

葉層構造と計量構造とに関連する特性類

東工大 理 大学院 安部 直人

§0. 序

微分可能多様体に葉層構造 (foliation) が与えられた時、

葉層構造に固有な map や vector bundle を定義できる。

これ等の概念は、複素構造に関する、holomorphic map や

holomorphic vector bundle に対応するものである。ここで

の固有な vector bundle とは、foliation の各 leaf 上で flat

になるような bundle を指すものとする。Smooth foliation

の normal bundle はこの典型的な例である。固有な map

とは、一方の foliation の各 leaf を、他方の foliation の各

leaf に写像している様なものとする。

この報告では、上記の bundles に対し foliation に固有

な普通より細かい分類を [1] に沿って定義し、これを使って

若干の事を統一的に調べる。特に、これ等の vector bundles

の構造群の maximal compact subgroup $U(k)$ または $O(k)$ の

α reducibility につき、細かい分類の意味で "foliation
 is compatible to reduction" の存在の obstructions として、
 exotic 特性類と云う base space の cohomology の元
 が定義される。例えば、余次元 q の foliation の normal
 bundle を考える時、構造群 $GL(q, \mathbb{R})$ が $O(q)$ に foliation
 に compatible に reducible である事と、bundle-like
 metric [1] が存在する事とは同値であり、その obstructions
 として Godbillon-Vey の不変量 [6] や exotic characteristic
 classes [2] が定義されると見てよい。また、Heitsch
 [7] は normal bundle において、この Bott の classes のあ
 るものが一般には bundle invariant ではないことを注意し
 ているが、細かい分類の観点から見れば、この事は明確に認
 識される。Complex analytic な場合も扱うので、exotic
 特性類は complex vector bundle に対して定義する。普通
 の特性類の性質と、exotic 特性類の性質との比較も、主たる
 目的の一つである。

§1. 基本的定義

n 次元多様体 M が余次元 q の葉層構造 (foliation) を持つ
 とは、 M の座標系 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, (x_\alpha^i, y_\alpha^j))\}$ ($1 \leq \alpha \leq n-q$,
 $1 \leq i \leq q$) であり、

① 各 $U_\lambda \cap U_\mu (\neq \emptyset)$ において $y_\lambda^i = f_{\lambda\mu}^i(y_\mu^i)$ となる性質を持つものが存在する事である。この様な座標系を flat と呼ぶ。 M の局所座標 $(U, (x^a, y^i))$ は、これを $\mathcal{F}$ に加えても ① が成立する時、 $\mathcal{F}$ に関して flat と呼ばれる。他の flat な座標系 $\mathcal{F}'$ は、 $\mathcal{F}$ と合わせても ① の性質を持つ時、 $\mathcal{F}$ と同じ foliation を定めるとする。 M の $2g$ の trivial な foliation、即ち余次元 0 と n のものをそれぞれ $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_n$ で表わす。(ただし、 $g=0, n=1$ においては、それぞれ y^i の座標は (x^a) のみ、 (y^i) のみと約束する。) M の開集合 U 上に自然に induce される foliation を $\mathcal{F}|_U$ と書く。

M が微分可能多様体の時、微分可能な座標系によって定義される smooth foliation を与えると、 M の tangent bundle $T=TM$ の integrable な subbundle F が $(\partial/\partial x^a)$ により決まる。この時、 TF を $\mathcal{F}$ の normal bundle と呼ぶ。

Flat な座標系 $\mathcal{F}_c = \{(U_\lambda, (x_\lambda^a, y_\lambda^i))\}$ において、 (y_λ^i) は複素座標で ① における $f_{\lambda\mu}^i$ は holomorphic である時、 $\mathcal{F}_c$ を complex analytic foliation と呼ぶ。(複素余次元は g である。) $\mathcal{F}_c$ は余次元 $2g$ の smooth foliation を決め、この underlying な smooth foliation は $\mathcal{F}$ と書かれる。

多様体 M' は foliation $\mathcal{F}'$ を持つとする。この時、連続写

像 $f: M \rightarrow M'$ が $\mathcal{F}$ の各 leaf を $\mathcal{F}'$ のただ1つの leaf に map してゐることは、 f を $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ に compatible な map、または簡単に $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map と呼ぶことにする。 $\mathcal{F}$ について flat な局所座標 (x^i, y^j) 、 $\mathcal{F}'$ について flat な局所座標 (x'^i, y'^j) にて、 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map f は

$$\textcircled{2} \quad y'^j \circ f = f'^j((y^i))$$

を満たす。 $(\mathcal{F}, \mathcal{G}')$ -map を特に $\mathcal{F}$ -basic といふこともある。 Complex analytic foliations $\mathcal{F}_c, \mathcal{F}'_c$ に対しても、 $\textcircled{2}$ で f'^j が holomorphic である事を要求して、 $(\mathcal{F}_c, \mathcal{F}'_c)$ -map を定義する。

$M \times \mathbb{R}$ 上には余次元 $q+1$ の自然な foliation $\overline{\mathcal{F}}$ が $\mathcal{F}$ から induce される。 写像 $j_s: M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ を、 $p \in M$ 、 $s \in \mathbb{R}$ に対し、 $j_s(p) := (p, s)$ と定義すれば、これは $(\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}})$ -map である。 二つの $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic であるとは、 $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{F}')$ -map $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow M'$ が $f_0 = H \circ j_0$, $f_1 = H \circ j_1$ を満たすものが存在することと定義する。 なお、smooth foliations を考える時には、map などはずべて smooth なものを使う。

注意 Foliations を考えない時は a map は $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ -map または $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -map と見られる。

§2. $\mathcal{F}$ -cocycles

以下の議論で、多様体 M には foliation $\mathcal{F}$ が与えられているとする。Lie 群 G と M の開集合 U に対し、 G 値を持つ $\mathcal{F}|U$ -basic functions の全体を $A_{\mathcal{F}}^0(U, G)$ で表す。更に、これから定義される M 上の presheaf を $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ と記す。

$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の開被覆とする。

定義 $\eta = \{g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow G\}_{\lambda, \mu \in \Lambda}$ は次の条件を満足する時、係数 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ の cocycle、または簡単に $\mathcal{F}$ -cocycle と呼ばれる。 $\mathcal{F}$ -cocycles 全体の集合を $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ と書く。

- i) $g_{\lambda\mu} \cdot g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu}$ on $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$ (cocycle)、
- ii) $g_{\lambda\mu} \in A_{\mathcal{F}}^0(U_\lambda \cap U_\mu, G)$ 。

M が complex analytic foliation $\mathcal{F}_c$ を持つ時には、上の定義で $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換えて $\mathcal{F}_c$ -cocycle と云う概念を定義できる。この時 G は complex Lie 群を考える。

例えば、普通の G -bundle の transition functions は η の $\mathcal{F}$ -cocycle であり、 $\mathcal{F}$ -cocycle は flat G -bundle の transition functions になる。このように自明なものではない典型例としては、smooth foliation $\mathcal{F}$ の normal bundle $\pi^* \mathcal{F}^\perp$ の、 $\mathcal{F}$ に関して flat な座標系によつて定義される $\nu = \{(\partial y_\mu^i / \partial y_\lambda^j) : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL(q, \mathbb{R})\}$ がある。

$\mathcal{F}_c$ -vector ^{bundle} の典型例としては、 $\mathcal{F}_c$ に関する flat 座標系 =
 おいて $\mathcal{U}_c = \{ (\partial y_\mu^i / \partial y_\lambda^j) : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL(q, \mathbb{C}) \}$ で定義
 されるものは、 y_μ^i が y のみか函数で holomorphic である
 から 確かに条件をみたす。

