある ([1, 30] 等参照).

この論文では, [1, 34] 等を参考にして, Problem 1.1 の解を求めるために次のような iteration process を考える: $x_1 = x \in C$ とし, $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, Q_C は E から C の上への sunny nonexpansive retraction であり, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ をみたす数列とする. 結果として得られた Banach 空間における弱収束定理および強収束定理を証明し, その応用についても記す.

2. 準備と補題

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^* \rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す. $x_n \rightarrow x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す. $x_n \rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ も x_n が x に弱収束することを表す. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}^+$ はそれぞれすべての正の整数からなる集合, すべての非負の整数からなる集合を表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする.

$B_1 = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ とする. Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは任意の $x, y \in B_1$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (2)$$

が存在するときにいう. このとき, Banach 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $x \in B_1$ に対して, 極限 (2) が $y \in B_1$ に関して一様に収束するとき, Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるという. 極限 (2) が $x, y \in B_1$ に関して一様に収束するとき, Banach 空間 E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるという. このとき,

Banach 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう. Banach 空間 E が Opial 条件をみたすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ をみたすならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in E$ に対して成立するときという ([25] 参照). 回帰的な Banach 空間においては, この条件は E の net $\{x_\alpha\}$ が $\lim_{\alpha} x_\alpha = x$ をみたすならば

$$\lim_{\alpha} \|x_\alpha - x\| < \lim_{\alpha} \|x_\alpha - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in E$ に対して成立するという条件と同値である ([7] 参照). 双対写像 $J: E \rightarrow E^*, x \mapsto \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ が一価で弱点列連続であれば E は Opial 条件をみたす. すべての Hilbert 空間, $\ell^p (1 < p < \infty)$ は Opial 条件をみたす ([22, 25] 参照). L^p -空間 ($p \neq 2$) は Opial 条件をみたさないが, 過分な Banach 空間は Opial をみたすようにリノルミング可能である ([17, 25] 参照).

次のように定義される関数 $\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ は E の modulus of smoothness とよばれる:

$$\rho(\tau) = \sup \left\{ \frac{1}{2} (\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 : x, y \in E, \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Banach 空間 E が一様になめらかであるための必要十分条件は $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau)/\tau = 0$ が成立することであると知られている. q は $1 < q \leq 2$ をみたす実数とする. Banach space E が q -uniformly smooth であるとは, ある定数 $c > 0$ が存在して, すべての $\tau > 0$ に対して $\rho(\tau) \leq c\tau^q$ が成立するときという ([14, 32] 等参照). q -uniformly smooth Banach 空間については次の補題が知られている ([14, 15] 参照).

Lemma 2.1 ([14, 15]). q は $1 < q \leq 2$ をみたす実数とする. Banach 空間 E が q -uniformly smooth であるための必要十分条件は, ある定数 $K \geq 1$ が存在し, 任意の $x, y \in E$ に対して

$$\frac{1}{2} (\|x + y\|^q + \|x - y\|^q) \leq \|x\|^q + \|Ky\|^q \quad (3)$$

が成立することである.

不等式 (3) を成立させる最も良い定数 K は E の q -uniformly smoothness constant とよばれる ([14] 等参照).

q は $q > 1$ をみたす実数とする. 各 $x \in E$ に対して, 次のように定義される E から 2^{E^*} への写像 J_q は一般化された双対写像 (generalized duality mapping) という:

$$J_q(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^q, \|x^*\|^q = \|x\|^{q-1}\}.$$

特に $J = J_2$ は正規化された双対写像 (normalized duality mapping) とよばれる. $x \neq 0$ である任意の $x \in E$ に対して, $J_q(x) = \|x\|^{q-2} J(x)$ が成立する. E が Hilbert 空間であれば, J は E の恒等写像 I となる (詳細は [14, 32] 等を参照). 次の補題は Lemma 2.1 を用いて証明される ([33] 参照).

Lemma 2.2 ([33]). q を $1 < q \leq 2$ をみたす実数とし, E を q -uniformly smooth Banach 空間であるとする. このとき, 任意の $x, y \in E$ に対して,

$$\|x + y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x) \rangle + 2\|Ky\|^q \quad (4)$$

が成立する. ここで J_q は E の generalized duality mapping であり, K は E の q -uniformly smoothness constant である.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, K を C の部分集合とする. C から K の上への写像 Q が sunny であるとは, 任意の $x \in C$ と $t \geq 0$ に対して $Qx + t(x - Qx) \in C$ ならば

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

がつねに成り立つときをいう. C から K の上への写像 Q が retraction であるとは $Q^2x = Qx$ が任意の $x \in C$ に対して成立するときをいう. C から K の上への sunny nonexpansive retraction が存在すれば, K は sunny nonexpansive retract であるといわれる. E が Hilbert 空間であれば, sunny nonexpansive retraction は E から C の上への距離射影に一致する. 次の補題は sunny nonexpansive の 1 つの特徴づけを記している ([30] 等参照).

