

二枚金貨を見分けよう

京大・教研 佐藤雅彦

『12枚の硬貨があり、うち1枚だけ二枚金で目方が違う。天秤を3回用いて、二枚硬貨を見つけ、軽重も決定せよ。』
この問題は有名な問題で、一般化された問題について「情報理論」の方法をはじめ、色々な解法が知られている。そのうち解法のひとつは、硬貨の測定方法と、測定を始めて前に完全に指定するということ、いわば、uniform な方法が存在することについては Smith [1] による解法を少し整理して紹介する。

N 枚 ($N \geq 3$) の硬貨が与えられたとし、 n 回の測定で二枚硬貨が決定できるかを調べてみる。次のように記号を定める。

$I = \{1, 2, \dots, N\}$: 硬貨の番号

$T = GF(3) = \{0, \pm 1\}$: 3元体

T^n : T 上の n 次元 vector 空間

$G = T^* = \{\pm 1\}$

$PG(T^n) = T^n - \{0\} / G$: T 上の $n-1$ 次元射影空間

Def. 1 $\mu: I \rightarrow T^n$ が measure algorithm

$$\Leftrightarrow \forall i \in I \quad |\mu^{-1}(U_i^+)| = |\mu^{-1}(U_i^-)|.$$

ただし, $U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_n) \in T^n \mid x_i = \pm 1\}$ (複号同順).

$\mu(i) = (\mu_1^i, \dots, \mu_n^i)$ は 1 回目から n 回目の測定で
観測値をどのように測定するかを指定している。すなわち:

$$\mu_j^i = \begin{cases} -1 & \Rightarrow j \text{ 回目には左の皿に乗せよ} \\ 0 & \Rightarrow \text{測定しない} \\ +1 & \Rightarrow \text{右の皿に乗せよ.} \end{cases}$$

毎日、左右の皿に乗せる観測値の数は同数であるべきである。

Def. 1 が要請する。

Def. 2 $v: I \rightarrow T$ が problem function

$$\Leftrightarrow |v^{-1}(0)| = N-1$$

すなわち全は一枚だけあるがその番号を j とする。

$$v(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } i = j \wedge j \text{ が他よりも軽い} \\ 0 & \text{if } i \neq j \\ +1 & \text{if } i = j \wedge j \text{ が他よりも重い} \end{cases}$$

で問題が与えられると考えるのである。

v と μ が与えられれば、測定結果 $\gamma \in T^n$ は次のようになる。

$$r = \operatorname{sgn}(v) \cdot \mu(v^{-1}(\operatorname{sgn}(v))) .$$

$$\text{In } T^1, \operatorname{sgn}(v) = \sum_{i=1}^N v(i) . \quad r \text{ の } i \text{ は次の通り} .$$

$$r(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } i \text{ 回目には右の辺が上} \\ 0 & \text{if } \quad \quad \quad \text{" 鉤合} \\ +1 & \text{if } \quad \quad \quad \text{" 右の辺が下} \end{cases}$$

Def. 3 μ が v に属して correct

$$\Leftrightarrow r \neq 0 \wedge |\mu^{-1}(\{r, -r\})| = 1 .$$

このように右の場合に限って、= を全あてはかることを決定してやることは可能である。

Def. 4 μ が complete $\Leftrightarrow \forall v$ について correct.

complete to algorithm を見つけたいことが問題になる。 $\operatorname{Im} \mu \neq \emptyset$ ならば、自然に $\tilde{\mu} : I \rightarrow \operatorname{PG}(T^n)$ が定まる。

~~また~~

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\mu} & T^n - \{0\} \\ & \searrow \tilde{\mu} & \downarrow \text{natural map.} \\ & & \operatorname{PG}(T^n) \end{array}$$

よって、 μ が complete であることは次のように言い換えることができる。

Prop. 5 $\mu : \text{complete} \Leftrightarrow \tilde{\mu}$ が定数でない injective.

Cor. 6 $N \leq (3^n - 1)/2$.

== ところで $N = (3^n - 1)/2$ と仮定すれば, $\tilde{\mu}$ は bijection に存在が,
 なければ, $|\mu^{-1}(U_i^+)| + |\mu^{-1}(U_i^-)| = 3^{n-1} = \text{odd}$ を意味し,
 μ の定数に反する. 従って, $N \leq (3^n - 3)/2$ でなければなら
 ない. 以下 $N = (3^n - 3)/2$ の場合について議論する. μ が
 measure algorithm なら, 次のようにして作った $T \circ \mu \circ \sigma$ も
 同様である.

$$I \xrightarrow{\sigma} I \xrightarrow{\mu} T^n \xrightarrow{\tau} T^n$$

ただし, $\sigma \in S_I$ (番号の入れ替え), $\tau \in GL(T^n)$ で,
 τ は '立方体' $C_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in G \ (i=1, \dots, n)\}$ を
 setwise に fix する. (τ は, 面のある変え, 測定の
 順序を入れ替えて生成する多群 G_n の元である)

ところで, $N = (3^n - 3)/2$ のとき, μ は complete とすれば,

$\text{Im}(\tilde{\mu}) = PG(T^n) - [u]$ となるが, 先と同様の論法
 で $u \in C_n$ であることが分る.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{pmatrix}$$

と仮定すると, $\tau(u) = (u_1^2, \dots, u_n^2)^t = (1, \dots, 1)^t$ となるから,

μ の逆写像 $\tau \circ \mu$ を考えれば, $u = (1, \dots, 1)^t$ としよ.

更に, $|\mu^{-1}(U_i^\pm)| = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) = \frac{N}{3}$ であり, とも分子. すなわち, 毎回左右の辺に $N/3$ 枚ずつ破片をのせるべしである.

$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in T^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$ と置き, μ に対して

$\varphi_\mu: T^n \rightarrow T$ を次のように定める.

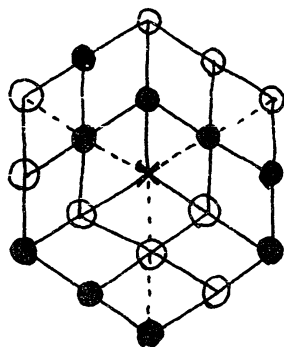
$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -x \in \text{Im}(\mu) \\ 0 & \text{if } \pm x \notin \text{Im}(\mu) \\ +1 & \text{if } x \in \text{Im}(\mu) \end{cases}$$

Prop. 7 μ が complete $\iff \exists \tau \in G_n$ $\varphi = \varphi_{\tau \circ \mu}$ が次の条件を満たす.

- (i) $\forall x \in T^n \quad \varphi(x) = -\varphi(-x)$
- (ii) $\varphi^{-1}(0) = \Delta_n$
- (iii) $\forall i \quad |\varphi^{-1}(1) \cap U_i^\pm| = \frac{1}{3} N$

問題は, どのような φ が存在するかどうかであるが, 次のようにして少くとも 1 つの作り手を作ることができる.

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$n = 3$ の場合には 12 , $= 4$ 以外にも解があるが, 全部で何通り
にあるかは調べていない.

文 献

- [1] C.A.B. Smith, The counterfeit coin problem,
The Mathematical Gazette, vol. 31 (1947), 31-39
- [2] M. Gardner, "Martin Gardner's Sixth Book of
Mathematical Games from Scientific American,"
W.H. Freeman and Company