定義 $\Rightarrow$ の $\mathcal{F}$ -cocycles $\eta^0 = \{g_{\lambda\mu}^0\}$, $\eta^1 = \{g_{\lambda\mu}^1\}$ が
 $\mathcal{F}$ -equivalent とは、次の条件をみたす $\{h_\lambda : U_\lambda \rightarrow G\}$
 が存在することである。この時、 $\eta^0 \cong \eta^1$ と書く。

- i) $g_{\lambda\mu}^1 = h_\lambda^{-1} g_{\lambda\mu}^0 h_\mu$ on $U_\lambda \cap U_\mu$, (cohomologous)
- ii) $h_\lambda \in A_{\mathcal{F}}^0(U_\lambda, G)$ 。

特に $\mathcal{O}$ に関しては、 $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}, \cong$ を $\mathcal{G}, \cong$ と書く事とする。

$\mathcal{F}$ -cocycles η は $\mathcal{F}$ -equivalent なものの成す類を、
 $[\eta]_{\mathcal{F}}$ または同じ文字 η で表わし、 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_{\mathcal{F}}) := Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_{\mathcal{F}}) / \cong_{\mathcal{F}}$
 で cohomology set を表わす。異なる開被覆で定義されて
 いる $\mathcal{F}$ -cocycles に対しては、その共通細分を考える事によ
 り、 $\mathcal{F}$ -equivalent の概念は拡張される。 M 上の $\mathcal{A}$ の $\mathcal{F}$ -
 $\mathcal{F}$ -cocycles の $\mathcal{F}$ -equivalence classes の全体は、proper
 開被覆による direct limit $H^1(M, \mathcal{G}_{\mathcal{F}}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ に
 よって表わされる。特に、 M 上恒等的に G の単位元 1 を値と
 する函数によって定義される $H^1(M, \mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ の元を $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ で表わ
 すこととする。

特に、 $\mathcal{F}$ が complex analytic foliation $\mathcal{F}_c$ の underlying な foliation の時、 $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}_c}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ であるが、 $\mathcal{F}_c$ -cocycles γ は、上の定義の $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換えて $\mathcal{F}$ -equivalent より細かく $\mathcal{F}_c$ -equivalent なる概念を定義できる。

写像 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map ならば、 $\eta' \in Z^1(\mathcal{U}', \mathbb{C}_{\mathcal{F}'})$ から induce される cocycle $f^*\eta' = \{g'_{\lambda\mu} \circ f\}$ は明らかに $Z^1(f^*\mathcal{U}', \mathbb{C}_{\mathcal{F}'})$ の元となるので、次の事がわかる。

命題 2.1 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map $f: M \rightarrow M'$ は、induced cocycle を対応させる事によって、cohomology set への map $f^*: H^1(M', \mathbb{C}_{\mathcal{F}'}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ を induce する。

例 2.1 $f: M \rightarrow M'$ が submersion の時、 M 上 $\mathcal{F}$ は自然に $\mathcal{F}$ foliation $\mathcal{F}$ が決まり、 f は $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map を見做して、 $f^*: H^1(M', \mathbb{C}_{\mathcal{F}'}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ が induce される。この f^* の image に入る元は、 $\mathcal{F}$ の leaf 上 global 1-形式もあるが、 f^* は一般には全射でない。

特に M の恒等写像を $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ -map と見做して $\mathcal{G}$ と書くとすると、 $\mathcal{G}^*: H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{C})$ が induce されるが、これは injective でも surjective でもない。この事は後の sections の結果から解る。ここは、 $H^1(M, \mathbb{C})$ は M 上の $\mathbb{C}$ の G -bundles の普通の意味での同型類の全

体とみなせる [8]。 ほぼ、 $L_{\mathcal{F}}^*$ が injective でないと言う事は、 M 上の $\mathcal{F}$ -cocycles の $\cong$ による分類が $\simeq$ による分類より細かくなると言う事である。

$\mathcal{F}$ -cocycles に、 $\cong$ と $\simeq$ との間にある同値関係を次のように定義する。

定義 M 上の $\Rightarrow$ の $\mathcal{F}$ -cocycles η^0, η^1 が $\mathcal{F}$ -homotopic であるとは、 $M \times \mathbb{R}$ 上の $\mathcal{F}$ -cocycle $\bar{\eta}$ が存在して $j_0^* \bar{\eta} \cong \eta^0$ かつ $j_1^* \bar{\eta} \cong \eta^1$ とする事を云う。 更に、 η^0 と η^1 が有限個の $\mathcal{F}$ -homotopic な $\mathcal{F}$ -cocycles に結ばれる時 $\eta^0 \cong \eta^1$ と表わす。

普通の G -bundles と普通の同値 $\cong$ に関しては次の事実が知られている。(例えば Hirzebruch [8]。)

□ $\eta^0 \simeq \eta^1$ ならば $\eta^0 \cong \eta^1$ 。 つまり、 $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が普通の意味で homotopic な maps とすれば、 $f_0^* = f_1^*: H^1(M', \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z})$ が成立する。

この事実は、 $\mathbb{Q}$ を $\mathcal{F}$ にすると一般には成立しない。 後で定義する exotic 特性類によっても、相違は解る。

命題 2.2 $\Rightarrow$ の $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic ならば、 M' 上の $\mathcal{F}'$ -cocycle η' に対しては $f_0^* \eta' \cong f_1^* \eta'$ が成立する。

注意 M 上の forms から定義される cohomology について
は、状況は図に似て来る。 $\mathcal{F}$ が smooth foliation の時

$$A_{\mathcal{F}}^* := \{ \varphi \in A^* \mid i_X \varphi = \mathcal{L}_X \varphi = 0, \forall X \in \Gamma \mathcal{F} \}$$

は、 M の global forms 全体を作る de Rham complex (A^*, d) の subcomplex $(A_{\mathcal{F}}^*, d)$ を与える。 この complex の cohomology を $H_{\mathcal{F}}^*(M)$ と書き、base-like cohomology または $\mathcal{F}$ -basic cohomology と呼ぶ [12]。 M' が smooth foliation $\mathcal{F}'$ を持ち、 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map ならば、homomorphism $f^*: H_{\mathcal{F}'}^*(M') \rightarrow H_{\mathcal{F}}^*(M)$ が induce される。 次の事が証明できる [1]。

□ $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic ならば、 $f_0^* = f_1^*: H_{\mathcal{F}'}^*(M') \rightarrow H_{\mathcal{F}}^*(M)$ が成立する。

§3. $\mathcal{F}$ -fibre bundles と構造群の $\mathcal{F}$ -reduction

Lie 群 G が多様体 N 上に効果的に作用しているとする。
 W を全空間 W 、底空間 M 、射影 π 、構造群 G 、fibre N であるような fibre bundle とする。

定義 Fibre bundle W は次の性質をみたす座標系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ が存在する時、 $\mathcal{F}$ -fibre bundle と呼ばれる。 すなわち、

i) $\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times N$: bundle isomorphism、

ii) $\exists \{g_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, G_{\mathcal{F}})$, $\forall p \in U_\lambda \cap U_\mu, n \in N$

$$\pi^* \pi_\mu^{-1}(p, n) = (p, g_{\lambda\mu}(p)n).$$

このような W に対し、 M の開集合 U と $\pi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times N$: bundle isomorphism の組 (U, π) を上記の座標系 π に加えても i), ii) を満たすならば、 (U, π) を $\mathcal{F}$ -admissible chart と云う。

定義 W の二つの座標系が、すなわち二つの $\mathcal{F}$ -admissible charts を共有するならば、この等しい $\mathcal{F}$ -fibre bundle を定めるとする。

