

C^* -, C -, P -埋め込みと弱正規超フィルターについて

神奈川大学・工学部 平田 康史 (Yasushi Hirata)

Faculty of Engineering, Kanagawa University

空間は regular T_1 とする. $\mathbb{R}$ は実数直線, $\mathbb{I} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ とする.

Tietze の拡張定理としてよく知られているように, 空間 X が正規であるためには, 任意の閉集合が C^* - (C -)embedded であることが必要十分である. また, 空間が族正規であるためには, 任意の閉集合が P -embedded であることが必要十分であることも知られている [2].

定義 1. E は空間 X の部分集合とする. E が X において C^* - (*resp.* C -, P -) **embedded** であるとは, E から $\mathbb{I}$ (*resp.* $\mathbb{R}$, バナッハ空間) への任意の連続関数が, X 上の連続関数に拡張できることである.

一般に次の implication が成り立つ.

$$P\text{-embedded} \Rightarrow C\text{-embedded} \Rightarrow C^*\text{-embedded}$$

逆が成り立つのはどのようなときであろうか. 特に閉集合の場合はどうか. ここでは, 単調正規空間 X と, 非孤立点が高々1つしかない空間 Y (以下, そのような空間をほとんど離散な空間とよぶ) の積空間 $X \times Y$ についてこの問題を考えたい.

空間が正規であるためには, $E \subset P$ となるような各閉集合 E と各開集合 P に対して,

$$E \subset M(E, P) \subset \text{Cl}(M(E, P)) \subset P$$

となるような開集合 $M(E, P)$ が存在することが必要十分であるが, 更に,

$$E \subset E', P \subset P' \quad \text{ならば} \quad M(E, P) \subset M(E', P')$$

となるように $M(E, P)$ を割り当てることができるとき, その空間は単調正規であるという. よく知られているように, 距離空間や線型順序空間は単調正規であり, 単調正規空間の部分空間もまた単調正規である.

単調正規空間そのものは族正規なので, その閉集合はすべて P -embedded であり, C^* -, C -, P -の差異は生じない. 一方, 単調正規空間とほとんど離散な空間の積空間には正規でないものがある. ここでは, 次の問題を考えたい.

問題 1 (Yajima [9]). X は単調正規空間, Y はほとんど離散な空間とする.

(1) $X \times Y$ における任意の C^* -embedded な閉集合は C -embedded か?

(2) $X \times Y$ における任意の C -embedded な閉集合は P -embedded か?

($C \neq P$) に関して, 次の結果を得た.

定理 1. 可測基数が存在することと, 次のことは同値である.

「単調正規空間 X , ほとんど離散な空間 Y , および, その積空間 $X \times Y$ における閉集合で, C -embedded であるが P -embedded でないものが存在する.」

可測基数は巨大基数の 1 種であり, よく知られているように,

- 可測基数が存在すること,
- ある正則非可算基数上に正規超フィルターが存在すること,
- ある集合上に σ -完備な non-principal 超フィルターが存在すること,

はいずれも同値である.

正規フィルターは集合論においてとてもよく使われる概念であるが, それをやや弱めた弱正規フィルターという概念がある. それを使って, ($C^* \neq C$) に関する次の結果を得た.

定理 2. ある正則非可算基数上に (σ -完備でない) 弱正規超フィルターが存在するならば, 次のことが成り立つ.

「単調正規空間 X , ほとんど離散な空間 Y , および, その積空間 $X \times Y$ における閉集合で, C^* -embedded であるが P -embedded でないもの (C -embedded でないもの) が存在する.」

この逆が成り立つかどうかはまだわかっていない.

弱正規超フィルターの概念は 1970 年代にはすでにあり, 例えば, [6], [5], [4] などにそれに関する記述がある.

正則非可算基数 κ 上のフィルター $\mathcal{F}$ が (弱) 正規であるとは, 次の条件を満たすことである.

- $\mathcal{F}$ は良好なフィルター. つまり, 各 $\gamma < \kappa$ に対して, $\{\alpha \in \kappa : \gamma < \alpha\} \in \mathcal{F}$ である.
- $\mathcal{F}$ は (減少列に対する) 対角線共通部分に関して閉じている. つまり, $\mathcal{F}$ の元の任意の列 $\{F_\zeta : \zeta \in \kappa\}$ に対して, (それが包含関係に関する減少列ならば),

$$\Delta_{\zeta \in \kappa} F_\zeta := \left\{ \alpha \in \kappa : \alpha \in \bigcap_{\zeta < \alpha} F_\zeta \right\} \in \mathcal{F}.$$

正則非可算基数 κ 上のフィルターが正規であるためには、それが弱正規で κ -完備であることが必要十分である。

弱正規超フィルターに関しては次のことが分かっている。

- ZFC+「可測基数が存在する」が無矛盾ならば、ZFC+「ある正則非可算基数上に σ -完備ではない弱正規超フィルターが存在する」も無矛盾である。[7], [8].
- ZFC+「huge 基数が存在する」が無矛盾ならば、ZFC+「最小の非可算基数 ω_1 上に弱正規超フィルターが存在する」も無矛盾である。[3]
- $V = L$ を仮定すると、どの正則非可算基数上にも、弱正規超フィルターは存在しない。[1]

謝辞. 問題 1 を提供してくださった矢島幸信氏と、弱正規フィルターについて有益な情報をくださった薄葉季路氏に、ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] D. Donder, R. B. Jensen and B. J. Koppelberg, *Some applications of the core model*, Set theory and model theory, Proc. Symp., Bonn 1979, Lect. Notes Math. **872** (1981), 55–97.
- [2] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Ark. Mat. **2** (1952), 307–313.
- [3] M. Foreman, M. Magidor and S. Shelah, *Martin's Maximum, Saturated Ideals and Non-Regular Ultrafilters. Part II*, Annals of Mathematics Second Series, **127**, No. 3 (1988), 521–545
- [4] A. Kanamori, *Weakly Normal Filters and Irregular Ultrafilters*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 220, (1976), 393–399.
- [5] A. Kanamori and M. Magidor, *The evolution of large cardinal axioms in set theory*, Higher set theory (G. H. Muller and S. D. Scott, editors), Lecture notes in Mathematics, vol. **669**, Springer-Verlag, Berlin (1978), pp. 99–275.
- [6] J. Ketonen, *Strong compactness and other cardinal sins*, Ann. Math. Logic **5** (1972), 47–76.
- [7] K. L. Prikry, *Changing measurable into accessible cardinals*, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. **68** (1970), 55 pp.

- [8] R. M. Solovay, *Real-valued measurable cardinals*, Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 397–428.
- [9] Y. Yajima, *A report at Yokohama Seminar*, (2017), unpublished.