Lemma 2.3. E をなめらかな Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. E から C の上への retraction Q_C が sunny nonexpansive であるための必要十分条件は,

$$\langle x - Q_Cx, J(y - Q_Cx) \rangle \leq 0$$

がすべての $x \in C$ と $y \in K$ に対して成立することである. ただし, J は E から E^* への双対写像である.

H を Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とする. C から H への写像 A が inverse-strongly-monotone であるとは, ある $\alpha > 0$ が存在して,

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

がすべての $x, y \in C$ に対して成立するときをいう. このような場合, A は α -inverse-strongly-monotone であるという (詳細や例は [16, 24, 31] 参照). なめらかな Banach 空間において, Hilbert 空間の inverse-strongly-monotone mapping の 1 つの拡張の定義を記述する ([1] 等参照). C を滑らかな Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ をとる. C から E への作用素 A は任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2 \quad (5)$$

をみたすならば, α -inverse-strongly-accretive であるといわれる. 不等式 (5) から,

$$\|Ax - Ay\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x - y\| \quad (6)$$

がすべての $x, y \in C$ に対して成立することもわかる.

次の補題は本論文の中でも重要な役割を担う.

Lemma 2.4 ([1]). C を 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ とする. A を C から E への α -inverse-strongly-accretive operator で $S(C, A) \neq \emptyset$ をみたすものとする. λ を $0 < \lambda \leq \alpha/K^2$ をみたす実数とする. このとき, $I - \lambda A$ は C から E への非拡大写像となる. ここで, K は E の 2-uniformly smoothness constant である.

3. INVERSE-STRONGLY-MONOTONE OPERATOR と非拡大写像に対する収束定理

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ をとる. S を C から C への非拡大写像とし, A を C から H への α -inverse-strongly-monotone mapping であるとする. Takahashi-Toyoda [31] は, $F(S) \cap VI(C, A)$ の点を見つけるという問題に対して, 次の iteration process を導入した: $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, P_C は H から C の上への距離射影であり, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ をみたす数列であり, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列とする. Takahashi-Toyoda [31] はこの iteration process により, $F(S) \cap VI(C, A)$ の点への弱収束定理を証明した.

この節ではこの $F(S) \cap VI(C, A)$ の点を見つけるという問題に対して, [31] も参考にしながら, (1) で定義される iteration process をもとに次の iteration process を導入して考察する: $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ をみたす数列であり, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列とする. [12, 4, 31, 34] の考えを用いて, 次の $F(S) \cap VI(C, A)$ の点への弱収束定理を証明できる.

Theorem 3.1. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ をとる. S を C から C への非拡大写像とし, A を C から H への α -inverse-strongly-monotone mapping で $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$ をみたすものとする. P_C を H から C の上への距離射影とする. $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a, b \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a, b に対して, $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \rightarrow 0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $F(S) \cap VI(C, A)$ の点 z に弱収束する. ここで $z = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F(S) \cap VI(C, A)} x_n$ となる.

[12, 4, 31, 34] の考えを用いて, 次の強収束定理も証明できる.

Theorem 3.2. C を Hilbert 空間 H の空でないコンパクト凸部分集合とし, $\alpha > 0$ をとる. S を C から C への非拡大写像とし, A を C から H への α -inverse-strongly-monotone mapping とする. P_C を H から C の上への距離射影とする. $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a, b \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a, b に対して, $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \rightarrow 0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $F(S) \cap VI(C, A)$ の点 z に強収束する. ここで $z = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F(S) \cap VI(C, A)} x_n$ となる.

4. INVERSE-STRONGLY-ACCRETIVE OPERATOR に対する収束定理

この節では, inverse-strongly-accretive operator に対する弱収束定理を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間で証明し, 次に 2-uniformly smooth Banach 空間における強収束定理を証明する. 主定理の証明には次の補題を用いる.

Lemma 4.1. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする. $\alpha > 0$ をとる. A を C から E への α -inverse-strongly-accretive operator で $S(C, A) \neq \emptyset$ をみたすものとする. $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して $\lambda_n \in [a, \alpha/K^2]$ をみたし, $\{\alpha_n\}$ は $\alpha_n \in (0, 1)$ をみたす数列とする. このとき, 任意の $u \in S(C, A)$ に対して, $\|x_{n+1} - u\| \leq \|x_n - u\|$ が成立し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ が成立する.

次のように Banach 空間における弱収束定理が示せる.

Theorem 4.2 ([13]). C を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ をとる. A を C から E への α -inverse-strongly-accretive operator で $S(C, A) \neq \emptyset$ をみたすものとする. Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする. $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して, $\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/K^2]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \rightarrow 0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $S(C, A)$ のある点 z に弱収束する.