この事は二つの座標系を決める $\mathcal{F}$ -cocycles が $\mathcal{F}$ -同値 (= なる) 事と同じである。

定義 W と W' は M 上の $\mathcal{F}$ -fibre bundle として、同じ構造群と fibre を持つとする。 M の identity を cover する bundle isomorphism $f: W \rightarrow W'$ が $\mathcal{F}$ -isomorphism であるとは、 W' の n 個の $\mathcal{F}$ -admissible chart (U, π') に対し、 $(U, \pi' \circ f)$ が W の $\mathcal{F}$ -admissible chart となる、とする。 [8] と同様にして次を得る。

命題 3.1 M 上の構造群 G 、fibre N の $\mathcal{F}$ -fibre bundle の $\mathcal{F}$ -isomorphism による同型類全体は $H^1(M, \mathcal{F}_G)$ と一対一に対応する。

$\eta \in H^1(M, \mathcal{F}_G)$ に対応する $\mathcal{F}$ -isomorphism class α の $\mathcal{F}$ -fibre bundle を η に associate する $\mathcal{F}$ -fibre bundle

と云う事とする。特に $\mathcal{F}$ -vector bundle π においては、 $\mathcal{F}$ -admissible chart π に対応する local frame field を $\mathcal{F}$ -admissible frame field と呼ぶ。

M が complex analytic foliation $\mathcal{F}_c$ を持つ時は、 G を complex Lie 群、 N を complex analytic な多様体として、定義の $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換之れば、 $\mathcal{F}_c$ -fibre bundle が定義できる。命題 3.1 は $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換之ても成立する。

以後は特に断りのない限り、少なくとも微分可能な場合を考えることにする。

$\mathcal{F}$ -vector bundle の例としては、

例 3.1 すべて $\mathcal{O}$ vector bundle は $\mathcal{O}$ -vector bundle。

例 3.2 Flat vector bundle は $\mathcal{T}$ -vector bundle の構造をもつ。

例 3.3 Foliation $\mathcal{F}$ の normal bundle T/F は $\mathcal{F}$ -vector bundle である。更に $F \subset E \subset T$ なる subbundle E が $[F, F] \subset E$ を満たす時、 T/E は canonical な $\mathcal{F}$ -vector bundle の構造を持つ。

証明 $\mathcal{F}$ に関する flat な座標系 $\{(U_\lambda, (x_\lambda^i, y_\lambda^j))\}$ を一つとる。 T/E の fibre の次元を p とする。 $(q \geq p)$ Index の範囲を $1 \leq s, t \leq p, p < r \leq q$ と取る。 $\pi' : T \rightarrow T/E$ を projection とする。各 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ に対して、 x の近傍

$U_{\lambda, x} \subset U_{\lambda}$ が存在して、この上で

$$\pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}}) \wedge \dots \wedge \pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r}) \neq 0$$

と仮定してよい。この時、 $U_{\lambda, x}$ 上の函数 (A_{λ}^t) が存在して

$$\bullet \quad \pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r}) = A_{\lambda}^t \pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t}) \quad \text{on } U_{\lambda, x}$$

が成立する。 $U_{\lambda, x} \cap U_{\mu, x} \neq \emptyset$ であるので $\bullet$ を使って

$$\begin{aligned} \pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\mu}^s}) &= \frac{\partial y_{\lambda}^t}{\partial y_{\mu}^s} \pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t}) + \frac{\partial y_{\lambda}^r}{\partial y_{\mu}^s} (A_{\lambda}^t \pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t})) \\ &= \left(\frac{\partial y_{\lambda}^t}{\partial y_{\mu}^s} + \frac{\partial y_{\lambda}^r}{\partial y_{\mu}^s} A_{\lambda}^t \right) \pi'(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t}). \end{aligned}$$

よって A_{λ}^t が (y_{λ}^i) のみの函数である事を証明すればよい。

$\bullet$ より $(\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s}, \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r} - A_{\lambda}^t \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t})$ は $E|U_{\lambda, x}$ の frame field である。 $[PF, PE] \subset PE$ より次式の右辺は $\in P(E|U_{\lambda, x})$ であり $\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s} A_{\lambda}^t = 0$ が成立。

$$[\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s}, \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r} - A_{\lambda}^t \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t}] = -(\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s} A_{\lambda}^t) \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t} \quad //$$

例 3.4 V と V' が $\mathcal{F}$ -vector bundle ならば、 $V^*, V \otimes V', V \otimes V'$ は $\mathcal{F}$ -vector bundle である。例として、Lie 群 G が M に almost freely 作用している時、 G の orbits を leaves とする foliation を $\mathcal{F}_G$ とすれば、 T は $\mathcal{F}_G$ -vector bundle の構造を持つ。

このことから complex analytic vector bundle の場合と同様に、 $\mathcal{F}$ -vector bundles の Grothendieck 群 $K_{\mathcal{F}}(M)$ が定義でき

3. (Grothendieck 群 K^0 については例 2.6 [8].)

$\mathcal{F}_C$ -vector bundle の例.

例 3.5 $\mathcal{F}_C$ について flat 基底座標系 $\{(U_\lambda, (x_i^j, y_i^j))\}$ を考
える。この複素座標が $y_i^j = u_i^j + \sqrt{-1}v_i^j$ と表わされてい
る時、 $(\pi(\frac{\partial}{\partial u_i^j}) - \sqrt{-1}\pi(\frac{\partial}{\partial v_i^j}))/2$ を定義される $(T/F) \otimes \mathbb{C}$
a complex subbundle を Q とする。この Q は $\mathcal{F}_C$ -coycle
 $\nu_C = \{(\frac{\partial y_i^j}{\partial y_k^l}) : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL(q, \mathbb{C})\}$ に associate する $\mathcal{F}_C$ -
vector bundle とある。

定義 $\mathcal{F}$ -fibre bundle W に対応する $H^1(M, \mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ の元が
 $\mathcal{G}$ の Lie 部分群 H の inclusion map $\iota_H^{\mathcal{G}} : H \hookrightarrow \mathcal{G}$ により
induce された写像 $\iota_H^* : H^1(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ の
image に含まれる時、 W の構造群は $H \cap \mathcal{F}$ -reducible
であるといふ。

普通の bundle に対しては、次の事が知られている [8].

□ H を $\mathcal{G}/H$ が cell となるような $\mathcal{G}$ の closed Lie 部分
群とすれば、 $\iota_H^* : H^1(M, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{G})$ は bijective.

この事は $\mathcal{O}$ を $\mathcal{F}$ とすると、一般には成立しない。例 2.6.

命題 3.2 Smooth foliation $\mathcal{F}$ is a normal bundle T/F の構
造群 $GL(q, \mathbb{R})$ は、 M が $\mathcal{F}$ に関する bundle-like metric [11]
を持つ限り、 $\mathcal{O}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}$ -reducible である。

この命題は、より一般な次の事より出る。

命題 3.3 M 上の real (resp. complex) $\mathfrak{F}$ -vector bundle V に metric g が、 V の構造群 $GL(k, \mathbb{R})$ (resp. $GL(k, \mathbb{C})$) の $O(k)$ (resp. $U(k)$) の $\mathfrak{F}$ -reduction を与えるものは、 g の $\mathfrak{F}$ -admissible frame fields に属する成分が local に $\mathfrak{F}$ -basic になっていく時に限る。

証明 $\mathfrak{F}$ -admissible frame field s_λ に対して Gram-Schmidt の直交化を行なう時、 s_λ に属する g の成分が y_λ のみに depend していき、出てくる成分はすべて y_λ のみの関数となる。よって、得られた frame field は $\mathfrak{F}$ -admissible である。逆は明か。 //

この事は、 V の構造群の reduction が V の tensor field によつて与えられる時、それが $\mathfrak{F}$ -reduction であるかどうか判断する具体的方法を与えてくれる。

定義 Foliation $\mathfrak{F}$ の余次元 q が偶数で、 T/F の構造群が $GL(q/2, \mathbb{C})$ の $\mathfrak{F}$ -reducible である時、 $\mathfrak{F}$ は almost complex foliation と云う。

例えば、 $\mathfrak{F}$ が複素余次元 $q/2$ の complex analytic な foliation の underlying smooth foliation とすれば、 T/F は $\mathbb{C}$ の complex structure が induce する almost complex structure をもつが、これが $\mathfrak{F}$ -reduction を与えて

なる。この例や命題3.2のよき、 $\mathcal{F}$ a normal bundle
 T/F の構造群の $\mathcal{F}$ -reduction を考へる事は有用である。

T/F の構造群 $GL(g, \mathbb{R})$ が、 $\mathcal{F}$ の部分群 H $\wedge$ $\mathcal{F}$ -reducible
 である事と、Conlon [5] の transverse H -structure が
 存在する事は同値である。

構造群が $O(k) (U(k)) \wedge \mathcal{F}$ -reducible な $\mathcal{F}$ -vector bundle
 の例としては次の様なものがある。

例3.6 例2.1 において $Im f^*$ の元 π に associate する $\mathcal{F}$ -
 vector bundle の構造群は、 M' における $O(k) (U(k)) \wedge \mathcal{F}$
 reduction により、 $\mathcal{F}$ -reducible to $O(k) (U(k))$ である。
 より一般に、 $\mathcal{F}$ -vector bundle V の $\mathcal{F}$ -admissible な
 開被覆が $\mathcal{F}$ -basic partition of unity を許すならば、 V の構
 造群は $O(k) (or U(k)) \wedge \mathcal{F}$ -reducible である。ここで、
 $\mathcal{F}$ -basic partition of unity とは、 $(\mathcal{F}$ -basic な M 上の)
 函数による 1 の分解の事である。

§4. Connections on $\mathcal{F}$ -vector bundles

V を $\eta \in H^1(M, \underline{GL(k, F)}_{\mathcal{F}})$ に associate する $\mathcal{F}$ -vector
 bundle とする。ここで F は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を表すとする。

定義 Connection $D: \Gamma V \rightarrow \Gamma(T^* \otimes V)$ は、 V の u がある
 $\mathcal{F}$ -admissible frame field s に対して、

② $D_X s = 0$, for $\forall X \in \Gamma(F|U)$,
 である時、 η compatible な $\mathcal{F}$ -flat connection と呼ばれる。

次の命題は ② より容易に解る。

命題 4.1 $K_D(X, Y) := [D_X, D_Y] - D_{[X, Y]} = 0$, $\forall X, Y \in \Gamma F$.

$\mathcal{F}$ -flat connection の例として、

例 4.1 例 3.3 の T/E には、次に定義する標準的な $\mathcal{F}$ -flat connection が存在する。これは、 $E = F$ の時には、Bott [2] より定義された basic connection と一致する。

T/E には $\rightarrow$ a connection D を取り、 $T = F \oplus F^\perp$ と分解しておく。 $s \in \Gamma(T/E)$ に対し、 $\tilde{s} \in \Gamma T$ かつ $\pi'(\tilde{s}) = s$ なるものを取り、 $\forall X \in \Gamma T$ には

$$\nabla_X s := \pi'([\pi_F X, \tilde{s}]) + D_{\pi_F X} s$$

と定義すれば、 $[\Gamma F, \Gamma E] \subset \Gamma E$ より $\tilde{s}$ の取り方に依らず、 T/E a connection とある。 $\mathcal{F}$ に関して flat な座標 $(U, (x^i, y^j))$ により、 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \pi'(\frac{\partial}{\partial y^j}) = \pi'([\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}]) = 0$ となる、 ∇ は $\mathcal{F}$ -flat connection とある。 $F = C(E)$ の時、[9] には generalized Bott connection と呼ばれるものもある。

例 4.2 例 3.2 により、 V a $\mathcal{F}$ -flat connection とは、即ち V a $\mathcal{F}$ -admissible frame fields と parallel frame fields とを持つ flat connection の事である。

実は、次の定理が成立する。

定理 4.2 $\mathcal{F}$ -vector bundle V 上に η は $\eta \models \text{compatible}$ ならば $\mathcal{F}$ -flat connection が存在する。

証明 $\{S_\lambda\}$ を open covering $\{U_\lambda\}$ 上の $\eta \models$ に関して、 $\mathcal{F}$ -admissible な frame fields α 族とする。ここで $\{U_\lambda\}$ は locally finite な α 分解 $\{f_\lambda\}$ を持つとしてよい。まず $V|_{U_\lambda}$ 上に connection D^λ を $D^\lambda S_\lambda = 0$ によって定義し、 $D := \sum_\mu f_\mu D^\mu$ とおけば、 D は connection であり

$$\theta_\lambda S_\lambda = DS_\lambda = \sum_\mu f_\mu D^\mu (g_{\lambda\mu} S_\mu) = \left(\sum_\mu f_\mu (dg_{\lambda\mu}) g_{\lambda\mu}^{-1} \right) S_\lambda$$
 が成立する。ところで $g_{\lambda\mu}$ は (y^i) のみの関数だから θ_λ の成分は dy_λ^i の一次結合である。よって $D_X S_\lambda = 0$, for $\forall X \in \Gamma(F|_{U_\lambda})$ とある。 //

$\Rightarrow$ の $\mathcal{F}$ -flat connections の間には、次の様な関係がある。

命題 4.3 Vector bundle V があり、 $H^1(M, \underline{GL}(k, F)_\mathcal{F})$ の元 η, η' の各々 $\models$ associate する $\Rightarrow$ 通りの $\mathcal{F}$ -vector bundle の構造を持つとき、各々 $\models$ compatible な $\mathcal{F}$ -flat connections を D, D' とする。この時、 $\forall X \in \Gamma F \models$ $D_X = D'_X$ である事と、 η と η' とが $\mathcal{F}$ -equivalent である事とは同値である。

証明 $\eta, \eta' \models$ である V の $\mathcal{F}$ -admissible frame fields

をそれぞれ s, s' とする。これは a frame fields の定義域 U, U' が共通部分を持つとすれば $g: U \cap U' \rightarrow GL(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で $s' = gs$ とするものが存在する。 $Ds' = (dg)s + g(Ds)$ であり、 $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}|U \cap U')$, $D_X s' = (Xg)s + g(D_X s) = (Xg)s$ 。 となるので、仮定より $D_X s' = D_X s = 0$ for $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}|U \cap U')$ であるから $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}|U \cap U')$, $Xg = 0$ 。 したがって g は (y^i) のみの関数であり、 η と η' の決める $\mathfrak{F}$ -admissible frame fields は同じになる。 逆は明らかである。 //

M' は foliation $\mathfrak{F}'$ を持つとする。 V' は M' 上の $\mathfrak{F}'$ -vector bundle であり η' に associate するもの、 D' は V' 上の $\mathfrak{F}'$ -flat connection であり η' に compatible なるものとする。 次の事が容易に解る。

命題 4.4 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ -map であり f^*V' は f により induce された $\mathfrak{F}$ -flat bundle とすれば、 induced connection f^*D' は f^*V' 上の $f^*\eta'$ に compatible な $\mathfrak{F}$ -flat connection である。