Proof. $y_n = Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ とする. $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界である. $\{x_n\}$ の部分点列で $x_{n_i} \rightarrow z$ となるものが存在する. $\{x_n\}$ の定義より,

$$\|x_n - y_n\| = \alpha_n \|x_{n-1} - y_n\|.$$

を得る. さらに, $\{\alpha_n\}$ の仮定より $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ を得る. ある $a > 0$ に対して, $\lambda_{n_i} \in [a, \alpha/K^2]$ であることから $\{\lambda_{n_i}\}$ は有界であり, $\{\lambda_{n_i}\}$ の部分点列 $\{\lambda_{n_{i_j}}\}$ で $\lambda_0 \in [a, \alpha/K^2]$ に収束するものが存在する. 一般性を失うことなく, $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda_0$ としよ. $z \in S(C, A)$ を示す. Q_C は非拡大であり, $y_{n_i} = Q_C(x_{n_i} - \lambda_{n_i} A x_{n_i})$ なので,

$$\begin{aligned} \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - x_{n_i}\| &\leq \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - y_{n_i}\| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \\ &\leq \|(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - (x_{n_i} - \lambda_{n_i} A x_{n_i})\| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \\ &\leq M|\lambda_{n_i} - \lambda_0| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \end{aligned} \quad (7)$$

が成立する. ここで, $M = \sup\{\|Ax_n\| : n = 1, 2, \dots\}$ である. $\{\lambda_{n_i}\}$ が収束することから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 Ax_{n_i}) - x_{n_i}\| = 0 \quad (8)$$

を得る. 一方, [1] より $z \in F(Q_C(I - \lambda_0 A)) = S(C, A)$ を示せる.

最後に, $\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の点に弱収束することを示す. x_{n_i} と x_{n_j} は $\{x_n\}$ の部分点列で, それぞれ $x_{n_i} \rightharpoonup z_1, x_{n_j} \rightharpoonup z_2$ をみたすものとする. これまでの議論より $z_1, z_2 \in z \in S(C, A)$ が得られる. $z_1 = z_2$ であることを証明する. $z_1 \neq z_2$ であると仮定する. Lemma 4.1 と Opial 条件より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_1\| \\ &< \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_2\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_2\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_2\| \\ &< \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_1\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\|. \end{aligned}$$

となるが, これは矛盾である. 従って $z_1 = z_2$ であることが示せたことになる. 以上より, $\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の点に弱収束することを示せた. $\square$

次に, 2-uniformly smooth Banach 空間において inverse-strongly-accretive operator に対する強収束定理を証明する.

Theorem 4.3 ([13]). C を 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし, $\alpha > 0$ をとる. A を C から E への α -inverse-strongly-accretive operator とする. Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする. $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して, $\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/K^2]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \rightarrow 0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $S(C, A)$ のある点 z に強収束する.

Proof. $y_n = Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ とする. $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界である. C がコンパクトなので, $\{x_n\}$ の部分点列で $x_{n_i} \rightarrow z$ となるものが存在する. $\{x_n\}$ の定義より,

$$\|x_n - y_n\| = \alpha_n \|x_{n-1} - y_n\|.$$

を得る. さらに, $\{\alpha_n\}$ の仮定より $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ を得る. ある $a > 0$ に対して, $\lambda_{n_i} \subset [a, \alpha/K^2]$ であることから $\{\lambda_{n_i}\}$ は有界であり, $\{\lambda_{n_i}\}$ の部分点列 $\{\lambda_{n_{i_j}}\}$ で $\lambda_0 \in [a, \alpha/K^2]$ に収束するものが存在する. 一般性を失うことなく, $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda_0$. としてよい. $z \in S(C, A)$ を示す. Q_C は非拡大であり, $y_{n_i} = Q_C(x_{n_i} - \lambda_{n_i} A x_{n_i})$ なので,

$$\|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - x_{n_i}\| \leq M |\lambda_{n_i} - \lambda_0| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \quad (9)$$

が成立する. ここで, $M = \sup\{\|Ax_n\| : n = 1, 2, \dots\}$ である. $\{\lambda_{n_i}\}$ が収束することから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 Ax_{n_i}) - x_{n_i}\| = 0 \quad (10)$$

を得る. 一方, [1] より $z \in F(Q_C(I - \lambda_0 A)) = S(C, A)$ を得る.