$\mathfrak{F}$ -vector bundle V の構造群 $GL(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の Lie 部分群 G による $\mathfrak{F}$ -reducibility と V 上の $\mathfrak{F}$ -flat connection の holonomy 群に関する事は、

命題 4.5 V 上に、holonomy 群が G に含まれる $\mathcal{F}$ -flat connection が存在すれば、 V の構造群は $G \cap \mathcal{F}$ -reducible である。

証明 V の linear frame bundle を B 、その projection を $\pi: B \rightarrow M$ とする。 V の $\mathcal{F}$ -admissible charts における開被覆 $\{U_\lambda\}$ を、 $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ に関する flat な座標系 $(x_\lambda^i, y_\lambda^j)$ として $(x_\lambda^i, y_\lambda^j): U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n-g} \times \mathbb{R}^g: \text{diffeo.}$ であるようなものとしてよい。この時、 p_λ を $(0,0)$ に対応する点、 D_λ を $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^g$ に対応する U_λ の subset とする。 $\pi_\lambda: U_\lambda \rightarrow D_\lambda$ を natural projection とすれば、 $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ の leaves は $\pi_\lambda^{-1}(p)$, $p \in D_\lambda$ によるものである。 $p_0 \in M$, $u_0 \in \pi^{-1}(p_0)$, p_0 から p_λ への curve c_λ を固定しておく。

V に $\mathcal{F}$ -flat connection D が与えられたとすれば、curve c を沿った平行移動 $\tilde{c}$ が決まる。 D は $\mathcal{F}$ の leaf 上では flat (命題 4.1) であるから、 $\pi_\lambda: U_\lambda \rightarrow D_\lambda$ を covering bundle map $\tilde{\pi}_\lambda: P|_{U_\lambda} \rightarrow P|_{D_\lambda}$ として $u \in P|_{D_\lambda}$ に対して

i) $\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(u)$ は D に関して horizontal として、

ii) $\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(R_g u) = R_g(\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(u))$, $\forall g \in GL(k, \mathbb{R})$

を満たすものが存在する。 各点、 $\pi^{-1}(p_\lambda)$ 上では $u_\lambda := \tilde{c}_\lambda u_0$ を決める。 D_λ における原点 p_λ から発する ray を r_λ とすると、 $u \in P|_{U_\lambda}$ に対して $u_\lambda a = \tilde{\pi}_\lambda^{-1}(\tilde{\pi}_\lambda(u))$ となる $a \in GL(k, \mathbb{R})$

が決まる。この写像を $\varphi_\lambda: P|U_\lambda \rightarrow GL(k, F)$ とすれば、
 transition function $g_{\lambda\mu}(\pi(u)) = \varphi_\lambda(u)(\varphi_\mu(u))^{-1}$ は ii) により $\mathcal{G}|U_\lambda \cap U_\mu$ a leaf 上 constant である。 $g_{\lambda\mu}$ が G -valued である事は、i) により、普通の holonomy 定理と同様に証明できる。 //

この命題の逆については、

命題 4.6 G が $GL(k, F)$ a reductive 子 subgroup である時、 $\mathcal{G}$ -vector bundle V a 構造群が G 且 $\mathcal{G}$ -reducible ならば、 V 上 holonomy 群が G であるような $\mathcal{G}$ -flat connection が存在する。

証明 定理 4.2 により与えられる V 上 a $\mathcal{G}$ -flat connection D に対応する linear frame bundle B 上 a connection form を $\omega: TB \rightarrow \mathfrak{gl}(k, F)$ とする。 G が reductive ならば $\mathfrak{gl}(k, F) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$, $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ なる linear subspace $\mathfrak{m}$ が存在する。 ω の $\mathfrak{g}$ -成分を $\omega_{\mathfrak{g}}$ と表す。 構造群 G への $\mathcal{G}$ -reduction を $\iota: B' \rightarrow B$ とすると、 $\iota^*\omega_{\mathfrak{g}}: TB' \rightarrow \mathfrak{g}$ は B' 上 a connection form とする。 $\iota^*\omega_{\mathfrak{g}}$ に対応する connection D' が与えられる。 //

V a 構造群の reduction が V a tensor field F であるとき、 $\iota^*\omega_{\mathfrak{g}}$ は、

命題 4.7 D を V 上の $\mathcal{F}$ -flat connection とする。 V の metric tensor field g は、 $\forall X \in \Gamma(F)$ に対して

$$D_X g = 0,$$

を満たす時に限り、 V は構造群 $O(k)$ (or $U(k)$) への $\mathcal{F}$ -reduction を与える。

証明 $S = (s_\alpha)$ ($1 \leq \alpha, \beta \leq k$) $\in V|U$ の $\mathcal{F}$ -admissible frame field とすると、 $\forall X \in \Gamma(F|U)$ に対して

$$0 = (D_X g)(s_\alpha, s_\beta) = Xg(s_\alpha, s_\beta) - g(D_X s_\alpha, s_\beta) - g(s_\alpha, D_X s_\beta)$$

“故に” $D_X s_\alpha = D_X s_\beta = 0$ となる”、 $Xg(s_\alpha, s_\beta) = 0$ 。

また $g(s_\alpha, s_\beta)$ は local $\mathcal{F}$ -basic function となる”、命題 3.3 より $\mathcal{F}$ -reduction を与える。 逆は明らか。 //

この時 D は metric connection となる”、実は命題 4.3 により、 D と “ $\mathcal{F}$ -equivalent” な D' を適当に取ると、

$$D'_X g = 0 \quad \text{for } \forall X \in \Gamma(T),$$

となる事ができる。

上の命題 4.7 は、 g 以外の一般に V の tensor field に対しても成立する。 例えば、 V が real $\mathcal{F}$ -vector bundle となる”、 tensor field T が、 V の構造群 $GL(k, \mathbb{R})$ 或 $GL(k/2, \mathbb{C})$ への $\mathcal{F}$ -reduction を与えてくれる”、 $\mathcal{F}$ -flat connection D につき、 $D_X T = 0$, $\forall X \in \Gamma(F)$ が成立する。 この時も、 D' を適当に取ると $D'_X T = 0$, $\forall X \in \Gamma(T)$ となる。

M は complex analytic foliation $\mathcal{F}_c$ を持つとし、 $\pi^*\mathcal{F}_c$ の underlying は smooth foliation を表わすとする。 V は M 上の $\mathcal{F}_c$ -vector bundle π^* 、 $H^1(M, \underline{GL(k, \mathbb{C})}_{\mathcal{F}_c})$ の元 η に associate してあるとする。

定義 V 上の $\mathcal{F}_c$ -flat connection $D: PV \rightarrow P(T^* \otimes V)$ が、 η に関する $\mathcal{F}_c$ -admissible frame field s に対して、

$$D_X s = 0, \text{ for } \forall X \in P(\bar{\alpha}/U),$$

である時、 D は η に compatible な $\mathcal{F}_c$ -flat connection と呼ばれる。

前記の定理 4.2 と同様にして、次の事が証明される。

定理 4.8 $\mathcal{F}_c$ -vector bundle V には、 η に compatible な $\mathcal{F}_c$ -flat connection が存在する。

$\mathcal{F}_c$ -flat connection に関する命題 4.3, 4.4 は、 $\mathcal{F}_c$ -flat connection についても同じ形式で成立する。

§5. Connections と特性類

M 上の complex vector bundle V 上の connection D が与えられた時、 V 上の local frame field に関する connection (resp. curvature) matrix を θ (resp. Θ) と書く。 Lie 環 $gl(k, \mathbb{C})$ 上の adjoint invariant polynomials 全体が作る

graded algebra $\in I(\mathcal{GL}(k, \mathbb{C}))$ で表わす。 $D^0 \in D^1$ を V 上の a connections、 $A^r(M) := \Gamma(\wedge^r T^*)$ とする。 また、 T^* は $TM \otimes \mathbb{C}$ の dual である。

定義. $\mathbb{C}$ -module homomorphisms

$$\lambda(D^1) : I^r(\mathcal{GL}(k, \mathbb{C})) \rightarrow A^{2r}(M),$$

$$\lambda(D^0, D^1) : I^r(\mathcal{GL}(k, \mathbb{C})) \rightarrow A^{2r-1}(M)$$

を次のように定義する。 各 $\varphi \in I^r(\mathcal{GL}(k, \mathbb{C}))$ に対して

$$\lambda(D^1)\varphi := \varphi(\Theta^1, \dots, \Theta^1)$$

$$\lambda(D^0, D^1)\varphi := r \int_0^1 \varphi(\Theta^1 - \Theta^0, \Theta^1, \dots, \Theta^1) dt,$$

ここで Θ^t は connection $tD^1 + (1-t)D^0$ の curvature matrix とする。

この定義は local であるが、 φ が invariant polynomial より、 M 上の global forms を確かに決める。 これ等 a homomorphisms に対して、 Chern-Weil の理論は次の事を保障してくれる。(例えば [4]).

$$\square_1 \quad d(\lambda(D^1)\varphi) = 0.$$

$$\square_2 \quad d(\lambda(D^0, D^1)\varphi) = \lambda(D^1)\varphi - \lambda(D^0)\varphi.$$

つまり、 graded algebra 上の induced homomorphism

$$\lambda(D^1)^* : I(\mathcal{GL}(k, \mathbb{C})) \rightarrow H^*(M)$$

は V の connections を取りうるように、 V の同型類によつて決まる。 $\lambda(D^1)^*$ の image は V の特性類と呼ばれる。

M は余次元 g の foliation $\mathcal{F}$ を持ち、 V は M 上の complex $\mathcal{F}$ -vector bundle とする。

命題 5.1 D' が V の $\mathcal{F}$ -flat connection を与え、

$$\lambda(D')\varphi = 0 \quad \text{for } \deg \varphi > g.$$

証明 $s_\lambda \in V|_{U_\lambda}$ を $\mathcal{F}$ -admissible frame field とすれば、命題 4.1 より D' の curvature matrix Θ'_λ に対して

$$\Theta'_\lambda(X, Y) = 0 \quad \text{for } \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{F}|_{U_\lambda})$$

が成立する。よって Θ'_λ の成分は dy^i_j によって生成される $A^*(U_\lambda)$ の ideal を含む。 $\deg \varphi > g$ を与え、 $\varphi(\Theta'_\lambda, \dots, \Theta'_\lambda)$ の各単項は dy^i_j を g より多く含むことになることは、 0 である。 //

$\text{Chern}^r(V) := \text{Im } \lambda(D')^* \cap H^r(M)$ とおくと、定理 4.2 より

系 V が $\mathcal{F}$ -vector bundle の構造を持つならば、

$$\text{Chern}^r(V) = 0 \quad \text{for } r > 2g.$$

更に g が偶数で、 $\mathcal{F}_c$ は M 上の複素余次元 $g/2$ の complex analytic foliation、 V は M 上の $\mathcal{F}_c$ -vector bundle とすれば、命題 5.1 と同じ形式の証明で次の結果を得る。

命題 5.2 D' が V の $\mathcal{F}_c$ -flat connection を与え、

$$\lambda(D')\varphi = 0 \quad \text{for } \deg \varphi > g/2.$$

前記の定理 4.8 より。

系 V が $\mathcal{F}_c$ -vector bundle の構造を持つならば、

$$\text{Chern}^r(V) = 0 \quad \text{for } r > q.$$

この系のように特性類が「度余次元より大分所」vanish する場合を少し考えてみる。

Pasternack [10] の結果を云々換えると、

□ Foliation of a normal bundle T/F に、 $\mathcal{F}_c$ -reduction を与える metric が存在するならば、

$$\text{Chern}^r(T/F \otimes \mathbb{C}) = 0 \quad \text{for } r > q.$$

この結果は、命題 5.1 で $V = T/F \otimes \mathbb{C}$ とおいた時の Bott [2] の結果を特別の場合に詳しくしたものである。一般の $\mathcal{F}_c$ -vector bundle V に対して、□ を拡張しようとするは無理がある。少し条件を強くすれば、次の定理を証明することが出来る。(Abe [1])

□ 例 3.6 にあける条件をみたす $\mathcal{F}_c$ -vector bundle V に対しては、

$$\text{Chern}^r(V) = 0 \quad \text{for } r > q.$$

証明 $\mathcal{F}_c$ -basic partition of unity を使って、定理 4.2 の connection を作ると $\Theta_\lambda = \sum_{\mu} f_\mu (dg_{\lambda\mu}) g_{\lambda\mu}^{-1}$ は (y^i) の λ -depend する form となるからである。 //

§6. Complex $\mathcal{F}$ -vector bundle の exotic 特性類

この section 2" は [2] に定義されてゐる cochain complex WO_g に類似な $WU(k)_g'$ を構成する。この complex を使って、complex $\mathcal{F}$ -vector bundle に対して exotic 特性類を定義し、その性質を調べる。特に、foliation $\mathcal{F}$ の normal bundle の複素化 $T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ に対しては [2] に定義されてゐる exotic characteristic classes に一致する。

定義 $\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ を $\dim c_i = \dim \bar{c}_i = 2i$ なる $2k$ の variables $c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k$ を生成する polynomial ring, $\mathbb{C}_g[c_1, \dots, \bar{c}_k] := \mathbb{C}[c_1, \dots, \bar{c}_k] / I_{2g}$, I_{2g} は $\dim > 2g$ なる monomials により生成される ideal とする。 $E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k)$ を $\dim h_i = 2i - 1$ なる k 個の元により生成される $\mathbb{C}$ 上の exterior algebra とする。この時 graded algebra

$$WU(k)_g' := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}_g[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$$

に differential d_w を $d_w c_i = d_w \bar{c}_i = 0$, $d_w h_i = (c_i - \bar{c}_i)/2\pi i$ により定義して cochain complex とする。

M 上に smooth foliation $\mathcal{F}$ が与えられてゐるとする。 V は M 上の complex $\mathcal{F}$ -vector bundle 2" $\eta \in H^1(M, \underline{GL(k, \mathbb{C})}_{\mathcal{F}})$ に associate する $\theta \in L$, D' が η に compatible な V 上の $\mathcal{F}$ -flat connection, D^0 が V 上の (Hermitian) metric

を preserve する metric connection とする。

定義 $\lambda'_\eta: WU(k)_g' \rightarrow A^*(M)$ への homomorphism を

$$\lambda'_\eta c_i := \lambda(D') \tilde{c}_i, \quad \lambda'_\eta \bar{c}_i := \overline{\lambda(D') \tilde{c}_i},$$

$$\lambda'_\eta h_i := (\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i - \overline{\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i}) / 2N\Gamma \quad \text{で定義する。}$$

ここに、invariant polynomial $\tilde{c}_i$ は $A \in \text{gl}(k, \mathbb{C})$ に対して

$$\det(I - \frac{t}{2\pi N\Gamma} A) = 1 + \sum_{i=1}^k t^i \tilde{c}_i(A) \quad \text{で定義される。}$$

補題 6.1 $d\lambda'_\eta = \lambda'_\eta dw$ 。

証明 $c_i, \bar{c}_i$ に対しては明かである。(§5, 図1)

A が $\bar{A} = -{}^t A$ なる時、 $\overline{\tilde{c}_i(A)} = \tilde{c}_i(A)$ となるから、§5 の

図2 を考え合わせ、 h_i に対しては次のようにする。

$$\begin{aligned} d(\lambda'_\eta h_i) &= (d(\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i) - d(\overline{\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i})) / 2N\Gamma \\ &= (\lambda(D') \tilde{c}_i - \overline{\lambda(D') \tilde{c}_i}) / 2N\Gamma - (\lambda(D^0) \tilde{c}_i - \overline{\lambda(D^0) \tilde{c}_i}) / 2N\Gamma \\ &= (\lambda'_\eta c_i - \lambda'_\eta \bar{c}_i) / 2N\Gamma - 0 \\ &= \lambda'_\eta ((c_i - \bar{c}_i) / 2N\Gamma) = \lambda'_\eta (dw h_i) \quad // \end{aligned}$$

即ち、 λ'_η は $WU(k)_g'$ の cohomology の complex de Rham cohomology への homomorphism を induce する。

命題 6.2 $\lambda'_\eta^*: H^*(WU(k)_g') \rightarrow H^*(M)$ は η の $\mathfrak{F}$ -equivalence class だけ depend する。

証明 $g_0, g_1 \in V$ 上の metrics、 $D'_0, D'_1 \in \eta$ に対して compatible な V 上の $\mathfrak{F}$ -flat connections とする。次に

$p: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ を projection、 $\tilde{\mathfrak{F}}$ を $M \times \mathbb{R}$ 上の余次元 g の

canonical foliation とすると、次のものが存在する。

$\tilde{D}^1$: $\tilde{G}$ -vector bundle p^*V 上の $\tilde{G}$ -flat connection として
 $j_s^* \tilde{D}^1 = sD_1^1 + (1-s)D_0^1$ とおけるもの、

$\tilde{g}$: p^*V 上の metric として $j_s^* \tilde{g} = g_0, j_s^* \tilde{g} = g_1$ とおける、

$\tilde{D}^0$: $\tilde{g}$ を preserve する metric connection on p^*V 。

生成元のうち $\tilde{c}_i, \tilde{c}_i = \tilde{c}_i$ に対しては §5 の §2 より 成立するが、 h_i に対しては、 $s=0, 1$ として

$$\begin{aligned} j_s^*(\lambda(\tilde{D}^0, \tilde{D}^1)\tilde{c}_i) &= i \int_0^1 \tilde{c}_i(j_s^* \tilde{D}^1 - j_s^* \tilde{D}^0, j_s^* \Theta^t) dt \\ &= i \int_0^1 \tilde{c}_i(\Theta_s^1 - \Theta_s^0, \Theta_s^t) dt \\ &= \lambda(D_s^1, D_s^0)\tilde{c}_i. \end{aligned}$$

よって $j_s^* = j_s^*: H^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H^*(M)$ であるから主張は成立することになる。 //

定義 χ_{η}^* の image から 特性類を除いたものを η (または G -vector bundle V) の G に関する exotic 特性類と呼ぶことにする。

命題 4.6 または 4.7 より 次の事が解る。

命題 6.3 Complex G -vector bundle V の構造群が $U(k)$ かつ G -reducible であるならば V の exotic 特性類はすべて 0 になる。(つまり、構造群が $U(k)$ なる G -reduction の存在に対する obstructions はない。)

[7] に出る n の Vey の方法”

命題 6.4 $WU(k)_{g'}^{\vee}$ には $n \geq 2$ $u_i^- := (c_i - \bar{c}_i)/2NF$, $u_i^+ := (c_i + \bar{c}_i)/2$

とすれば、 $WU(k)_{g'}^{\vee} = E_C(h_1, h_2, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}_g[u_1^-, u_1^+, \dots, u_k^-, u_k^+]$
 $dw u_i^- = dw u_i^+ = 0$ かつ $dw h_i = u_i^-$ と取れる。 $WU(k)_{g'}^{\vee}$ の
 cocycles の base として次の様なものが取れる。

$$\otimes h_{i_1} \wedge \dots \wedge h_{i_r} \otimes u_{j_1}^- \dots u_{j_m}^- u_{s_1}^+ \dots u_{s_t}^+$$

$$1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k, \quad 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_m \leq \min(g, k), \\ 1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_t \leq \min(g, k),$$

$$i) \quad i_1 + j_1 + \dots + j_m + s_1 + \dots + s_t > g,$$

$$ii) \quad i_1 \leq j_1.$$

$g' \geq g$ とすれば、canonical projection

$$p_{g'}^{g'} : WU(k)_{g'}^{\vee} \rightarrow WU(k)_g^{\vee}$$

が定義でき、これは cochain homomorphism である。

M' が余次元 g' の foliation $\mathcal{F}'$ を持ち、 $\eta' \in H^1(M', \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}'})$
 とすれば、命題 4.4 より次の事が解る。

命題 6.5 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map ならば、次の
 diagram は可換である。

$$\begin{array}{ccc} H^*(WU(k)_{g'}^{\vee}) & \xleftarrow{(p_{g'}^{g'})^*} & H^*(WU(k)_g^{\vee}) \\ (\lambda_{f^*} \eta')^* \downarrow & & \downarrow (\lambda_{\eta'}^*)^* \\ H^*(M) & \xleftarrow{f^*} & H^*(M') \end{array}.$$

前記の命題 6.2 の証明の方法を使って次の事を知り。

命題 6.6 $\eta_0, \eta_1 \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}})$ が $\eta_0 \cong \eta_1$ を満たすならば、

$$(\lambda'_{\eta_0})^* u = (\lambda'_{\eta_1})^* u \quad \text{for } u \in \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^*.$$

この命題と命題 2.2 より、

系 $\Rightarrow$ a $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic z'' , $\eta' \in H^1(M', \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}'})$ とすれば、

$$(\lambda'_{f_0 \eta'})^* u = (\lambda'_{f_1 \eta'})^* u \quad \text{for } u \in \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^*.$$

注意 η が特 $\perp$ の時、 $(\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}})^* \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^*$ の元は $[\gamma]$ が rigid と呼ばれている。

$\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}})$ に対して、cohomology の中 z''
 $\text{Chern}^*(\eta) \subset \lambda'_{\eta}^* \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^* \subset \lambda'_{\eta}^* H^*(WU(k|q))$
 は順 $\perp$ 、 $\cong$, $\sim_{\mathcal{F}}$, $\cong_{\mathcal{F}}$ に対応する不変量となっている。

V が real $\mathcal{F}$ -vector bundle の時 $\perp$ は、 V の複素化である $V \otimes \mathbb{C}$ に対して $(\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}})^*$ が定義できる。この時、次の事が解る。

命題 6.7 D^1, D^0 を V 上の connection s が定義している $V \otimes \mathbb{C}$ 上の $\mathcal{F}$ -flat connection, metric connection とすれば、 $\det(I - \frac{1}{2\pi i} A) = 1 + \sum_{i=1}^k t_i \text{tr}^{\mathbb{R}}(A)$ for $A \in \text{so}(k, \mathbb{C})$ で定義される $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ を使って、 $\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}}$ は次の様に表わされる。

$$\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} u_i^- = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \lambda(D') \tilde{\mathcal{C}}_i^R \quad \text{for } i = \text{odd, otherwise} = 0,$$

$$\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} u_i^+ = (-1)^{\frac{i}{2}} \lambda(D') \tilde{\mathcal{C}}_i^R \quad \text{for } i = \text{even, otherwise} = 0,$$

$$\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} h_i = (-1)^{\frac{i+1}{2}} \lambda(D^0, D') \tilde{\mathcal{C}}_i^R \quad \text{for } i = \text{odd, otherwise} = 0.$$

即ち、real $\mathfrak{F}$ -vector bundle α に対しては、次の cochain complex を考へることは十分である。

定義 $2 \leq k$ 以下の最大奇数とし、

$$WO(k)_g := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_3, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}_g[u_1^-, u_2^+, \dots, u_k^-, (u_{k+1}^+)]$$

の differential は $dw h_j = u_j^-$, $dw u_i^+ = dw u_i^- = 0$ で決まるものとする。

この complex は $k=g$ の時、 $[Z]$ の WO_g の複素化である $WO_g \otimes \mathbb{C}$ と一致する。

例 6.1 $WO(k)_g$ の $g \geq 1$ か $k \geq 1$ の時を考へると、

$$dw(h_1(u_1^-)^g) = (u_1^-)^{g+1} = 0 \quad \text{in } WO(k)_g.$$

よって $\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{R})_{\mathfrak{F}})$ に対して $\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}}^*[h_1(u_1^-)^g]$ は $H^{2g+1}(M)$ の元である。特に $\mathfrak{F}$ が余次元 1 の foliation であるならば $\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}}^*[h_1 u_1^-]$ は Godbillon-Vey の不変量である。

また例 3.3 における $\mathfrak{F}$ -vector bundle T/E に対応する $H^1(M, \underline{GL}(p, \mathbb{R})_{\mathfrak{F}})$ の元を ν_E とすれば、 $F = \mathcal{C}(E)$ の時分は、 $\lambda'_{\nu_E \otimes \mathbb{C}}^*[h_1(u_1^-)^g]$ は $[q]$ の generalized Godbillon-Vey invariant と呼ばれるものとも一致する。

例 6.2 M 上 a vector bundle V が flat connection D を持つ時、 V は $\mathcal{F}$ -vector bundle の構造が決まる。
 更に命題 4.3 より $\mathcal{F}$ の構造と flat connection $\mathcal{F}$ は一対一に対応する。
 $\mathcal{F}$ の $\mathcal{F}$ -vector bundle の構造に対応するよう
 な $H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}})$ の元を η_D とおく。

① $\mathcal{F}$ は η により $\Omega = 0$ であるから

$$WU(k)_0' = E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k), \quad d_W h_i = 0.$$

よって $H^*(WU(k)_0') \cong WU(k)_0'$ 。

前記の命題 6.6 より、

② D と D' が V 上 a flat connection として $\eta_D \sim \eta_{D'}$ の時、

$$\lambda_{\eta_D}^*[ch_i] = \lambda_{\eta_{D'}}^*[ch_i] \quad \text{for } i \geq 2.$$

§7. $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ -vector bundles の exotic 特性類

M 上複素余次元 $q/2$ の complex analytic foliation $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ が与えられているとする。 V は $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ -vector bundle として $\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}})$ に associate されているとする。
 この時、 V は $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ の underlying な smooth foliation $\mathcal{F}$ (余次元は q) に属する $\mathcal{F}$ -vector bundle と見做せる。

§6 の homomorphism $\lambda_{\eta}^* : H^*(WU(k)_0') \rightarrow H^*(M)$ が定義できる。 V が更に $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ -vector bundle であることにより、 $\text{Im}(\lambda_{\eta}^*)$ のあるものが 0 になる事を示す。

先ず、次の $\mathbb{C}$ 上の cochain complex を定義する。

定義 $\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ を $\mathbb{C}$ 上の polynomial ring とし、 $I_{g,g}$ を c_i かつ $\bar{c}_i$ の monomials かつ $\dim > g$ の $\pm a$ と、 $\bar{c}_i$ かつ c_i の monomials かつ $\dim > g$ の $\pm a$ と 2 生成される ideal とする。この時、graded algebra

$$WU(k)_{g/2} := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k] / I_{g,g}$$

に differential を $dw c_i = dw \bar{c}_i = 0$, $dw h_i = (c_i - \bar{c}_i) / 2N \cdot 1$ と定義し、cochain complex とする。

更に homomorphism $\lambda_{\eta} : WU(k)_{g/2} \rightarrow A^*(M)$ を、 λ_{η} を η の $\mathbb{C}$ -flat connection によって定義する。これは cochain homomorphism となり、命題 6.2 と同様に証明される。

命題 7.1 $\lambda_{\eta}^* : H^*(WU(k)_{g/2}) \rightarrow H^*(M)$ は η の $\mathbb{C}$ -equivalence class によって depend する。

$\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k] \subset \mathbb{C}[z]$ 、ideal $I_{g,g}$ は $I_{g,g}$ を含む z の S 、次の canonical projection が存在する。

$$p : WU(k)'_g \rightarrow WU(k)_{g/2}.$$

$$\begin{array}{ccc} \text{定理 7.2} & H^*(WU(k)'_g) & \xrightarrow{\lambda_{\eta}^*} H^*(M) \\ & p^* \downarrow & \nearrow \lambda_{\eta}^* \\ & H^*(WU(k)_{g/2}) & \end{array}$$

この diagram は可換。

$\mathcal{F}_c$ -bundle を $\mathcal{F}$ -bundle とみ直す写像が induce される
 $(\mathcal{F}_c^* : H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}_c}) \rightarrow H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}}))$ につき、
 系. $\eta \in \text{Im}(\mathcal{F}_c^*)$ とすれば、

$$\lambda \eta^* u = 0 \quad \text{for } u \in \text{Ker}(p^*).$$

($\eta \in \text{Im}(\mathcal{F}_c^*)$ とは η が ある $\mathcal{F}_c$ -cocycle へ $\mathcal{F}$ -equivalent である事である。)

特に、 $\mathcal{F}$ の余次元 q の almost complex foliation、 $\mathcal{F}$ の normal bundle は $\nu \in H^1(M, \underline{GL}(q/2, \mathbb{C})_{\mathcal{F}})$ へ associate する事とす。この時、 M の cohomology の subring $\lambda_\nu^*(\text{Ker } p^*)$ の元は $\mathcal{F}$ が complex analytic foliation であるための obstructions と取られる。すなわち、

$$\lambda_\nu^*(\text{Ker } p^*) \supset \bigcup_{2q \geq r > q} \text{Chern}^r(T/F)$$

である。

特に、 $NU(q)_q$ は [3] の WU_q と同じものがある。

参考文献

- [1] N. Abe, On cohomology and characteristic classes of a foliated manifold, 修士論文 (1975)
- [2] R. Bott, Lecture Notes in Math., 279, Springer (1972).

- [3] R. Bott and A. Haefliger, On characteristic classes of P -foliations, Bull. of A.M.S. 78 (1972) 1039-1044.
- [4] S.S. Chern, Complex manifolds without potential theory, van Nostrand (1967).
- [5] L. Conlon, Transversally parallelizable foliations of codimension two, Trans. of A.M.S. 194 (1974) 79-102.
- [6] C. Godbillon et J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension 1, C.R. Acad. Sci. 273 (1971) 92.
- [7] J.L. Heitsch, Deformations of secondary characteristic classes, Topology 12 (1973) 381-388.
- [8] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer (1966).
- [9] H. Kitahara and S. Iozu, A generalized Godbillon-Vey invariant for a subbundle which is not integrable.
- [10] J. Pasternack, Topological obstructions to integrability and the Riemannian geometry of smooth foliations, Thesis, Princeton Univ. (1970).
- [11] B.L. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math., 69 (1959) 119-132.
- [12] ———, Harmonic integrals on foliated manifolds, Amer. J. Math. 81 (1959) 529-536.