Lemma 4.1 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z\| = 0$$

を得る. 以上より, $\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の点に強収束することを示せた. $\square$

次に主定理 (Theorem 4.2) の応用を述べる. C をなめらかな Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ とし, $\beta > 0$ とする. C から E への operator A が α -strongly-accretive であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle Ax - Ay, J(x - y) \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

が成立するときという. ここで, J は E から E^* への双対写像である. C から E への写像 A が β -Lipschitz continuous であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Ax - Ay\| \leq \beta \|x - y\|$$

をみたすときにいう. α -strongly-accretive かつ β -Lipschitz continuous な operator は α/β^2 -inverse-strongly-accretive になることが知られている. 一方, $k \in [0, 1)$ とする. C から C への写像 T が k -strictly pseudocontractive であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して, ある $j(x - y) \in J(x - y)$ が存在し,

$$\langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \frac{1 - k}{2} \|(I - T)x - (I - T)y\|^2$$

が成立するときという. $I - T$ は C から E への $(1 - k)/2$ -inverse-strongly-accretive になることが知られている. まず Theorem 4.2 より得られる α -strongly-accretive かつ β -Lipschitz continuous である写像に対する弱収束定理から述べる.

Theorem 4.4. C を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ をとり, $\beta > 0$ をとる. A を C から E への写像で α -strongly-accretive で β -Lipschitz continuous であり, $S(C, A) \neq \emptyset$ をみたすものとする. Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする. $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha/\beta^2)$ をみたすある実数 a に対して, $\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/\beta^2 K^2]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \rightarrow 0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $z \in S(C, A)$ に弱収束する.

次の定理は, inverse-strongly-accretive operator の零点をみつける問題に関する弱収束定理である.

Theorem 4.5. E を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間とし, $\alpha > 0$ をとる. A を E から E への inverse-strongly-accretive operator で $A^{-1}0 = \{u \in E : Au = 0\} \neq \emptyset$ をみたすものとする. $x_1 = x \in E$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n)(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して, $\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/K^2]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \rightarrow 0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $z \in A^{-1}0$ に弱収束する.

REFERENCES

- [1] K. Aoyama, H. Iiduka and W. Takahashi, *Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2006** (2006), 1-13.
- [2] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 57-68.
- [3] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), pp.9-16, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004. g
- [4] S. Atsushiba, *Approximating zero points of accretive operators by an implicit iterative sequences*, to appear.
- [5] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska **51** (1997), 1-16.
- [6] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach Spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117-127.
- [7] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61-81.
- [8] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A weak convergence theorem for nonexpansive semigroups by the Mann iteration process in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), pp. 102-109, World Scientific, Singapore, 1999.
- [9] S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, *Approximating common fixed points by the Mann iteration procedure in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 351-361.
- [10] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains*, Fixed Point Theory and Applications, Vol.3 (Y.J. Cho, J.K. Kim and S.M. Kang Eds.), pp. 15-31, Nova Science Publishers, New York, 2002.
- [11] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence of Mann's-type iterations for nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, Nonlinear Anal. **61** (2005), 881-899.
- [12] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive semigroups in Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications, **2005** (2005), 343-354.
- [13] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of an implicit iterative process for inverse-strongly-accretive operators*, to appear.
- [14] K. Ball, E.A. Carlen and E.J. Lieb, *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Invent. Math. **115** (1994), 463-482.
- [15] H. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland, 1982.
- [16] F.E. Browder and W.V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967) 197-228.
- [17] D. Van Dulst, *Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. London. Math. Soc. **25** (1982), 139-144.

- [18] H. Iiduka and W. Takahashi *Weak convergence theorems by Cesàro means for nonexpansive mappings and inverse-strongly-monotone mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. 7 (2006), 105–113.
- [19] H. Iiduka, W. Takahashi and M. Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, PanAmer. Math. J. 14 (2004), 49–61.
- [20] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. 80 (1979), 493–501.
- [21] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of an implicit iterative process for a countable family of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect.A 58 (7) (2004), 69–78.
- [22] J. P. Gossez and E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific. J. Math. 40 (1972), 565–573.
- [23] J.A.Liu, *Some convergence theorems of implicit iterative process for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Commun. 7 (2002), 113–118.
- [24] F. Liu and M.Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-Valued Anal. 6 (1998), 313–344.
- [25] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591–597.
- [26] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure and Applied Mathematics, 88. Academic Press, New York-London, 1980.
- [27] J.L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 493–519.
- [28] Z.H.Sun, C.He and Y.Q.Ni, *Strong convergence of an implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. 8 (2003), 595–602.
- [29] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Anal. 30 (1997), 1287–1293.
- [30] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [31] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. 118 (2003), 417–428.
- [32] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, *On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities*, J. Nonlinear Convex Anal. 3 (2002), 267–281.
- [33] H. K. Xu *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. 16 (1991), 1127–1138.
- [34] H. K. Xu and R.G. Ori, *An implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. 22 (2001), 767–773.
- [35] Y. Zhou and S.S. Chang, *Convergence of implicit iteration process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. 23 (2002), 911–921.

(S. Atsushiba) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, FUKASAKU, MINUMA-KU, SAITAMA-CITY, SAITAMA 337-8570, JAPAN

E-mail address: atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp