

# 弾性地盤上の構造物の動特性について

小堀 鐸二・南井良一郎・鈴木 有

## DYNAMICAL CHARACTERISTICS OF STRUCTURES ON AN ELASTIC GROUND

By Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Tamotsu SUZUKI

### Synopsis

In this paper the dynamical characteristics of structures on an elastic ground are investigated by making use of "Ground Compliance"; i. e. the transfer function of an elastic halfspace. The amplitude and phase characteristics of the four structural models are analytically expressed in the case of swaying, rolling and coupling vibrations of them. Moreover, the numerical evaluation of the dynamical characteristics is graphically represented and discussed on the dynamical effects of the ground on such structures.

### 1. ま え が き

地震をうけたときの構造物の挙動がその基礎地盤の性状によって著しく異ってくることは、関東大地震や最近の新潟地震における地盤と震害の相関関係にも典型的にみられ、また、すでに多くの研究者によっても指摘されたところである。それにもかかわらず、地震の作用をうけたときの地盤のダイナミックな性状の研究や地盤の影響をとり入れた構造物の耐震性に関する研究は、これまで非常に貧しく立遅れており、両者の関係が十分解明されているとは言い難い現状である。構造物の地震応答に及ぼす基礎地盤の影響を明らかにするためには、まず地盤の動特性を正しく解明し、その成果をとり入れて基礎地盤—構造物という連成系を対象とした解析を行なわねばならない。とくに軟弱地盤の多い我が国においては、この種の研究は重要な意義をもつと考えられる。

上部構造については数多くの秀れた研究がなされているのに対して、地盤を含めた構造物の研究が非常に少ないのは、理論面ではその数理的取扱い上の困難が主因をなしていると思われる。そこで、従来はこのような困難を避けるために、地盤と下部構造（地下室や基礎、杭など）を適当なモデルに抽象し、半経験的に諸特性を与えて、地盤と構造物の連成系の動的応答を求める方法が一般によく行なわれてきた。下部構造を一つの質点に地盤をバネに抽象し、バネの復元力特性によって地盤の性状を代表させるという全体を一自由度系のモデルで模擬する方法や、基礎周辺の一部の土が下部構造と一体になって振動するという考え方に基づく、所謂仮性質量に抽象する方法などはその代表的なものである。しかし、モデルに諸特性を与える方法には半経験的な要素が多くて合理性がみられず、このように最初から単純なモデルを設定してしまう方法では、地盤の動特性を正当に表現し、構造物に与える地盤のダイナミックな効果を本質的に解明することは非常に難しいと思われる。

これに対して、主として地震学者の手によってうちたてられてきた波動伝播理論に基づいて、地盤を連続体と想定しその動特性を解明しようとする研究は、このような目的のための一つの有力な方法であると考えられる。

1904年、H. Lamb [1]\*が、半無限弾性体の表面に harmonic に振動する鉛直集中荷重を加えたときに

\* [ ] 内は後記の参考文献番号

生ずる弾性波動の生成伝播に関して画期的な研究を発表した後、弾性波伝播に関する理論的研究は多くの地震学者によって秀れた研究がなされてきた。このような一連の研究は主として地震波の伝播機構の解明を目的としたもので、一般に震源からはなれた地点の挙動を問題にしているのであるが、我々の関心はもっぱら載荷点(一種の震源)およびその近傍における挙動にあるわけである。この点に着目して、地盤上に構造物がのることを想定してこの種の問題を最初に扱ったのは E. Reissner [2] (1936) で、彼は等質等方な半無限弾性地盤上の円形基礎に harmonic に振動する鉛直荷重が作用する場合(垂直振動)の基礎中心の変位を求めた。彼の研究は T. Y. Sung [3] (1953) によって受け継がれて詳細な検討が加えられ、さらに、鳥海 [4] (1955) と R. N. Arnold・G. N. Bycroft・G. B. Warburton [5] (1955) はそれぞれ独立に、円形基礎の垂直振動の他に水平振動と回転振動さらに後者にあってはねじれ振動についての解析も行なっている。上述の諸研究は基礎自重を考慮していないので、解析結果は半無限弾性地盤上に構造物がのることを想定して、その表面に基礎下の応力分布をダイナミックな荷重として作用させたときの変位と力の関係を表わすものとなる。結果は一般に複素数で表われ、地盤常数、基礎の形状寸法および入力振動数の関数となるが、とくに入力振動数に関係するという結果は、従来の地盤モデルの示す特性に比較して大きな特色をもっている。一方これは stiffness の逆数の元をもっているのでその逆数値を地盤の等価バネ剛性として与えれば、半無限弾性地盤上の構造物の線型定常応答を求めることが原理的には可能なのである。

この原理に従い、地盤と構造物とを一体の連成系として線型定常応答を求める問題は、鳥海の結果を用いて佐藤・山口 [6, 7] (1960) が、円形断面の基礎をもつ構造物に関して剛体の垂直振動および rocking 振動、1 質点系および剪断型連続体の並進振動の場合についてかなり詳細な研究を行なっている。また W. T. Thomson [8] (1960) は同じく鳥海の結果を用いて、多質点系の rocking 振動への拡張を試みている。

一般に構造物の基礎の形は長方形断面が多く円形のものほとんどみられないにもかかわらず、Reissner に始まる一連の研究が円形基礎を扱っているのは、数理的取扱いが円形という条件によりある程度単純化されるからで、長方形の場合には理論解の誘導および数値計算ともに非常に複雑になる。筆者の一人小堀は、三重フーリエ変換を導入して、等質等方な半無限弾性地盤上の自重を考慮しない長方形基礎にダイナミックな強制力が作用する場合の垂直振動、水平振動および回転振動に対して、基礎の応答を表わす解を誘導した [9]。結果は変位と力の比を時間に関してフーリエ変換したものとしてえられるので、このような地盤の動特性を表わす伝達関数に相当する。これを半無限弾性地盤上の長方形基礎に関する Ground Compliance, またその逆数値を同じく Ground Stiffness と定義する。さらに無限積分を含む二重積分で表現される Ground Compliance の値は、デジタル計算機を用いて理論解より数値解が計算されており [10~12]、現在不十分ながら半無限弾性地盤に関する問題の基礎資料として使用しうる状態にある。

本研究は、上記の如く数値的にえられている Ground Compliance を地盤の等価バネ剛性として与え、半無限弾性地盤上の長方形基礎をもつ種々の構造物に、地盤を通して harmonic な上下動または水平動が入射する場合の構造物各部の応答を求めて、弾性地盤上の構造物の基本的な動特性を明らかにしようとするものである。すでにふれたように、円形基礎をもつ構造物の動特性については佐藤・山口および W. T. Thomson が部分的に解析を行っており、その結果は長方形の場合と本質的には異なるものではないが、本研究で改めて取上げた理由は、円形基礎と長方形基礎の場合の比較の他に、各種構造物の種々の振動形態に対して、各部変位の振巾特性と位相特性を、基礎固定の状態を規準にした新しい視点から整理してみようという意図によるものである。そして、求められた諸特性はこのような構造物―地盤系の伝達特性を表わし、これを用いれば、任意の地動に対する地盤を含む構造物系の非定常な地震応答を求めることが可能になるわけである。なお、地盤の影響を考慮した多質点系の地震応答を求める問題については、数値的にえられた Ground Compliance を適当な関数形で近似表現することによって [13]、弾性地盤上の多質点系の伝達特性に関する解析的表現がすでにえられており、さらに基礎周辺地盤の非線型性状をも含めて、主としてアナログ計算機

により非線型・非定常な地震応答解析が行なわれている〔14, 15〕。

ここにとりあげた構造物モデルは、剛体、1 質点系、剪断型連続体および曲げ型連続体の 4 種で、それぞれ並進 (swaying) に基礎の回転 (rolling) が伴う場合と並進のみの場合に分けて動特性の解析的表現の誘導と数値計算を行ない、rolling の及ぼす影響についても考察を行なう。以下においては rolling と swaying の連成振動を rocking と言うことにする。最後に、機械基礎等の振動問題に対応する場合として、剛体基礎自身に直接強制力が作用するときの動特性を振巾特性、位相特性および伝達エネルギー特性の形で求めた結果を APPENDIX に示す。

## 2. Ground Compliance および

### Ground stiffness

地盤を等質等方性の半無限弾性体として、その上に Fig. 1 に示すような断面をもつ剛体長方形基礎がの場合について考える。この基礎に強制振動力を作用させたときの基礎中心の振動方向の変位または回転角は、基礎下の応力分布を適当に仮定すると次式で与えられる〔9〕。ただし基礎の自重は考慮に入れない。

- (1) 垂直振動 ( $\sigma_z = -(P_V/4bc)Q(t)$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ )〔( ) 内は基礎下の応力分布の仮定, 以下同じ〕

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{w}{P_V} &= \frac{-1}{\pi^2 b c \mu} [Q(t) * J_V(t)] \\ \mathcal{F}[J_V(t)] &= \tilde{J}_V(\omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \cdots \cdots (2.1) \\ \mathcal{F}^{-1}[\tilde{J}_V(\omega)] &= J_V(t) \end{aligned} \right.$$

- (2) 水平振動 [x 方向] ( $\tau_{xz} = -(P_H/4bc)Q(t)$ ,  $\sigma_z = \tau_{yz} = 0$ )

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u}{P_H} &= \frac{1}{\pi^2 b c \mu} [Q(t) * J_H(t)] \\ \mathcal{F}[J_H(t)] &= \tilde{J}_H(\omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F(\beta, \gamma) - \beta^2 [\kappa^2 - 4\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)]}{F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \cdots \cdots (2.2) \\ \mathcal{F}^{-1}[\tilde{J}_H(\omega)] &= J_H(t) \end{aligned} \right.$$

- (3) 回転振動 [回転軸: y 軸] ( $\sigma_z = -(3M_R/4bc^2)(x/b)Q(t)$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ )

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\phi}{M_R} &= \frac{3}{\pi^2 b^3 c \mu} [Q(t) * J_R(t)] \\ \mathcal{F}[J_R(t)] &= \tilde{J}_R(\omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} N(\beta b) S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \cdots \cdots (2.3) \\ \mathcal{F}^{-1}[\tilde{J}_R(\omega)] &= J_R(t) \end{aligned} \right.$$

ここに  $\mathcal{F}$  はフーリエ変換を,  $\mathcal{F}^{-1}$  はフーリエ逆変換を示す演算子で, \* は convolution を表わす。また,  $P_V$ ,  $P_H$ ,  $M_R$ ; 強制力の振巾,  $u$ ,  $w$ ;  $x$  および  $z$  方向の変位,  $\phi = w|_{x=0, x=b, y=0/c}$ ; 平均回転角,  $Q(t)$ ; time factor,  $\omega$ ; 振動数,  $\lambda$ ,  $\mu$ ; Lamé の常数,  $\rho$ ; 地盤の密度

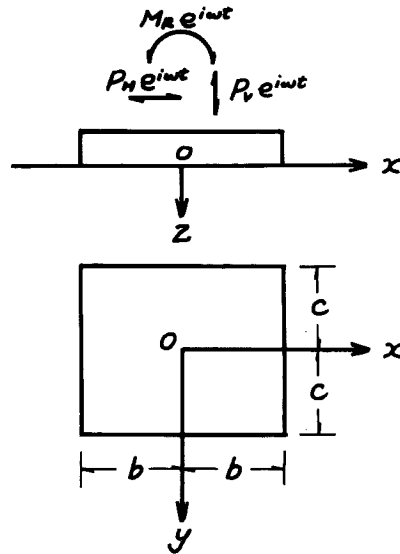


Fig. 1 Formulation of problem for evaluation of Ground Compliance.

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \beta^2 + \gamma^2 - h^2, & \alpha_2^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \kappa^2 \\ h = \frac{\omega}{c_1}, & \kappa = \frac{\omega}{c_2} \\ c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \text{ dilatational wave velocity, } & c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \text{ shear wave velocity} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\begin{cases} F(\beta, \gamma) = [2(\beta^2 + \gamma^2) - \kappa^2]^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta^2 + \gamma^2); \text{ Rayleigh Function} \\ S(\beta, \gamma) = \frac{\sin\beta b \sin\gamma c}{\beta\gamma}, \quad N(\beta b) = \frac{\sin\beta b}{\beta b} - \cos\beta b \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここで上記の(2.1)～(2.3)式において time factor  $Q(t) = e^{i\omega t}$  とおき, convolution を計算して計算に便利のように式全体を無次元表示になおす。右辺の無限積分を評価すると複素数でえられるので, その実数部を  $f_{1j}$ , 虚数部を  $f_{2j}$  ( $j=V, H$ および $R$ )で表わせば次のようになる。

(1) 垂直振動

$$\frac{\omega}{P_V e^{i\omega t}} = \frac{1}{c\mu} \left[ f_{1V}(a_0, n^2, \frac{c}{b}) + if_{2V}(a_0, n^2, \frac{c}{b}) \right] \equiv G_V \equiv \frac{1}{K_V} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

(2) 水平振動

$$\frac{u}{P_H e^{i\omega t}} = \frac{1}{c\mu} \left[ f_{1H}(a_0, n^2, \frac{c}{b}) + if_{2H}(a_0, n^2, \frac{c}{b}) \right] \equiv G_H \equiv \frac{1}{K_H} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

(3) 回転振動

$$\frac{\phi}{M_R e^{i\omega t}} = \frac{3}{b^2 c\mu} \left[ f_{1R}(a_0, n^2, \frac{c}{b}) + if_{2R}(a_0, n^2, \frac{c}{b}) \right] \equiv G_R \equiv \frac{1}{K_R} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

ここに,

$$\begin{cases} a_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \cdot b = \frac{\omega}{c_2} b = \kappa b, \quad n = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}, \quad \nu; \text{ 地盤のポアソン比} \\ K_j = \frac{c\mu}{l_j} \cdot \frac{1}{f_{1j} + if_{2j}}, \quad G_j = \frac{l_j}{c\mu} (f_{1j} + if_{2j}) \\ l_j = \begin{cases} l_V = 1 & ; \text{ 垂直振動} \\ l_H = 1 & ; \text{ 水平振動, } \quad i = \sqrt{-1} \\ l_R = 3/b^2 & ; \text{ 回転振動} \end{cases} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

(2.6)～(2.8)式を一般的に表現すれば,

$$u_0 = \frac{l_j}{c\mu} P_j (f_{1j} + if_{2j}) e^{i\omega t} = P_j G_j e^{i\omega t} = \frac{P_j}{K_j} e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

ここで, 変位と力の比  $G_j$  を弾性地盤上の長方形基礎に関する Ground Compliance, またこの逆数値, 力と変位の比  $K_j$  を同じく Ground Stiffness と定義する。これらは半無限弾性地盤の動特性を示す重要な値で, 地盤の密度および弾性常数(剛性率, ポアソン比), 入力振動数, 基礎の形状寸法に関係する量である。一般に地盤を適当な置換系(例えばバネと質点)で模擬することがよく行なわれるが, このような置換系が示す地盤の特性に比較すると, これらは入力や基礎, 地盤の諸特性を示す値とくに入力振動数および基礎の形状寸法を含んでいるところに大きな特色がある。また Ground Compliance は各振動形態に対するこのような地盤の線型伝達関数にあたるものである。なお, 理論解より数値的にえられた Ground Compliance の値を Fig. 2 (垂直振動), Fig. 3 (水平振動), Fig. 4 (回転振動)に示す。これらの図は地盤のポアソン比が $\frac{1}{4}$ の場合で, 基礎断面積を一定にし(パラメータに-をつけて表わす)断面の形状を変えて比較したものである。

以下においては構造物および地盤を連成振動系と考え, 上にえられた半無限弾性地盤の動特性を表わす Ground Compliance または Ground Stiffness の値を用いて, 弾性地盤上における種々の構造物の各部変位の地動変位に対する振申特性と位相特性を求める。ここに構造物は長方形断面をもち, 基礎底面の応力分布

Ground Compliance, Poisson's ratio of ground  $\nu=1/4$ .

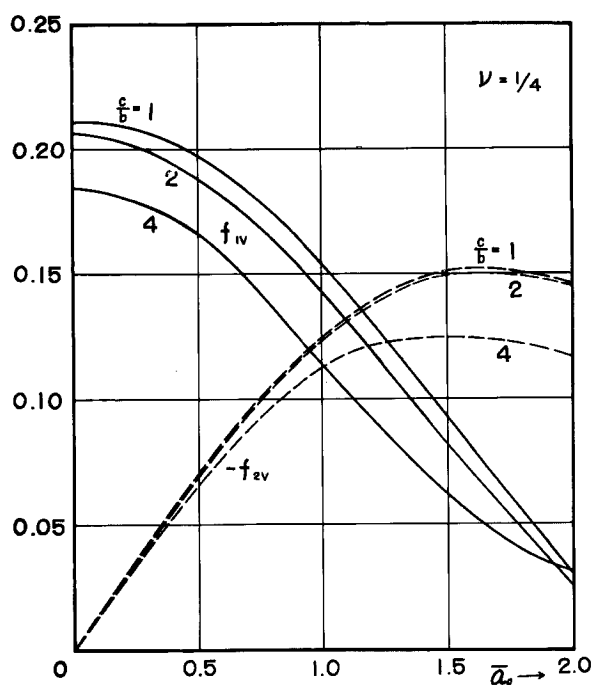


Fig. 2 Vertical translation.

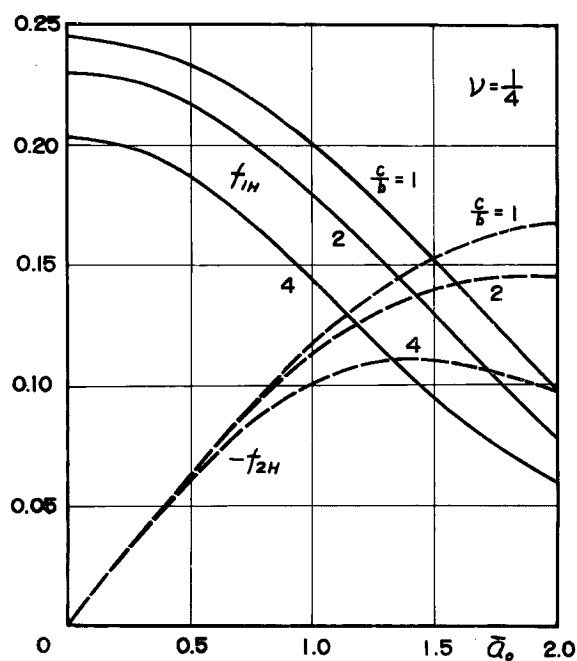


Fig. 3 Horizontal translation.



$$\begin{cases} u_G = U_G e^{i\omega t}; \text{地動変位} \\ u_0 = U_0 e^{i(\omega t - \theta_H)} = \bar{U}_0 e^{i\omega t}; \text{剛体重心の絶対変位} \\ \phi = \Phi e^{i(\omega t - \theta_R)} = \bar{\Phi} e^{i\omega t}; \text{基礎の回転角（反時計まわりを正にとる。以下同様）} \\ u_B = U_B e^{i(\omega t - \theta_B)} = \bar{U}_B e^{i\omega t} = u_0 + l_0 \phi = (\bar{U}_0 + l_0 \bar{\Phi}) e^{i\omega t}; \text{剛体の基礎中心の絶対変位} \\ u = U e^{i(\omega t - \theta)} = \bar{U} e^{i\omega t} = u_G - u_B = (U_G - \bar{U}_0 - l_0 \bar{\Phi}) e^{i\omega t}; \text{剛体の基礎中心の地動に対する相対変位} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

上のように定義すると、地盤から剛体に伝達される力およびモーメントは (2.7) および (2.8) 式より、

$$\begin{cases} P_H e^{i\omega t} = K_H u = K_H (U_G - \bar{U}_0 - l_0 \bar{\Phi}) e^{i\omega t} \\ M_R e^{i\omega t} = K_R \phi = K_R \bar{\Phi} e^{i\omega t} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

したがって運動方程式は、

$$m_0 \frac{d^2 u_0}{dt^2} = K_H u, \quad I_0 \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -K_R \phi + l_0 K_H u \quad (\text{I.3})$$

ここに、 $m_0$ ；剛体の質量、 $I_0$ ；剛体の重心に関する慣性モーメント、 $l_0$ ；剛体の底面から重心までの高さ (I.1) 式の関係を使って運動方程式を解けば、

$$\frac{\bar{U}_0}{U_G} = \frac{U_0}{U_G} e^{-i\theta_H} = \frac{\alpha^2 - B}{D} \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} = \frac{l_0 \Phi}{U_G} e^{-i\theta_R} = \frac{1}{D} \quad (\text{I.5})$$

ここに、

$$\begin{cases} D = \left(1 - \frac{1}{A}\right)(\alpha^2 - B) + 1 \\ A = \frac{K_H}{m_0 \omega^2} = \frac{1}{m_0 \omega^2} \cdot \frac{c\mu}{f_{1H} + i f_{2H}} = \frac{1}{8a_0^2 S_0 (f_{1H} + i f_{2H})} \\ B = \frac{K_R}{m_0 \omega^2 l_0^2} = \frac{1}{m_0 \omega^2 l_0^2} \cdot \frac{b^2 c\mu}{3(f_{1R} + i f_{2R})} = \frac{1}{24a_0^2 S_0 \left(\frac{l_0}{b}\right)^2 (f_{1R} + i f_{2R})} \\ \alpha^2 = \frac{k_0^2}{l_0^2}, \quad k_0^2 = \frac{I_0}{m_0}; \text{剛体の回転半径} \\ \quad ; \left[ \text{剛体が等質であるとして} \quad k_0^2 = \frac{b^2 + l_0^2}{3}, \quad \alpha^2 = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{l_0}{b}\right)^2 + 1 \right\} \right] \\ S_0 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{l_0}{b}\right), \quad \rho_0 = \frac{m_0}{8bcl_0}; \text{剛体のみかけの密度} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

ここで  $D=0$  は連成系の振動数方程式であり、振動数無次元量  $a_0$  に関して解けば系の固有振動数を求めることができるが、複素超越方程式となるためその解析は容易ではない。

一方、剛体の基礎中心の絶対変位と地動に対する相対変位は、

$$\frac{\bar{U}_B}{U_G} = \frac{U_B}{U_G} e^{-i\theta_B} = \frac{\alpha^2 - B + 1}{D} \quad (\text{I.7})$$

$$\frac{\bar{U}}{U_G} = \frac{U}{U_G} e^{-i\theta} = -\frac{\alpha^2 - B}{AD} \quad (\text{I.8})$$

複素表現としてえられている (I.4), (I.5), (I.7) および (I.8) 式からその絶対値と argument を求めれば、各変位および回転角の振巾特性と位相特性を計算することができる。

### 3.1.2 1 質点系

半無限弾性地盤上にのる 1 層および基礎の質量  $m$ 、剪断剛性  $k$ 、階高  $h$  の 1 質点系に harmonic な水平動が入射する場合の rocking 振動について考える。Fig. 6 において、

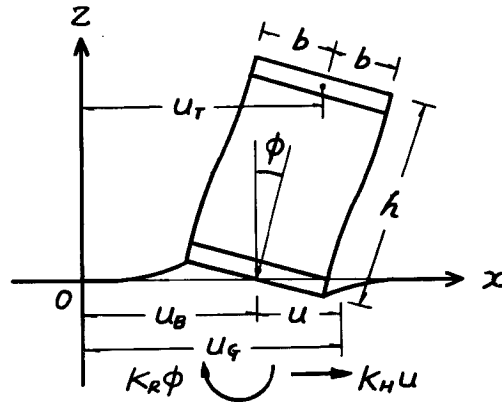


Fig. 6 Rocking of a one mass-spring system.

$$\begin{cases} u_G = U_G e^{i\omega t}; \text{地動変位} \\ u_T = U_T e^{i(\omega t - \theta_T)} = \bar{U}_T e^{i\omega t}; \text{1層の絶対変位} \\ \phi = \Phi e^{i(\omega t - \theta_R)} = \bar{\Phi} e^{i\omega t}; \text{基礎の回転角} \\ u_B = U_B e^{i(\omega t - \theta_B)} = \bar{U}_B e^{i\omega t}; \text{基礎の絶対変位} \\ u = U e^{i(\omega t - \theta)} = \bar{U} e^{i\omega t} = u_G - u_B = (U_G - \bar{U}_B) e^{i\omega t}; \text{基礎中心の地動に対する相対変位} \end{cases} \quad (\text{I. 9})$$

上のよう定義すると、地盤より基礎に伝達される力およびモーメントは(2.7)および(2.8)式より、

$$\begin{aligned} P_H e^{i\omega t} &= K_H u = K_H (u_G - u_B) = K_H (U_G - \bar{U}_B) e^{i\omega t} \\ M_R e^{i\omega t} &= K_R \phi = K_R \bar{\Phi} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{I. 10})$$

したがって運動方程式は、

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u_T}{dt^2} + k(u_T + h\phi - u_B) = 0 \\ m \frac{d^2 u_B}{dt^2} = -m \frac{d^2 u_T}{dt^2} + K_H (u_G - u_B) \\ 2mk_0 \frac{d^2 \phi}{dt^2} = hm \frac{d^2 u_T}{dt^2} - K_R \phi \end{cases} \quad (\text{I. 11})$$

ここに  $k_0$  は基礎の回転半径を表わす。(I. 9), (I. 10) 式を代入して  $e^{i\omega t}$  をおとし、さらに式全体の無次元化を行なってマトリックス表示になおすと、

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 & \lambda^2 - a_0^2 & \lambda^2 \\ A-1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & B-2\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_B \\ \bar{U}_T \\ h\bar{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ AU_G \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I. 12})$$

ここに

$$\begin{cases} A = \frac{K_H}{m\omega^2} = \frac{1}{8a_0^2 S_0 (f_{1H} + if_{2H})} \\ B = \frac{K_R}{m\omega^2 h^2} = \frac{1}{8a_0^2 S_0 \left(\frac{h}{2b}\right)^2 (f_{1R} + if_{2R})} \\ \alpha^2 = \frac{k_0^2}{h^2}; \left[ \text{基礎を等質として } k_0^2 = \frac{b^2}{3}, \alpha^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{2b}\right)^{-2} \right] \\ S_0 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{h}{2b}\right), \rho_0 = \frac{m}{4bch}; \text{構造物のみかけの密度} \\ \lambda = p_1 \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} b, \quad p_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad (\text{I. 13})$$



$\lambda$  は基礎固定のときの構造物の固有振動数に関する  $a_0$  と同等な無次元量である。この連立方程式を解けば、

$$\frac{\bar{U}_B}{\bar{U}_G} = \frac{U_B}{U_G} e^{-i\theta_B} = \frac{A}{D} [(2\alpha^2 - B)(\lambda^2 - a_0^2) + \lambda^2] \dots\dots\dots (\text{I, } 14)$$

$$\frac{\bar{U}_T}{\bar{U}_G} = \frac{U_T}{U_G} e^{-i\theta_T} = \frac{A}{D} \lambda^2 (2\alpha^2 - B) \quad \dots\dots\dots (\text{I.15})$$

$$\frac{h\Phi}{U_G} = \frac{h\Phi}{U_G} e^{-i\theta_R} = \frac{A}{D} \lambda^2 \quad \dots\dots\dots (I.16)$$

$$\text{222} \quad D = (A-1)\lambda^2 + (B-2\alpha^2)[\lambda^2 - (A-1)(\lambda^2 - a_0^2)] \quad \dots\dots\dots (\text{I. 17})$$

$D=0$  はこの連成系の振動数方程式であり、振動数無次元量  $a_0$  について解けば系の固有振動数を求めることができる。一方基礎中心の相対変位は、

$$\frac{\bar{U}}{U_G} = \frac{U}{U_G} e^{-i\theta} = \frac{1}{D} [(B - 2\alpha^2)(2\lambda^2 - a_0^2) - \lambda^2] \dots\dots\dots (I, 18)$$

(I.14) ~ (I.16) 式からそれぞれ絶対値と **argument** を求めて、各変位および回転角の振巾特性と位相特性を計算することができる。

### 3.1.3 剪断型連続体

半無限弾性地盤上の剪断型連続体に、鉛直下方から harmonic な水平動が入射する場合の rocking 振動について考える。Fig. 7 において、

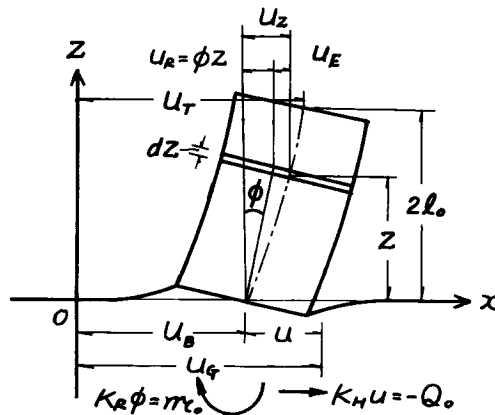


Fig. 7 Rocking of a continuous body.

(shearing type)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_G = U_G e^{i\omega t}; \text{地動変位} \\ u_B = U_B e^{i(\omega t - \theta_B)} = \bar{U}_B e^{i\omega t}; \text{基礎中心の絶対変位} \\ u = U e^{i(\omega t - \theta)} = \bar{U} e^{i\omega t} = u_G - u_B = (U_G - \bar{U}_B) e^{i\omega t}; \text{基礎中心の地動に対する相対変位} \\ \phi = \Phi e^{i(\omega t - \theta_R)} = \bar{\Phi} e^{i\omega t}; \text{基礎の回転角} \\ u_E; \text{底面から高さ } z \text{ のところの弾性変位} \\ u_R = \phi z; \text{底面から高さ } z \text{ のところの基礎の回転による変位} \\ u_z = U_z e^{i(\omega t - \theta_z)} = \bar{U}_z e^{i\omega t} = u_E - u_R; \text{底面から高さ } z \text{ のところの基礎中心に対する相対変位} \\ u_T = U_T e^{i(\omega t - \theta_T)} = \bar{U}_T e^{i\omega t}; \text{頂部中心の絶対変位} \end{array} \right. \quad \cdots \cdots \cdots \quad (\text{I. 19})$$

上のよう定義すると, base shear  $Q_0$  および base moment  $M_0$  は (2.7) および (2.8) 式より,

$$\begin{cases} -Q_0 = P_H e^{i\omega t} = K_H u = K_H (U_G - \bar{U}_B) e^{i\omega t} \\ \mathfrak{M}_0 = M_R e^{i\omega t} = K_R \phi = K_R \bar{\Phi} e^{i\omega t} \end{cases} \dots\dots\dots (I.20)$$

厚さ  $dz$  の素片について並進と回転に対する運動方程式をたてると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_B + u_z) = \frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u_B + u_z), \quad A_0 \rho_0 k_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - Q \quad \text{..... (I. 21)}$$

ここに

$A_0 = 4bc$ ,  $\rho_0$ ,  $\mu_0$ ,  $k_0$ ; 連続体の断面積, 密度, 剛性率(剪断弾性係数)および回転半径でこれらは高さ方向に一定とする。

$\mathfrak{M}$ ,  $Q$ ; 高さ  $z$  のところの曲げモーメントおよび剪断力

$$Q = A_0 \mu_0 \frac{\partial u_E}{\partial z} = A_0 \mu_0 \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \phi \right) \quad \text{..... (I. 22)}$$

なお, (I. 21) 式中軸力  $N$  の関与する量  $N (\partial u_E / \partial z)$  は右辺の諸量に比べて微小であるとして省略してある。(I. 21) の第2式を  $z=0 \sim 2l_0$  ( $2l_0$ ; 連続体の高さ) の範囲で積分し,  $[z=0$  で  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ ,  $u_z = 0$ ],  $[z=2l_0$  で  $u_z = u_z|_{z=2l_0} = u_{2l_0}$ ,  $\mathfrak{M} = 0$ ] なることを考慮すると (I. 22) 式の関係を用いて,

$$2l_0 A_0 \rho_0 k_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\mathfrak{M}_0 - A_0 \mu_0 (u_{2l_0} + 2l_0 \phi) \quad \text{..... (I. 23)}$$

(I. 21) および (I. 23) 式を (I. 19) および (I. 20) 式の関係を用いて解けば,

$$\bar{U}_B + \bar{U}_z = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz, \quad \bar{\Phi} = \frac{A_0 \mu_0 \bar{U}_{2l_0}}{2l_0 A_0 (\rho_0 k_0^2 \omega^2 - \mu_0) - K_R} \quad \text{..... (I. 24)}$$

ここに  $k = \omega \sqrt{\rho_0 / \mu_0}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ; 境界条件より定まる未定常数

境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} u_z|_{z=0} = 0 \\ Q|_{z=0} = A_0 \mu_0 \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \phi \right) \Big|_{z=0} = Q_0 \\ Q|_{z=2l_0} = A_0 \mu_0 \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \phi \right) \Big|_{z=2l_0} = 0 \end{cases} \quad \text{..... (I. 25)}$$

(I. 19), (I. 20) および (I. 24) 式を代入すれば  $\bar{U}_B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  に関する次の3つの式がえられる。

$$\bar{U}_B = C_1, \quad A_0 \mu_0 (kc_2 + \bar{\Phi}) = -K_H (U_G - \bar{U}_B), \quad -C_1 \sin 2l_0 k + C_2 \cos 2l_0 k + \frac{\bar{\Phi}}{k} = 0 \quad \text{..... (I. 26)}$$

この連立方程式を解き, (I. 24) 式に代入して  $\bar{U}_z$  を求め, さらにこの式で  $\bar{U}_z|_{z=2l_0} = \bar{U}_{2l_0}$  を求めて  $\bar{\Phi}$  を計算すれば次の一連の解を得る。

$$\frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} = \frac{l_0 \Phi}{U_G} e^{-i\theta_R} = \frac{1}{D} (1 - \cos 2l_0 k) \quad \text{..... (I. 27)}$$

$$\frac{\bar{U}_B}{U_G} = \frac{U_B}{U_G} e^{-i\theta_B} = \frac{1}{D'} \left[ \left( \frac{1}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} + A \right) \cos 2l_0 k - \frac{1}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} \right] = \frac{1}{D} \left[ \{2(k^2 k_0^2 - 1) - B\} \cos 2l_0 k + \frac{\sin 2l_0 k}{l_0 k} \right] \quad \text{..... (I. 28)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_z}{U_G} &= \frac{U_z}{U_G} e^{-i\theta_z} = \frac{1}{D'} \left[ \left( \frac{1}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} + A \right) \{ \cos[k(2l_0 - z)] - \cos 2l_0 k \} - \frac{1}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} \{ (\cos kz - 1) + A \sin kz \} \right] \\ &= \frac{1}{D} \left[ \{2(k^2 k_0^2 - 1) - B\} \{ \cos[k(2l_0 - z)] - \cos 2l_0 k \} + \frac{1}{l_0 k} \{ \sin[k(2l_0 - z)] + \sin kz - \sin 2l_0 k \} \right] \quad \text{..... (I. 29)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_{2l_0}}{U_G} &= \frac{U_{2l_0}}{U_G} e^{-i\theta_{2l_0}} = \frac{1}{D'} \left[ \left( \frac{2}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} + A \right) (1 - \cos 2l_0 k) - \frac{A}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} \sin 2l_0 k \right] \\ &= \frac{1}{D} \{2(k^2 k_0^2 - 1) - B\} (1 - \cos 2l_0 k) \quad \text{..... (I. 30)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_T}{U_G} &= \frac{U_T}{U_G} e^{-i\theta_T} = \frac{\bar{U}_B + \bar{U}_{2l_0}}{U_G} = \frac{1}{D'} \left[ \frac{1}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} (1 - \cos 2l_0 k) - \frac{A}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} \sin 2l_0 k + A \right] \\ &= \frac{1}{D} \left[ \{2(k^2 k_0^2 - 1) - B\} + \frac{\sin 2l_0 k}{l_0 k} \right] \quad \text{..... (I. 31)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}}{U_G} &= \frac{U}{U_G} e^{-i\theta} = \frac{1}{D'} \left[ \frac{1}{l_0 k} \cdot \frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} (1 - \cos 2l_0 k) - \sin 2l_0 k \right] \\ &= -\frac{1}{DA} \left[ \{2(k^2 k_0^2 - 1) - B\} \sin 2l_0 k + \frac{2(1 - \cos 2l_0 k)}{l_0 k} \right] \quad \text{..... (I. 32)} \end{aligned}$$



$$\begin{cases}
 u_G = U_G e^{i\omega t} ; \text{地動変位} \\
 u_B = U_B e^{i(\omega t - \theta_B)} = \bar{U}_B e^{i\omega t} ; \text{基礎中心の絶対変位} \\
 u = U e^{i(\omega t - \theta)} = \bar{U} e^{i\omega t} = u_G - u_B = (U_G - \bar{U}_B) e^{i\omega t} ; \text{基礎中心の地動に対する相対変位} \\
 \phi = \Phi e^{i(\omega t - \theta_R)} = \bar{\Phi} e^{i\omega t} ; \text{基礎の回転角} \dots\dots\dots (I.38) \\
 u_E ; \text{底面から高さ } z \text{ のところの弾性変位} \\
 u_R = \phi z ; \text{底面から高さ } z \text{ のところの基礎の回転による変位} \\
 u_z = U_z e^{i(\omega t - \theta_z)} = \bar{U}_z e^{i\omega t} = u_E - u_R ; \text{底面から高さ } z \text{ のところの基礎中心に対する相対変位} \\
 u_T = U_T e^{i(\omega t - \theta_T)} = \bar{U}_T e^{i\omega t} ; \text{頂部中心の絶対変位}
 \end{cases}$$

上のように定義すると, base shear  $Q_0$  および base moment  $\mathfrak{M}_0$  は (2.7) および (2.8) 式から,

$$-Q_0 = P_H e^{i\omega t} = K_H u = K_H (U_G - \bar{U}_B) e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{M}_0 = M_R e^{i\omega t} = K_R \phi = K_R \bar{\Phi} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (I.39)$$

厚さ  $dz$  の素片について運動方程式をたてると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_B + u_z) = -a^2 \frac{\partial^4}{\partial z^4} (u_B + u_z) \dots\dots\dots (I.40)$$

ここに  $a^2 = \frac{E_0 I_0}{\rho_0 A_0}$ ,  $E_0, I_0, \rho_0, A_0$ ; 連続体の弾性係数, 断面2次モーメント, 密度および断面積

でこれらは高さ方向に一定とする。

(I.38) 式を代入して解けば

$$\bar{U}_B + \bar{U}_z = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz \dots\dots\dots (I.41)$$

ここに  $k^4 = \frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\omega^2 A_0 \rho_0}{E_0 I_0}$ ,  $C_1, C_2, C_3, C_4$ ; 境界条件より定まる未定常数

$2l_0$  を連続体の高さとして境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 u_z|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}|_{z=0} = -\phi, \quad -E_0 I_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}|_{z=0} = \mathfrak{M}_0, \quad -E_0 I_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}|_{z=2l_0} = 0, \\
 -E_0 I_0 \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3}|_{z=0} = Q_0, \quad -E_0 I_0 \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3}|_{z=2l_0} = 0
 \end{aligned} \dots\dots\dots (I.42)$$

(I.38) と (I.39) 式を代入すると,  $C_1 \sim C_4, \bar{U}_B$  および  $\bar{\Phi}$  に関する6つの式がえられるので,  $\bar{U}_B$  および  $\bar{\Phi}$  を消去して,  $C_1 \sim C_4$  についての連立方程式をマトリックス表示になおせば,

$$\begin{pmatrix} B & 1 & B & -1 \\ -1 & A & 1 & A \\ -\sin 2l_0 k & -\cos 2l_0 k & \sinh 2l_0 k & \cosh 2l_0 k \\ -\cos 2l_0 k & \sin 2l_0 k & \cosh 2l_0 k & \sinh 2l_0 k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ AU_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (I.43)$$

ここに

$$\begin{cases}
 A = \frac{K_H}{E_0 I_0 k^3} = \left[ 4 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left\{ \frac{a_0^6 (4n^2 - 3)}{3} \left( \frac{c_{20}}{c_2} \right)^2 \left( \frac{c}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} (f_{1H} + i f_{2H}) \right]^{-1} \\
 B = \frac{K_R}{E_0 I_0 k} = \left[ 4 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left\{ \frac{a_0^2 (4n^2 - 3)}{27} \left( \frac{c_{20}}{c_2} \right)^6 \left( \frac{c}{b} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} (f_{1R} + i f_{2R}) \right]^{-1} \\
 I_0 = \frac{4}{3} b^3 c, \quad A_0 = 4bc, \quad E_0 = 2(1 + \nu) \mu_0 = \frac{4n^2 - 3}{n^2 - 1} \mu_0 \dots\dots\dots (I.44) \\
 \mu_0 ; \text{連続体の剛性率 (剪断弾性係数)} \\
 \frac{c_{20}}{\rho_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} / \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} / \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}} \\
 l_0 k = \left( \frac{l_0}{b} \right) \left[ \frac{1}{3a_0^2} \left( \frac{4n^2 - 3}{n^2 - 1} \right) \left( \frac{c_{20}}{c_2} \right)^2 \left( \frac{c}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}}
 \end{cases}$$

これを解いて未定常数を求め, 各変位を計算すると,

$$\frac{\bar{U}_B}{U_G} = \frac{U_B}{U_G} e^{-i\theta_B} = \frac{2A}{D} \left[ (\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k - \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) - B(\cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k + 1) \right] \quad (\text{I. 45})$$

$$\frac{l_0 \bar{\Phi}}{U_G} = \frac{l_0 \Phi}{U_G} e^{-i\theta_R} = \frac{2A}{D} l_0 k \cdot \sin 2l_0 k \sinh 2l_0 k \cdots \cdots \cdots (\text{I. 46})$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_B + \bar{U}_z}{U_G} = \frac{A}{D} & \left[ - \left\{ (\sin 2l_0 k \sinh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k - 1) \right. \right. \\ & + B(\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \left. \right\} \sin kz \\ & + \left\{ (\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k - \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \right. \\ & + B(\sin 2l_0 k \sinh 2l_0 k - \cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k - 1) \left. \right\} \cos kz \\ & + \left\{ (-\sin 2l_0 k \sinh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k - 1) \right. \\ & + B(\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \left. \right\} \sinh kz \\ & - \left\{ (-\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \right. \\ & + B(\sin 2l_0 k \sinh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k + 1) \left. \right\} \cosh kz \left. \right] \cdots \cdots \cdots (\text{I. 47}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_z}{U_G} \Big|_{z=2l_0} = \frac{\bar{U}_{2l_0}}{U_G} = \frac{U_{2l_0}}{U_G} e^{-i\theta_{2l_0}} = \frac{2A}{D} & \left[ \left\{ (1 - \cosh 2l_0 k) \sin 2l_0 k \right. \right. \\ & - (1 - \cos 2l_0 k) \sinh 2l_0 k \left. \right\} + B(1 - \cos 2l_0 k)(1 - \cosh 2l_0 k) \left. \right] \cdots \cdots \cdots (\text{I. 48}) \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{U}_T}{U_G} = \frac{U_T}{U_G} e^{-i\theta_T} = \frac{\bar{U}_B + \bar{U}_{2l_0}}{U_G} = \frac{2A}{D} \left[ (\sin 2l_0 k - \sinh 2l_0 k) - B(\cos 2l_0 k + \cosh 2l_0 k) \right] \cdots \cdots (\text{I. 49})$$

$$\frac{\bar{U}}{U_G} = \frac{U}{U_G} e^{-i\theta} = \frac{2}{D} \left[ (\cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k - 1) + B(\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \right] \cdots (\text{I. 50})$$

ここに,

$$\begin{aligned} D = 2 & \left[ (\cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k - 1) + B(\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \right. \\ & + A \left\{ (\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k - \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) - B(\cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k + 1) \right\} \left. \right] \cdots \cdots (\text{I. 51}) \end{aligned}$$

$D=0$  はこの連成系の振動数方程式である。

ここで前節までの扱いと同じにするために、基礎固定の場合の固有振動数  $p_1$  に関する  $a_0$  と同等な無次元量  $\lambda$  を導入する。

$$\lambda = p_1 b \sqrt{\rho/\mu} \cdots \cdots \cdots (\text{I. 52})$$

基礎固定の場合の振動数方程式とその解は,

$$\begin{cases} \cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k + 1 = 0 \\ l_0 k_n = c_n \quad [n=1, 2, 3, \cdots] \quad (\text{例えば } c_1=1.875/2, \quad c_2=4.694/2, \quad \cdots) \end{cases} \cdots \cdots (\text{I. 53})$$

したがって  $p_1$  は (I. 41) 式から,

$$p_1 = \sqrt{\frac{E_0 I_0}{A_0 \rho_0}} k_n^2 = \sqrt{\frac{E_0 I_0}{A_0 \rho_0}} \left( \frac{c_n}{l_0} \right)^2 \cdots \cdots \cdots (\text{I. 54})$$

この関係を用いると, (I. 44) 式の諸量は  $[l_0/b, S_0, c/b, a_0, \lambda]$  で表示されて

$$\begin{cases} A = \left[ \frac{4}{c_n} \sqrt{a_0 \lambda} a_0 S_0 (f_{1H} + i f_{2H}) \right]^{-1} \\ B = \left[ \frac{12}{c_n^3} \sqrt{a_0 \lambda} \lambda S_0 \left( \frac{l_0}{b} \right)^2 (f_{1R} + i f_{2R}) \right]^{-1} \\ l_0 k = c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}, \quad S_0 = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left( \frac{l_0}{b} \right) \end{cases} \cdots \cdots (\text{I. 55})$$

### 3.2 並進のみの場合

#### 3.2.1 剛 体

まず、剛体に垂直方向の並進振動のみが生じる場合について考える。半無限弾性地盤上に高さ  $2l_0$ 、質量  $m_0$  の等質な剛体がついているとき、鉛直下方から harmonic な上下動  $w_G = W_G e^{i\omega t}$  が入射するものとする。Fig. 9 において、

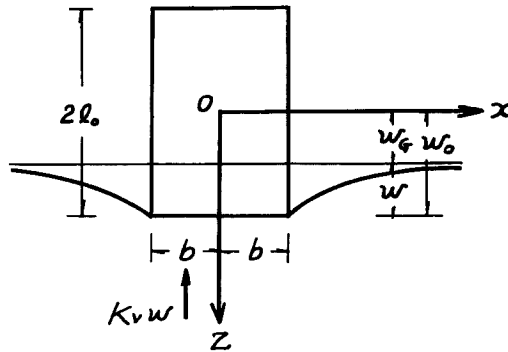


Fig. 9 Vertical translation of a rigid body.

$$\begin{cases} w_G = W_G e^{i\omega t}; \text{地動変位} \\ w_0 = W_0 e^{i(\omega t - \theta_V)} = \bar{W}_0 e^{i\omega t}; \text{剛体の絶対変位} \dots\dots\dots (II.1) \\ w = W e^{i(\omega t - \theta)} = \bar{W} e^{i\omega t} = w_G - w_0 = (W_G - \bar{W}_0) e^{i\omega t}; \text{基礎の地動に対する相対変位} \end{cases}$$

上のように定義すると、地盤から剛体に伝達される力は (2.6) 式から、

$$P_V e^{i\omega t} = K_V w = K_V (W_G - \bar{W}_0) e^{i\omega t} \dots\dots\dots (II.2)$$

したがって運動方程式は、

$$m_0 \frac{d^2 w_0}{dt^2} = K_V w \dots\dots\dots (II.3)$$

(II.1) 式の関係をつかってこれを解き、 $K_V$  に (2.6) 式を代入すると、

$$\frac{\bar{W}_0}{W_G} = \frac{W_0}{W_G} e^{-i\theta_V} = \frac{1}{1 - m_0 \omega^2 / K_V} = \frac{1}{1 - m_0 \omega^2 (f_{1V} + i f_{2V}) / c\mu} \dots\dots\dots (II.4)$$

$$\begin{cases} \frac{W_0}{W_G} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 8a_0^2 S_0 f_{1V})^2 + (8a_0^2 S_0 f_{2V})^2}} \dots\dots\dots (II.5) \\ \theta_V = \tan^{-1} \left[ \frac{-8a_0^2 S_0 f_{2V}}{1 - 8a_0^2 S_0 f_{1V}} \right] \end{cases}$$

ここに

$$S_0 = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left( \frac{l_0}{b} \right); \text{質量比, } \rho_0 = \frac{m_0}{8bcl_0}; \text{剛体のみかけの密度} \dots\dots\dots (II.6)$$

$W_0/W_G$  は剛体の絶対変位の地動変位に対する振巾特性、 $\theta_V$  はこれらの変位間の位相特性を表す。一方基礎の相対変位は

$$\frac{\bar{W}}{W_G} = \frac{W}{W_G} e^{-i\theta} = \frac{-8a_0^2 S_0}{1 - 8a_0^2 S_0 (f_{1V} + i f_{2V})} \dots\dots\dots (II.7)$$

$$\begin{cases} \frac{W}{W_G} = 8a_0^2 S_0 \sqrt{\frac{f_{1V}^2 + f_{2V}^2}{(1 - 8a_0^2 S_0 f_{1V})^2 + (8a_0^2 S_0 f_{2V})^2}} \dots\dots\dots (II.8) \\ \theta = \tan^{-1} \left[ \frac{-f_{2V}}{f_{1V} - 8a_0^2 S_0 (f_{1V}^2 + f_{2V}^2)} \right] \end{cases}$$

(II.8) 式は、APPENDIX の (A.5) および (A.6) 式において  $k_V$  の代わりに  $8S_0$  を、 $F_V$  の代わりに  $m_0\omega^2 W_G$  を代入すれば得られることがわかる。ここに  $k_V$  と  $8S_0$  は等価な無次元量である。すなわち、

$$8S_0 = 8 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left( \frac{l_0}{b} \right) = 8 \frac{1}{\rho} \left( \frac{m_0}{8bc l_0} \right) \frac{l_0}{b} = \frac{m_0}{\rho b^2 c} = k_V \quad \text{(II.9)}$$

このことは、剛体に強制力が働くときの基礎の絶対変位と、上下動が入射するときの基礎の相対変位が同じ動特性を示すことを意味し、これは、後者の振動を運動座標においてみれば、剛体に  $m_0\omega^2 W_G e^{i\omega t}$  なる強制力が作用する場合の振動になることから理解される。

次に、 $W_0/W_G$  および  $\partial[W_0/W_G]/\partial S_0 = 0$  の式から  $S_0$  を消去すると、 $S_0$  をパラメータにしたときの  $W_0/W_G - a_0$  曲線群の包絡線を得る。まず  $\partial[W_0/W_G]/\partial S_0 = 0$  とおけば、

$$f_{1V} - 8a_0^2 S_0 (f_{1V}^2 + f_{2V}^2) = 0 \quad \text{(II.10)}$$

この式は地動変位  $w_G$  と基礎の相対変位  $w$  との間の位相差  $\theta = \pi/2$  という条件を示している。包絡線は、

$$\left[ \frac{W_0}{W_G} \right]_E = \frac{\sqrt{f_{1V}^2 + f_{2V}^2}}{|f_{2V}|} \quad \text{(II.11)}$$

同様に  $S_0$  をパラメータにしたときの  $W/W_G - a_0$  曲線の包絡線を求めるために、 $\partial[W/W_G]/\partial S_0 = 0$  とおけば、

$$1 - 8a_0^2 S_0 f_{1V} = 0 \quad \text{(II.12)}$$

この式は地動変位  $w_G$  と剛体の絶対変位  $w_0$  との間の位相差  $\theta_V = \pi/2$  という条件を示している。包絡線は (II.11) 式と同じ形で、

$$\left[ \frac{W}{W_G} \right]_E = \frac{\sqrt{f_{1V}^2 + f_{2V}^2}}{|f_{2V}|} \quad \text{(II.13)}$$

包絡線に接するときの変位振巾がその最大値に近いことを考慮に入れると、(II.11) 式および (II.13) 式は、剛体の相対変位の位相特性が  $\pi/2$  になるとき、その絶対変位の振巾特性は包絡線に接して最大値に近い値をとり、逆に絶対変位の位相特性が  $\pi/2$  になるときには、相対変位の振巾特性がその包絡線に接して最大値に近い値をとるという相互関係を示すものである。

次に剛体に水平方向の並進振動のみが生じる場合について考えると、運動方程式は、

$$m_0 \frac{d^2 u}{dt^2} = K_H u \quad \text{(II.14)}$$

となって、剛体の垂直方向の並進振動の式と全く同じ形をしているので、 $U_G \rightarrow W_G$ ,  $U_0 \rightarrow W_0$ ,  $\theta_H \rightarrow \theta_V$ ,  $K_H \rightarrow K_V$ ,  $f_{1H} + if_{2H} \rightarrow f_{1V} + if_{2V}$  のおきかえをすれば、上記の解析および結果がここでもそのまま成立つわけである。そして Fig. 2 および Fig. 3 から明らかなように、垂直振動と水平振動の場合の Ground Compliance が同じような傾向を示すことから、harmonic な波動が入射する弾性地盤上の剛体の垂直と水平の並進振動がほぼ同一の動特性をもっていることがわかる。

### 3.2.2 1 質点系

1 質点系に水平方向の並進振動のみが生じる場合を考える。(以下記号は、3.1.2 参照) この場合の解は 3.1.2 において基礎の回転に関する項をおとして求めれば、

$$\frac{\bar{U}_B}{U_G} = \frac{U_B}{U_G} e^{-i\theta_B} = -\frac{A}{D_H} (\lambda^2 - a_0^2) = \frac{1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{(II.15)}$$

$$\frac{\bar{U}_T}{U_G} = \frac{U_T}{U_G} e^{-i\theta_T} = -\frac{A}{D_H} \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - a_0^2} \cdot \frac{1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{(II.16)}$$

$$\frac{\bar{U}}{U_G} = \frac{U}{U_G} e^{-i\theta} = \frac{1}{D_H} (2\lambda^2 - a_0^2) = \frac{-K(f_{1H} + if_{2H})}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{(II.17)}$$

ここに

$$D_H = (2\lambda^2 - a_0^2) - (\lambda^2 - a_0^2)A, \quad K = 8a_0^2 S_0 \frac{2\lambda^2 - a_0^2}{\lambda^2 - a_0^2} \quad \text{(II.18)}$$

$D_H=0$  はこの連成系の振動数方程式である。以上の式から各変位の振巾特性および位相特性を計算すると、

$$\frac{U_B}{U_G} = \frac{1}{\sqrt{(1-Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta_B = \tan^{-1} \left[ \frac{-Kf_{2H}}{1-Kf_{1H}} \right] \quad \text{..... (II. 19)}$$

$$\frac{U_T}{U_G} = \left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - a_0^2} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta_T = \theta_B + \delta \cdot \pi, \quad \delta = \begin{cases} 0 & \lambda > a_0 \\ 1 & \lambda < a_0 \end{cases} \quad \text{..... (II. 20)}$$

$$\frac{U}{U_G} = \frac{|K| \sqrt{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}}{\sqrt{(1-Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \left[ \frac{-f_{2H}}{f_{1H} - K(f_{1H}^2 + f_{2H}^2)} \right] \quad \text{..... (II. 21)}$$

$\lambda = a_0$  (i. e.  $p_1 = \omega$ ) のときは、基礎固定の場合の構造物の固有振動数と地動の振動数が等しくなる一種の共振点であるが、上式では計算できないのでもとの式にもどって求めると、

$$\begin{cases} \frac{U_B}{U_G} = 0, & \frac{U_T}{U_G} = \frac{1}{8a_0^2 S_0 \sqrt{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}}, & \frac{U}{U_G} = 1 \\ \theta_T = \tan^{-1} \left[ \frac{f_{2H}}{f_{1H}} \right], & \theta = 0 \end{cases} \quad \text{..... (II. 22)}$$

また、 $K=0$  (i. e.  $a_0 = \sqrt{2}\lambda$ ) のときには、

$$\frac{U_B}{U_G} = \frac{U_T}{U_G} = 1, \quad \frac{U}{U_G} = 0, \quad \theta_B = 0, \quad \theta_T = \pi \quad \text{..... (II. 23)}$$

### 3.2.3 剪断型連続体

剪断型連続体に並進振動のみが生じる場合について考える。(以下記号は3.1.3参照) この場合には3.1.3の解析において  $u_R=0$ ,  $u_z=u_E$  となり、運動方程式は (I. 21) の第一式でその解は (I. 24) の第一式で示される。未定常数  $C_1$ ,  $C_2$  および基礎中心の絶対変位  $\bar{U}_B$  を定める境界条件式は、

$$u_z \Big|_{z=0} = 0, \quad A_0 \mu_0 \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = Q_0, \quad A_0 \mu_0 \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=2l_0} = 0 \quad \text{..... (II. 24)}$$

(I. 19) および (I. 22) 式を代入してこれを解き、その結果から各変位を計算すると、

$$\frac{\bar{U}_B}{U_G} = \frac{U_B}{U_G} e^{-i\theta_B} = \frac{A}{D_H} \cos 2l_0 k = \frac{1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{..... (II. 25)}$$

$$\frac{\bar{U}_B + \bar{U}_z}{U_G} = \frac{A}{D_H} \cos[k(2l_0 - z)] = \frac{\cos\left(c_n \frac{a_0}{\lambda} \cdot \frac{z}{l_0}\right) + \tan\left(2c_n \frac{a_0}{\lambda}\right) \sin\left(c_n \frac{a_0}{\lambda} \cdot \frac{z}{l_0}\right)}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{..... (II. 26)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_z}{U_G} &= \frac{U_z}{U_G} e^{-i\theta_z} = \frac{A}{D_H} [\cos[k(2l_0 - z)] - \cos 2l_0 k] \\ &= \frac{\cos\left(c_n \frac{a_0}{\lambda} \cdot \frac{z}{l_0}\right) + \tan\left(2c_n \frac{a_0}{\lambda}\right) \sin\left(c_n \frac{a_0}{\lambda} \cdot \frac{z}{l_0}\right) - 1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{..... (II. 27)} \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{U}_T}{U_G} = \frac{U_T}{U_G} e^{-i\theta_T} = \frac{A}{D_H} = \sec\left(2c_n \frac{a_0}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{..... (II. 28)}$$

$$\frac{\bar{U}}{U_G} = \frac{U}{U_G} e^{-i\theta} = -\frac{1}{D_H} \sin 2l_0 k = \frac{-K(f_{1H} + if_{2H})}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{..... (II. 29)}$$

ここに、

$$D_H = A \cos 2l_0 k - \sin 2l_0 k, \quad K = \frac{4}{c_n} \cdot a_0 S_0 \lambda \tan\left(2c_n \frac{a_0}{\lambda}\right) \quad \text{..... (II. 30)}$$

連成系の振動数方程式は  $D_H=0$  で与えられる。

最後に基礎中心の絶対変位  $\bar{U}_B$  と頂部の絶対変位  $\bar{U}_T$  および基礎中心の地動に対する相対変位  $\bar{U}$  について振巾特性と位相特性を求めると、

$$\frac{U_B}{U_G} = \frac{1}{\sqrt{(1-Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta_B = \tan^{-1} \left[ \frac{-Kf_{2H}}{1-Kf_{1H}} \right] \quad \text{..... (II. 31)}$$



$$\frac{U_T}{U_G} = \left| \sec\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta_T = \theta_B + \delta \cdot \pi, \quad \delta = \begin{cases} 0, & \sec\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) > 0 \\ 1, & \sec\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) < 0 \end{cases}$$

..... (II. 32)

$$\frac{U}{U_G} = \frac{|K| \sqrt{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}}{\sqrt{(1-Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \left[ \frac{-f_{2H}}{f_{1H} - K(f_{1H}^2 + f_{2H}^2)} \right] \quad \text{..... (II. 33)}$$

地動の振動数が基礎固定の場合の構造物の固有振動数に等しい  $a_0 = \lambda$  (i. e.  $\omega = p_1$ ) のときは,

$$\begin{cases} \frac{U_B}{U_G} = 0, & \frac{U_T}{U_G} = \frac{1}{4 \cdot a_0^2 S_0 \sqrt{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}}, & \frac{U}{U_G} = 1 \\ \theta_T = \tan^{-1} \left[ \frac{f_{2H}}{f_{1H}} \right], & \theta = 0 \end{cases} \quad \text{..... (II. 34)}$$

また,  $K=0$  すなわち  $a_0 = m\pi\lambda/2c_n$  [ $m=1, 2, 3, \dots$ ] のときには,

$$\frac{U_B}{U_G} = \frac{U_T}{U_G} = 1, \quad \frac{U}{U_G} = 0, \quad \theta_B = 0, \quad \theta_T = 0 \text{ または } \pi \quad \text{..... (II. 35)}$$

### 3.2.4 曲げ型連続体

曲げ型連続体に並進振動のみが生じる場合について考える。(以下記号は3.1.4参照) この場合には3.1.4の解析において  $u_R=0$ ,  $u_z=u_E$  となり, 運動方程式とその解は (I. 40) 式および (I. 41) 式で表わされる。未定常数  $C_1 \sim C_4$  および基礎中心の絶対変位  $\bar{U}_B$  を定める境界条件式は,

$$\begin{cases} u_z \Big|_{z=0} = 0, & \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, & -E_0 I_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \Big|_{z=2l_0} = 0 \\ -E_0 I_0 \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \Big|_{z=0} = Q_0, & -E_0 I_0 \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \Big|_{z=2l_0} = 0 \end{cases} \quad \text{..... (II. 36)}$$

(I. 38) と (I. 39) 式を代入し,  $\bar{U}_B$  を消去してえられる  $C_1 \sim C_4$  に関する連立方程式をマトリックス表示にすれば,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & A & 1 & A \\ -\sin 2l_0 k & -\cos 2l_0 k & \sinh 2l_0 k & \cosh 2l_0 k \\ -\cos 2l_0 k & \sin 2l_0 k & \cosh 2l_0 k & \sinh 2l_0 k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ AU_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{..... (II. 37)}$$

これを解き各変位を計算すると,

$$\frac{\bar{U}_B}{U_G} = \frac{U_B}{U_G} e^{-i\theta_B} = -\frac{2A}{D_H} (\cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k + 1) = \frac{1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{..... (II. 38)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_B + \bar{U}_z}{U_G} &= \frac{A}{D_H} \left[ -(\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \sin kz \right. \\ &\quad + (\sin 2l_0 k \sinh 2l_0 k - \cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k - 1) \cos kz \\ &\quad + (\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) \sinh kz \\ &\quad \left. - (\sin 2l_0 k \sinh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k + 1) \cosh kz \right] \quad \text{..... (II. 39)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_{2l_0}}{U_G} &= \frac{U_{2l_0}}{U_G} e^{-i\theta_{2l_0}} = \frac{2A}{D_H} \left[ (1 - \cos 2l_0 k) (1 - \cosh 2l_0 k) \right] \\ &= \frac{-\left\{ 1 - \cos\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) \right\} \left\{ 1 - \cosh\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) \right\}}{\cos\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) \cosh\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + 1} \cdot \frac{1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \quad \text{..... (II. 40)} \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{U}_T}{U_G} = \frac{U_T}{U_G} e^{-i\theta_T} = -\frac{2A}{D_H} (\cos 2l_0 k + \cosh 2l_0 k)$$

$$= \frac{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)\cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + 1} \cdot \frac{1}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \dots\dots\dots (II. 41)$$

$$\frac{\bar{U}}{U_G} = \frac{U}{U_G} e^{-i\theta} = \frac{2}{D_H} (\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) = \frac{-K(f_{1H} + if_{2H})}{1 - K(f_{1H} + if_{2H})} \dots\dots\dots (II. 42)$$

ここに,

$$D_H = 2 \left[ (\sin 2l_0 k \cosh 2l_0 k + \cos 2l_0 k \sinh 2l_0 k) - A(\cos 2l_0 k \cosh 2l_0 k + 1) \right]$$

$$K = \frac{4}{c_n} a_0 \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}} S_0 \cdot \frac{\tan\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \tanh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{1 + \sec\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)\operatorname{sech}\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)} \dots\dots\dots (II. 43)$$

$D_H=0$  は連成系の振動数方程式である。以上の式から  $\bar{U}_B$ ,  $\bar{U}_T$  および  $\bar{U}$  について振巾特性と位相特性を求めれば,

$$\frac{U_B}{U_G} = \frac{1}{\sqrt{(1 - Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta_B = \tan^{-1} \left[ \frac{-Kf_{2H}}{1 - Kf_{1H}} \right] \dots\dots\dots (II. 44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_T}{U_G} = \frac{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)\cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}} \\ \theta_T = \theta_B + \pi \cdot \delta \\ \delta = \begin{cases} 0, & \operatorname{sign} \left( \frac{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)\cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + 1} \right) > 0 \\ 1, & \operatorname{sign} \left( \frac{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)\cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + 1} \right) < 0 \end{cases} \end{array} \right. \dots\dots\dots (II. 45)$$

$$\frac{U}{U_G} = \frac{|K| \sqrt{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}}{\sqrt{(1 - Kf_{1H})^2 + (Kf_{2H})^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \left[ \frac{-f_{2H}}{f_{1H} - K(f_{1H}^2 + f_{2H}^2)} \right] \dots\dots\dots (II. 46)$$

$a_0 = \lambda$  (i. e.  $\omega = p_1$ ) のときには,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_B}{U_G} = 0, \quad \frac{U_T}{U_G} = \left| \frac{\sec 2c_n + \operatorname{sech} 2c_n}{\tan 2c_n + \tanh 2c_n} \right| \cdot \frac{1}{\frac{4}{c_n} a_0^2 S_0 \sqrt{f_{1H}^2 + f_{2H}^2}}, \quad \frac{U}{U_G} = 1 \\ \theta_T = \tan^{-1} \left[ \frac{f_{2H}}{f_{1H}} \right], \quad \theta = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (II. 47)$$

また,  $K=0$  すなわち  $a_0$  と  $\lambda$  が

$$\tan\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \tanh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) = 0 \dots\dots\dots (II. 48)$$

を満足するときには,

$$\frac{U_B}{U_G} = 1, \quad \frac{U_T}{U_G} = \frac{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{\cos\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)\cosh\left(2c_n\sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + 1}, \quad \frac{U}{U_G} = 0, \quad \theta_B = 0, \quad \theta_T = 0 \quad \text{または} \quad \pi \dots\dots (II. 49)$$

### 3.2.5 並進のみの場合の動特性の一般的表現

前節までの解析結果を総合すれば, 半無限弾性地盤上の種々の構造物に harmonic な上下動あるいは水平動の波が入射するとき, 振動形態が並進のみの場合には, 構造物の種類にかかわらず全般的にはよく似た振

動特性を示し、振巾特性と位相特性は同一の式で表示される。

・基礎絶対変位の振巾特性

$$\frac{U_B}{U_G} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1-Kf_{1j})^2 + (Kf_{2j})^2}} & (a_0 \neq \lambda, K \neq 0) \\ 1 & (a_0 \neq \lambda, K = 0) \dots\dots\dots (II, 50) \\ 0 & (a_0 = \lambda) \end{cases}$$

・頂部絶対変位の振巾特性

$$\frac{U_T}{U_G} = \begin{cases} |C| \cdot \frac{U_B}{U_G} & (a_0 \neq \lambda, K \neq 0) \\ |C_{K=0}| & (a_0 \neq \lambda, K = 0) \dots\dots\dots (II, 51) \\ \frac{|E|}{8a_0^2 S_0 \sqrt{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}} & (a_0 = \lambda) \cdot \end{cases}$$

・基礎相対変位の振巾特性

$$\frac{U}{U_G} = \begin{cases} |K| \sqrt{f_{1j}^2 + f_{2j}^2} \cdot \frac{U_B}{U_G} & (a_0 \neq \lambda, K \neq 0) \\ 0 & (a_0 \neq \lambda, K = 0) \dots\dots\dots (II, 52) \\ 1 & (a_0 = \lambda) \end{cases}$$

・各変位の位相特性

$$\theta_B = \begin{cases} \tan^{-1} \left[ \frac{-Kf_{2j}}{1-Kf_{1j}} \right] & (a_0 \neq \lambda, K \neq 0) \\ 0 & (a_0 \neq \lambda, K = 0) \dots\dots\dots (II, 53) \\ \tan^{-1} \left[ \frac{f_{2j}}{f_{1j}} \right] & (a_0 = \lambda) \end{cases}$$

$$\theta_T = \theta_B + \delta \cdot \pi, \quad \delta = \begin{cases} 0, & \text{sign } C > 0 \\ 1, & \text{sign } C < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (II, 54)$$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1} \left[ \frac{-f_{2j}}{f_{1j} - K(f_{1j}^2 + f_{2j}^2)} \right] & (a_0 \neq \lambda) \dots\dots\dots (II, 55) \\ 0 & (a_0 = \lambda) \end{cases}$$

また、質量比  $S_0$  あるいは基礎固定の場合の固有振動数無次元量  $\lambda$  をパラメータにとったときの振巾特性の包絡線は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \left[ \frac{U_B}{U_G} \right]_{E, S_0} = \left[ \frac{U_B}{U_G} \right]_{E, \lambda} = \frac{\sqrt{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}}{|f_{2j}|} \dots\dots\dots (II, 56) \\ \left[ \frac{U_T}{U_G} \right]_{E, S_0} = |C| \cdot \left[ \frac{U_B}{U_G} \right]_{E, S_0} = |C| \cdot \frac{\sqrt{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}}{|f_{2j}|} \end{cases}$$

以上の式で、 $j=V$  または  $H$ ,  $K=K(S_0, \lambda, a_0)$ ,  $C=C(\lambda, a_0)$ ,  $E$ ; 常数を表わし、その形は構造物と振動形態によって決まる。すなわち、

・剛体の垂直振動および水平振動

$$K=8a_0^2 S_0, \quad C=1 \dots\dots\dots (II, 57)$$

・1 質点系の水平振動

$$K=8a_0^2 S_0 \frac{2\lambda^2 - a_0^2}{\lambda^2 - a_0^2}, \quad C=\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - a_0^2}, \quad E=1 \dots\dots\dots (II, 58)$$

・連続体の剪断振動

$$K=\frac{8a_0^2 S_0}{2c_n \frac{a_0}{\lambda}} \tan\left(2c_n \frac{a_0}{\lambda}\right), \quad C=\sec\left(2c_n \frac{a_0}{\lambda}\right), \quad E=\frac{1}{2c_n} \cdot \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (II, 59)$$

・連続体の曲げ振動

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{8a_0^2 S_0}{2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}} \cdot \frac{\tan\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \tanh\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{1 + \sec\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) \operatorname{sech}\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)} \\ C = \frac{\cos\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + \cosh\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right)}{\cos\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) \cosh\left(2c_n \sqrt{\frac{a_0}{\lambda}}\right) + 1} \dots\dots\dots (II.60) \\ E = \frac{1}{2c_n} \cdot \frac{\sec 2c_n + \operatorname{sech} 2c_n}{\tan 2c_n + \tanh 2c_n} \end{array} \right.$$

ここに  $2c_n$  は基礎固定の場合の振動数方程式の  $n$  次根である。また  $K$  および  $C$  の分母には基礎固定にした場合の振動数方程式の形をもつ式が含まれており、 $a_0 = \lambda$  のときにはともに振動数方程式が満たされた形になって、分母が零、すなわち  $K$  および  $C$  が無限大になることがわかる。

以上の式から次のことが理解される。

1.  $a_0 = \lambda$  (i. e.  $\omega = p_1$ ) のとき、すなわち基礎固定の場合の構造物の固有振動数と地動の振動数が等しい一種の共振点 (これを“仮の共振点”と名付ける) では、入力が存在するのに基礎は不動点となって動かず、また位相差は構造物と地盤の質量比  $S_0$  に無関係に一定値をとる。所謂 dynamic absorber にみられる状態である。
2.  $a_0$  と  $\lambda$  が  $K=0$  という関係を満たすときには、基礎は地動と同じ動きをし、また頂部は地動と同位相または逆位相で質量比  $S_0$  に無関係な定振巾の動きをする。そして連続体の曲げ振動の場合を除き、この定振巾は地動の振巾に等しい。なお後記の 5 より明らかなように、 $K=0$  は物理的には運動座標からみたときの基礎に働くみかけの強制力が零になる状態である。
3. 1 と 2 にあげた  $a_0 = \lambda$  および  $K=0$  の点は構造物モデルの自由度の数だけ存在する。
4. 基礎変位と頂部変位との間の位相特性は  $\pi$  の差を除けば常に等しく、同位相または逆位相の関係を保持しながら振動する。
5. (II.52), (II.54) 式と APPENDIX の (A.5), (A.6) 式とがそれぞれ同じ形をしていることから、運動座標からみたとき、構造物の基礎の動特性は、 $F_j e^{i\omega t} = K U_G e^{i\omega t}$  なる振動数によって振巾の変動する強制力が作用する剛体基礎の強制振動において、静止座標からみた基礎の動特性に等しいと考えることができる。

#### 4. 数値計算結果とその考察

##### 4.1 並進のみの場合

###### 4.1.1 剛体

代表的に、正方形断面をもつ剛体の水平方向の並進振動の場合について、振巾特性  $U_0/U_G$  と位相特性  $\theta_H$  を Figs. 10, 11 に示す。横軸には振動数無次元量  $a_0$  を、またパラメータには質量比  $S_0$  をとっている。APPENDIX に示した、剛体に直接強制力が作用する場合と類似の現象が多くみられるが、解析結果を要約すれば、

1. 垂直、水平の両振動形態に対して動特性は同一の式で表示される。そして、垂直振動と水平振動との間に物理現象として本質的な違いがないことから、地盤の等価バネ剛性にあたる Ground Compliance の形そのものが似ており、その動特性は定性的には全く等しいということができる。定量的には水平振動の振巾特性の方がかなり大きく、同じ大きさの地動が入射したときには垂直振動より水平振動の場合により大きな変形が生じやすいことを示している。

2. 振巾特性は peak をもつ曲線となって地盤と剛体の連成系には固有振動数が存在するが、地盤の減衰

作用により共振振巾の大きさは有限となる。質量比が大になると、いいかえると剛体の自重が地盤に比べて相対的に重くなれば共振振動数は低くなり、振巾特性の最大値と位相特性とはともに大きくなる。また振巾特性は最大値となる近傍の振動数でその包絡線に接する。

3. 位相特性は極値をもつ曲線となり、地動の振動数が高くなると質量比に無関係な一定値に近づく。

4. 同一自重・同一断面積の場合には、一般に地動の低振動数域では細長い断面のものが、高振動数域では正方形断面に近いものが振巾特性が小さくなって有利であるといえる。

#### 4.1.2 1 質点系および連続体

基礎変位と頂部変位の振巾特性  $U_B/U_G$ ,  $U_T/U_G$  および基礎変位の位相特性  $\theta_B$  について、1 質点系の場合を Figs. 12~14 に、剪断型連続体の場合を Figs. 15~17 に、曲げ型連続体の場合を Figs. 18~20 に示す。構造物は正方形断面をもつとし、横軸には基礎固定の場合の構造物の基本固有振動数に対する地動の振動数の比  $a_0/\lambda$  を、パラメータには基礎固定の場合の固有振動数無次元量  $\lambda$  をとっている。また剪断型連続体の場合について、構造物の断面積を等しくして断面形のみを変えたときの各特性を Figs. 21~23 に示す。3.2.5 の最後に要約して記した解析的表現からえられた諸結果が、各特性を表わすグラフに現われていることが容易に理解される。それ以外の解析結果を要約すると、

1. 構造物に働くみかけの力が零になる点  $K=0$  から次の  $K=0$  の点の間の振動数域において、各特性はそれぞれ類似の形をもち、振動数比が大きくなるにしたがい、この形が上部構造物の自由度の数に応じてくり返し現われる。

2. 重要なのは振動数比の小さい方の最初の帯域で、この部分に生じる各部変位の振巾特性の極値が全帯域での最大値となり、その後の帯域に生じる極値はこれに比べるとかなり小さく問題にならない。また、地動の振動数が大きくなると極値は次第に小さくなって 1 に近づく。

3. 基礎固定の場合には、仮の共振点  $a_0/\lambda=1$  のところで共振状態が起こり振巾特性は無限大となるが、地盤との連成により共振振動数は  $a_0/\lambda < 1$  の部分に移って連成系の固有周期がのびるとともに、地盤の減衰作用により共振振巾は有限になる。 $\lambda$  が小、すなわち構造物の剛性が地盤に比べて相対的に低くなると基礎固定の状態に近づき、逆に高くなると共振振巾が小さくなり、連成系の固有周期がのびて剛体の場合の動特性に近づくので地盤の影響をうけやすいといえる。

4. 基礎変位と頂部変位の間の位相特性は、図に現われている振動数域では、 $\theta_0$  または  $\theta_B$  が  $\pi$  になる最初の  $K=0$  の点までは同位相、それ以上の帯域では逆位相である。振巾特性に最初の極値が生じる振動数比の近傍では位相特性の変化が激しく、この共振振動数の近傍で地動変位との間の位相特性は  $\pi/2$  になる。

5. 構造物の断面積を一定にし断面形のみを変えたときには、各特性とも著しい差はみられないが、振動方向に断面を細長くしていくと共振振巾がやや小さくなり、共振振動数がわずかに高い方へ移ることが認められる。

### 4.2 並進に基礎の回転が伴う場合

#### 4.2.1 剛 体

基礎および重心の変位の振巾特性  $U_B/U_G$ ,  $U_T/U_G$ , 基礎回転角の振巾特性  $l_0\phi/U_G$  およびそれら各変位の位相特性  $\theta_B$ ,  $\theta_T$ ,  $\theta_R$  を Figs. 24~29 に示す。剛体は正方形断面をもつとし、剛体と地盤の密度比は 0.2、振動数無次元量  $a_0$  を横軸に、剛体の高さとの比  $l_0/b$  をパラメータにとっている。解析結果を要約すれば、

1. 基礎の回転を考慮に入れたことにより振巾特性には 2 つの極値が生じている。そして振動数比の小さい方の最初の極値が圧倒的に大きい。

2. 並進のみの場合に比べれば、重心変位はもちろん基礎変位の振巾特性の最大値もかなり大きくなっており、一方共振振動数は小さい方へ移って連成系の固有周期は大巾にのびることがわかる。そして構造物が

高くなるほどそれらの変化の割合は著しい。

3. 重心変位と基礎回転角の各特性が似ていること、さらにこの2つに比べて基礎の振巾特性は非常に小さいことから、剛体の振動においては **rolling** による変形が主要な役割を果しており、構造物が高くなるほど **rolling** による変形の占める割合は大きくなっている。

4. 基礎および重心の変位の位相特性は鋭い **peak** をもつ曲線となって、それら相互間の位相特性は並進のみの場合の同位相または逆位相というような単純な関係ではなくなる。しかし、振巾特性に最大値を生じる共振振動数の近傍でともに地動変位に対して  $\pi/2$  となり、この付近では位相特性の変化が激しいという関係は保持されている。

#### 4.2.2 連続体

基礎および頂部変位、基礎回転角の振巾特性  $U_B/U_G$ ,  $U_T/U_G$ ,  $l_0\Phi/U_G$  およびそれらの地動変位との間の位相特性  $\theta_B$ ,  $\theta_T$ ,  $\theta_R$  について、剪断型連続体の場合を **Figs. 30~35** に、曲げ型連続体の場合を **Figs. 36~41** に示す。連続体は正方形断面で高さとの比は2、連続体と地盤の密度比は0.2とし、基礎固定の場合の構造物の固有振動数無次元量  $\lambda$  をパラメータに、地動の振動数と基礎固定の場合の構造物の基本固有振動数との比  $a_0/\lambda$  を横軸にとっている。解析結果を要約すれば、

1. これら2つの振動形態が振動数域のちがいを除けば、非常によく似た動特性を示すことは、並進のみの場合と同様である。また動特性の全般的傾向は剛体の **rocking** 振動の場合とも類似している。

2. 並進のみの場合と比べれば、共振振動数は基礎固定の状態からいっそう低い方へ移り、連成系の固有周期はさらにのびている。そして、こののび方の程度は地盤の剛性が構造物に比べて相対的に小さくなるほど著しい。さらに、基礎が不動点になるという所謂 **dynamic absorber** にみられる状態はもはや存在せず、それに近い状態に変わっている。

3.  $\lambda$  が小、いいかえると構造物の剛性が地盤に比べて相対的に低くなると、剪断あるいは曲げ変形の占める比率が大きくなって、並進のみの場合の動特性に近づき、逆に高くなると **rolling** による変形の占める比率が大きくなって、剛体の **rocking** 振動の場合の動特性に近づく。

最後に振巾特性に最大値を生じる共振振動数について考察する。この共振振動数の各種パラメータによる変化は、近似的に連成系の基本固有振動数の傾向を表わしているものと考えることができる。**Fig. 42** は正方形断面の構造物について、基礎固定の状態に比べて連成系の基本固有周期が構造物の高さと巾の比によってどの程度のびるかを、また **Fig. 43** は、同じく構造物と地盤内を伝わるS波の速度比、いいかえると剛性比と密度比が変わったときののび率を示したものである。これらのグラフから次のことがわかる。

1. 密度比および剛性比が一定の構造物で振巾方向の巾に対する高さの比が大きくなれば、曲げ型では基礎固定の状態に近づくが、剪断型では逆に固有周期比がのびて地盤の影響が大きく現われる。しかし並進のみの場合には剪断型でも曲げ型でも前者の場合と同様な右下がりの傾向を示す。巾と高さの比が小さくなれば、相対的に構造物と地盤との接触面積が増して地盤の影響が顕著になり、周期比が大きくなるためと考えられる。そして、基礎の回転を考慮したときに曲げと剪断でこの傾向が逆になるのは、曲げ型にあっては本来回転変形の要素が入っており、また軸方向の伸縮によってもエネルギーが貯えられるのに対し、剪断型では回転変形は基礎部分にしか起りえないため、**rolling** による影響は剪断型でより顕著に現われて、並進のみの場合の傾向を上まわったのであろう。

2. 構造物の形状を変えないで地盤に比べて相対的に剛性を大きくすれば、また逆に密度を小さくすれば、基礎固定の状態に比べて連成系の固有周期がのびる。そののび率は曲げ型よりも剪断型の方が著しいが、この差は剪断型の振動により大きな効果を与える **rolling** による影響と考えられる。

#### 5. む す び

半無限弾性地盤の伝達関数を表わす **Ground Compliance** を地盤の等価バネ剛性として与え、弾性地盤上の4種の理想化された構造物——剛体、1質点系、剪断型連続体および曲げ型連続体——の動特性について

解析的表現を求め、いくつかの場合の数値計算を行なった。解析は並進のみの場合と並進に基礎の回転が伴う場合の2つに分けて行ない、構造物に及ぼす地盤の効果をみるために、結果は基礎固定の状態を基準にした尺度で統一して整理した。

(1) 並進のみの場合も基礎の回転が伴う場合も、ともに振動数域のちがいを除けば、4種の構造物の動特性の全般的傾向は似ている。

(2) 地盤との相対的な関係で、構造物の剛性が高いほどまた密度あるいは自重が小さいほど地盤の及ぼす効果は大きい。

(3) 基礎の回転による rolling の影響は、構造物の振動方向の巾と高さの比が大きいほど著しく、曲げ型より剪断型の振動により顕著に現われる。

等の一般的結論の他にも種々興味ある現象が得られた。

既往の研究で部分的に解析されている円形断面の構造物との比較については、円形と正方形の場合を断面積一定の関係で換算すると、垂直・水平・回転の各振動形態に対する Ground Compliance の値がほぼ一致するので、連成系の動特性にはほとんど差がみられない。さらに長方形断面になった場合、少なくとも連成系の固有周期に関しては断面積一定で換算すれば、円形あるいは正方形の場合の解析結果が、ごくわずかの修正によってほとんどそのまま適用できるのではないと思われる。

動特性の解析的表現はこのような地盤と構造物の連成系の伝達特性を表わすので、Ground Compliance が関数形で与えられれば、任意の地動に対する連成系の地震応答を求めることが可能なのである。地盤条件が異なっても複素数として得られる Ground Compliance の一般的な表現式は変わらないので、本研究で得られた連成系の動特性の解析的表現はそのまま成立つ。層をなす地盤、dissipative な減衰機構をもつ地盤等の動特性を Ground Compliance の形で求めて、このような地盤と各種構造物との連成系の動特性を解析し、さらに、ここで得られた結果をも含めて連成系の非定常な地震応答解析を行ない、地盤の影響を含む構造物の耐震性を明らかにする研究は今後の興味ある課題と考える。

なお数値計算には、京都大学のデジタル電子計算機“KDC-I”および“KDC-II”ならびに UNICON SYSTEM による日本IBMデータセンターのデジタル電子計算機“IBM 7090”を使用した。

最後に、本研究の一部は建築学教室博士課程学生・日下部馨氏により計算された結果であること、本稿の作成にあたっては彼の多大の協力を得たことを報告して感謝の意を表します。

## APPENDIX (剛体に直接強制力が作用する場合の動特性について)

### A.1 動特性の解析的表現

質量(並進振動の場合)あるいは慣性モーメント(回転振動の場合)が  $m_j$  の剛体に、 $\mathbf{F}_j e^{i\omega t}$  なる強制力が直接作用するときの運動方程式は、

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{u}_0}{dt^2} + P_j e^{i\omega t} = \mathbf{F}_j e^{i\omega t} \quad \text{..... (A.1)}$$

Ground Compliance を使ってかきなおすと (2.10) 式より、

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{u}_0}{dt^2} + \frac{\mathbf{u}_0}{G_j} = \mathbf{F}_j e^{i\omega t} \quad \text{..... (A.2)}$$

ここで  $\mathbf{u}_0 = u_0 e^{i\omega t}$ ,  $\mathbf{F}_j = F_j e^{i\theta_j}$  とおけば、

$$\begin{aligned} u_0 e^{-i\theta_j} &= \frac{F_j}{1/G_j - m_j \omega^2} = l_j \frac{F_j}{c\mu} \cdot \frac{f_{1j} + i f_{2j}}{[1 - (l_j m_j \omega^2 / c\mu) f_{1j} - i (l_j m_j \omega^2 / c\mu) f_{2j}]} \\ &= l_j \frac{F_j}{c\mu} \cdot \frac{[f_{1j} - k_j a_0^2 (f_{1j}^2 + f_{2j}^2)] + i f_{2j}}{(1 - k_j a_0^2 f_{1j}^2)^2 + (k_j a_0^2 f_{2j}^2)^2} \quad \text{..... (A.3)} \end{aligned}$$

$$\text{ここに、} \quad k_j = l_j \frac{m_j}{\rho b^2 c}; \text{質量比,} \quad a_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} b; \text{振動数無次元量} \quad \text{..... (A.4)}$$

上式より、

$$u_0 = A_j = l_j \frac{F_j}{c\mu} \sqrt{\frac{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}{(1 - k_j a_0^2 f_{1j}^2)^2 + (k_j a_0^2 f_{2j}^2)^2}} \quad \text{..... (A.5)}$$

$$\theta_j = \tan^{-1} \left[ \frac{-f_{2j}}{f_{1j} - k_j a_0^2 (f_{1j}^2 + f_{2j}^2)} \right] \dots\dots\dots (A.6)$$

$$L_j = \frac{l_j F_j^2}{2bc\sqrt{\rho\mu}} \cdot \frac{-a_0 f_{2j}}{(1 - k_j a_0^2 f_{1j}^2)^2 + (k_j a_0^2 f_{2j}^2)^2} \dots\dots\dots (A.7)$$

ここに  $A_j$  は振巾特性を,  $\theta_j$  は強制力  $F_j e^{i\omega t}$  と  $u_0$  の間の位相特性を,  $L_j$  は基礎から地盤に伝達される伝達エネルギー特性を表わす。

さて  $k_j$  をパラメータにしたときの  $A_j - a_0$  および  $L_j - a_0$  曲線の包絡線は,  $A_j$  と  $\partial A_j / \partial k_j = 0$  あるいは  $L_j$  と  $\partial L_j / \partial k_j = 0$  から  $k_j$  を消去すると得られるから, まず  $\partial A_j / \partial k_j = 0$  あるいは  $\partial L_j / \partial k_j = 0$  とおけば,

$$f_{1j} - k_j a_0^2 (f_{1j}^2 + f_{2j}^2) = 0 \dots\dots\dots (A.8)$$

この式は位相特性  $\theta_j = \pi/2$  という条件を示す。すなわち,  $A_j - a_0$  および  $L_j - a_0$  曲線は  $\theta_j = \pi/2$  のときにその包絡線に接するという関係を得る。このときの振動数  $a_0$  は  $A_j$  および  $L_j$  が最大値になるときの振動数に非常に近い。包絡線を  $A_{jE}$  および  $L_{jE}$  で表わすと (A.5), (A.7) および (A.8) 式から  $k_j$  を消去して,

$$A_{jE} = l_j \frac{F_j}{c\mu} \cdot \frac{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}{|f_{2j}|}, \quad L_{jE} = - \frac{l_j F_j^2}{2bc\sqrt{\rho\mu}} \cdot \frac{a_0 (f_{1j}^2 + f_{2j}^2)}{f_{2j}} \dots\dots\dots (A.9)$$

最後に以上の諸式を無次元表示になおしておく。

$$\tilde{A}_j = \frac{c\mu}{l_j F_j} A_j = \sqrt{\frac{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}{(1 - k_j a_0^2 f_{1j}^2)^2 + (k_j a_0^2 f_{2j}^2)^2}} \dots\dots\dots (A.10)$$

$$\tilde{L}_j = \frac{2bc\sqrt{\rho\mu}}{l_j F_j^2} L_j = \frac{-a_0 f_{2j}}{(1 - k_j a_0^2 f_{1j}^2)^2 + (k_j a_0^2 f_{2j}^2)^2} \dots\dots\dots (A.11)$$

$$\tilde{A}_{jE} = \frac{c\mu}{l_j F_j} A_{jE} = \frac{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}{|f_{2j}|} \dots\dots\dots (A.12)$$

$$\tilde{L}_{jE} = \frac{2bc\sqrt{\rho\mu}}{l_j F_j^2} L_{jE} = - a_0 \frac{f_{1j}^2 + f_{2j}^2}{f_{2j}} \dots\dots\dots (A.13)$$

## A.2 数値計算結果とその考察

ここでは3種の振動形態のうち代表的に垂直振動の場合のみ計算結果を示す。正方形断面をもつ剛体の振巾特性  $A_v$ , 強制力に対する位相特性  $\theta_v$  および伝達エネルギー特性  $L_v$  を Figs. 44~46 に示す。横軸に振動数無次元量  $a_0$  を, パラメータには剛体と地盤の質量比  $k_j$  をとっている。また, 一定断面積で断面の形状のみ変えた場合を Figs. 47~49 に示す。

解析結果を要約すれば,

1. 垂直, 水平, 回転の各振動形態に対して動特性は同一の式で表示され, また地盤の等価バネ剛性にあたる Ground Compliance の全体的傾向も変わらないので, 動特性のグラフは似た形をとる。

2. 4.1.1の要約1に記したと同様のことがここでもそのまま成立つ。

3. 振巾特性は peak をもつ曲線となって共振振動数が存在するが, 地盤の減衰作用により共振振巾は有限となる。質量比が大, いいかえると剛体の自重が地盤に比べて相対的に重くなれば共振振動数は低くなり, 共振振巾も位相特性もともに大きくなる。

4. 伝達エネルギー特性も振巾特性の共振時の近傍で最大値をとり, とともにそれに近い振動数のとき包絡線に接する。

5. 低振動数域では強制力と同位相に近く, 高振動数域では逆位相に近い状態で振動する。振巾特性と伝達エネルギー特性が同時に包絡線に接するとき, すなわちともに最大値に近い振動数で位相特性は  $\pi/2$  に等しくなり, 強制力の大きさが最大(最小)になるとき剛体の変形は最小(最大)になるという相互関係が成立つ。

6. 質量比と断面積を一定にして断面の形状のみを変えたとき, 位相特性と共振振動数にはあまり差はみられないが, 振巾特性は細長い断面のもののほど大きく, この振巾を生じるために強制力のエネルギーが費さ



れた結果、逆に地盤へ逸散する伝達エネルギー特性は小さくなっている。同じ重さで同じ断面積の剛体のときには、細長いものより正方形断面に近い方がエネルギーの逸散が多く振巾が小さくなって有利なことがわかる。

### 参 考 文 献

- 1) Lamb, H. : On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 203, Series A, 1904, pp. 1~42.
- 2) Reissner, E. : Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraums, Ingenieur-Archiv, Vol. VII, 1936, pp. 381~396.
- 3) Sung, T. Y. : Vibrations in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loading, ASTM Symposium on Dynamic Testing of Solids, ASTM Special Tech. Publ., No. 156, 1953, pp. 35~63.
- 4) 鳥海勲：弾性地盤上の機械基礎強制振動の計算，地震（地震学会），第2輯，第7巻，第4号，1955，pp. 216~225.
- 5) Arnold, R. N., Bycroft, G.N. and Warburton, G. B. : Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Body, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, Sept., 1955, pp. 391~400.
- 6) 佐藤泰夫，山口林造：弾性地盤上に建つ建築物の振動，地震（地震学会），第2輯，第9巻，第3号，1957，pp. 156~173.
- 7) 佐藤泰夫，山口林造：構造物の剪断振動と弾性地盤の相互作用，地震（地震学会），第2輯，第13巻，第3号，1960，pp. 127~140.
- 8) Thomson, W. T. : A Survey of the Coupled Ground-Building Vibration, Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering, 1960, pp. 833~847.
- 9) Kobori, T. : Dynamical Response of Rectangular Foundations on an Elastic-Space, 地震工学国内シンポジウム講演集，1962，pp. 81~86.
- 10) 小堀鐸二，井上豊，鈴木有：弾性地盤上の矩形基礎の Ground Compliance, 日本建築学会論文報告集，第89号，昭38. 9, p194.
- 11) 小堀鐸二，南井良一郎，鈴木有：弾性基礎地盤の動的応答，日本建築学会近畿支部研究報告集，昭39. 2, pp. 1~7.
- 12) 小堀鐸二，南井良一郎，鈴木有，日下部馨：弾性地盤上の矩形基礎の Ground Compliance（ロッキングの場合），日本建築学会論文報告集，号外，昭40. 9, p123.
- 13) 小堀鐸二，南井良一郎，井上豊：矩形基礎の Ground Compliance とその Simulation について，京都大学防災研究所年報，第7号，昭和39. 3, pp. 164~178.
- 14) 小堀鐸二，南井良一郎，井上豊：Ground Compliance を考慮した構造物の地震応答，京都大学防災研究所年報，第7号，昭39. 3, pp. 179~194.
- 15) 小堀鐸二，南井良一郎，井上豊：Ground Compliance を考慮した構造物の地震応答（第2報），京都大学防災研究所年報，第8号，昭40. 3, pp. 193~218.
- 16) 小堀鐸二，南井良一郎，鈴木有：弾性地盤上の架構の動的応答，日本建築学会論文報告集，第89号，昭38. 9, p193.
- 17) 小堀鐸二，南井良一郎，鈴木有，日下部馨：弾性地盤上の構造物の振動特性，日本建築学会論文報告集，号外，昭40. 9, p124.
- 18) 小堀鐸二，南井良一郎，鈴木有，日下部馨：矩形基礎のロッキングを含む振動について，日本建築学会近畿支部研究報告集，昭40. 5, pp. 137~140.

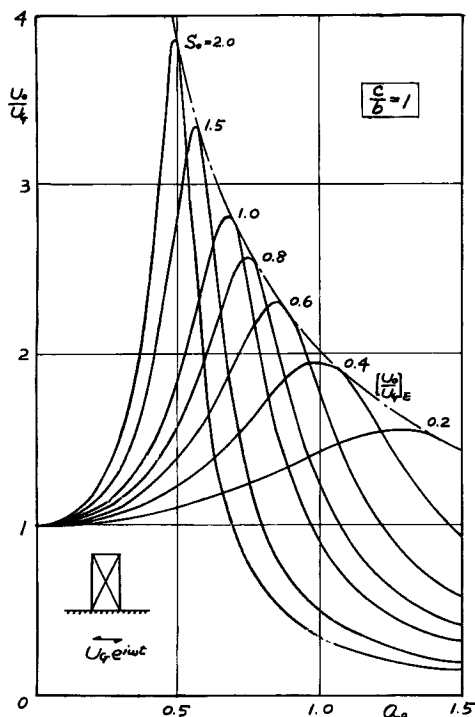


Fig. 10 Amplitude characteristic of translational displacement.

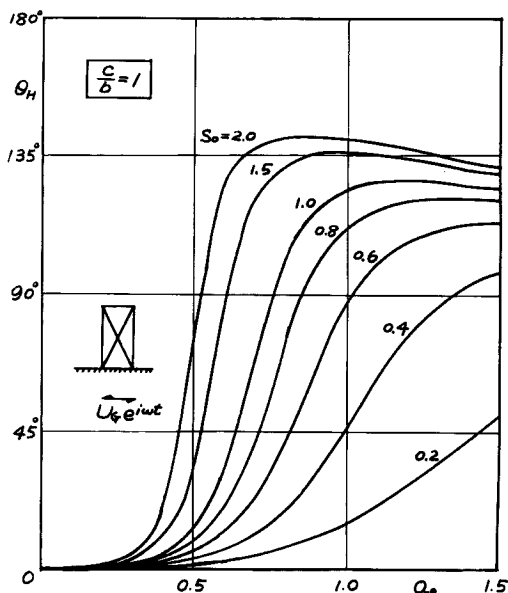
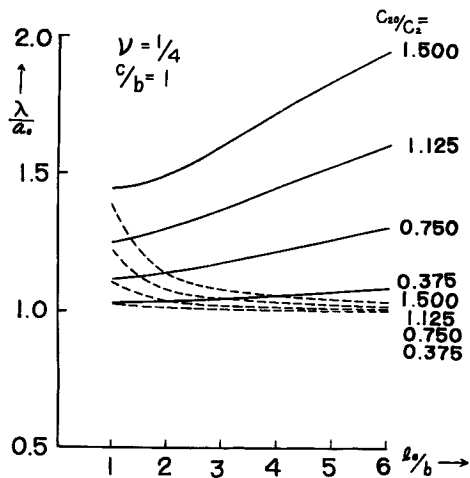


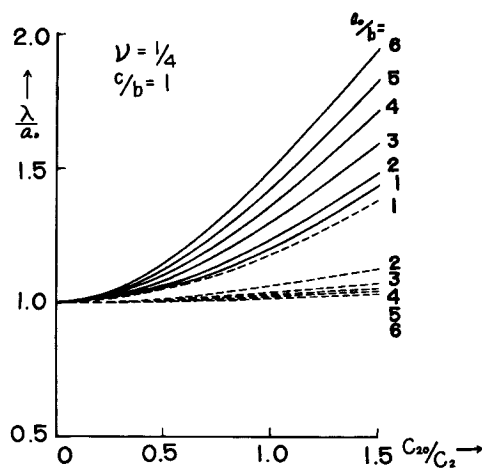
Fig. 11 Phase characteristic of translational displacement.

#### Horizontal translation of a rigid body.



— SHEAR-ROCKING VIBRATION  
- - - BEND-ROCKING VIBRATION

Fig. 48



— SHEAR-ROCKING VIBRATION  
- - - BEND-ROCKING VIBRATION

Fig. 49

Elongation of fundamental period for rocking in comparison with the case of rigid foundation.

Horizontal translation of a one mass-spring system.

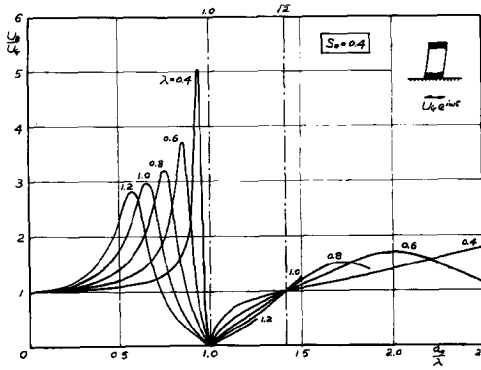


Fig. 12

Horizontal translation of a continuous body. (shearing type)

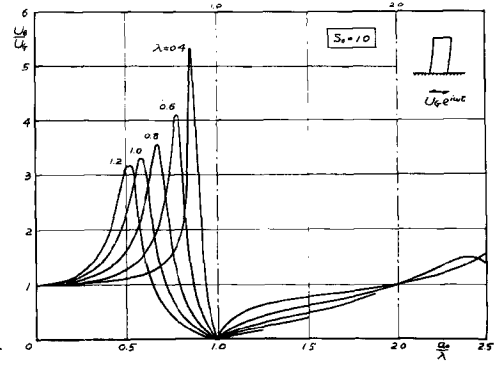


Fig. 15

Amplitude characteristics of translational displacement at the foundation.

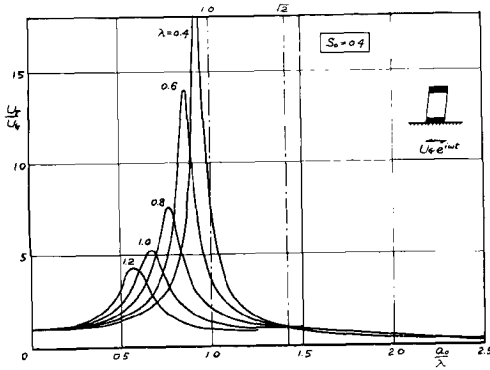


Fig. 13

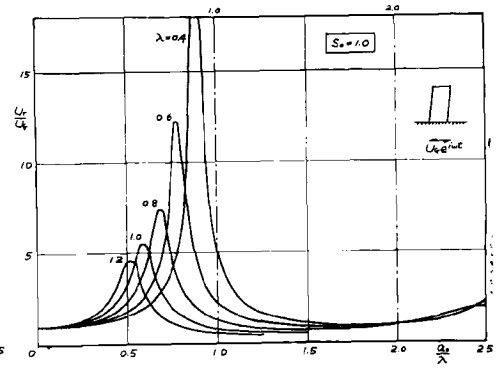


Fig. 16

Amplitude characteristics of translational displacement at the top of structure.

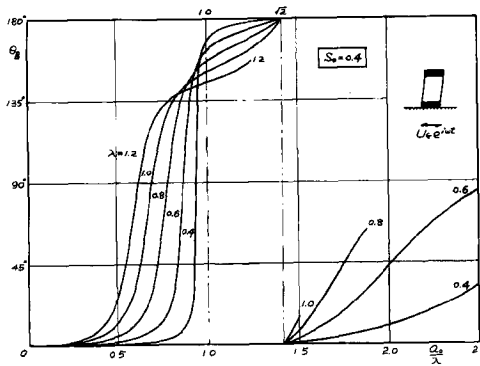


Fig. 14

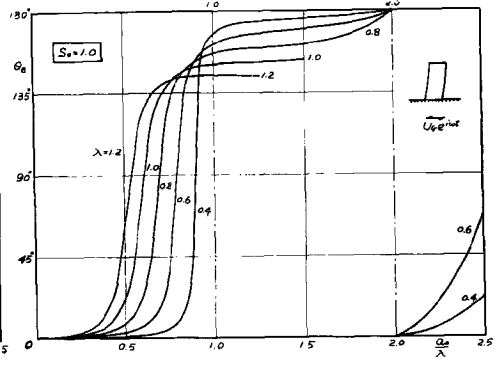


Fig. 17

Phase characteristics of translational displacement at the foundation.

Horizontal translation of a continuous body. (bending type)

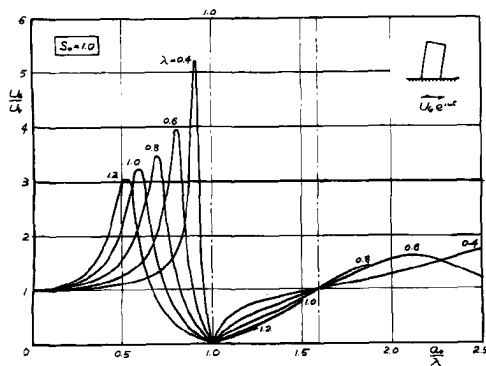


Fig. 18

Amplitude characteristics of translational displacement at the foundation.

Horizontal translation of a continuous body. (shearing type)

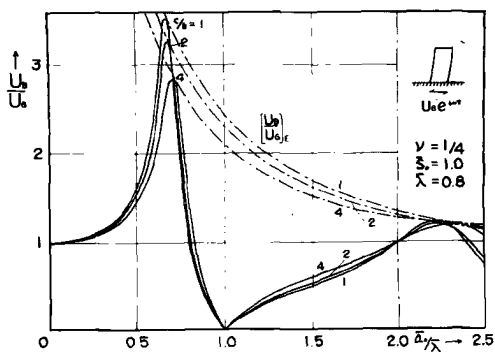


Fig. 21

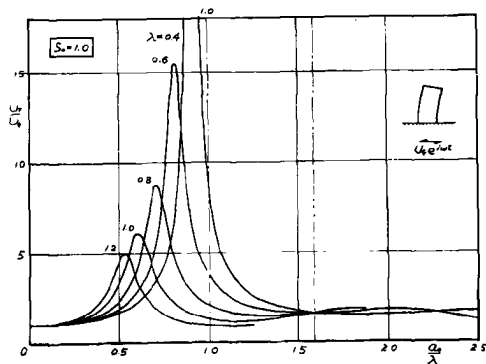


Fig. 19

Amplitude characteristics of translational displacement at the top of structure.

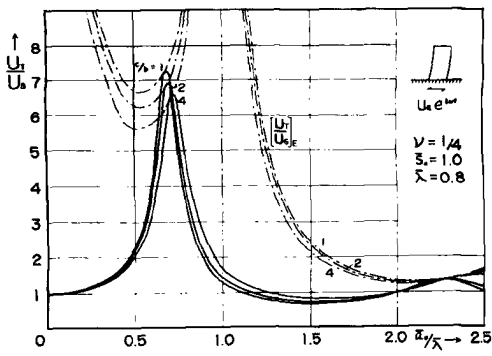


Fig. 22

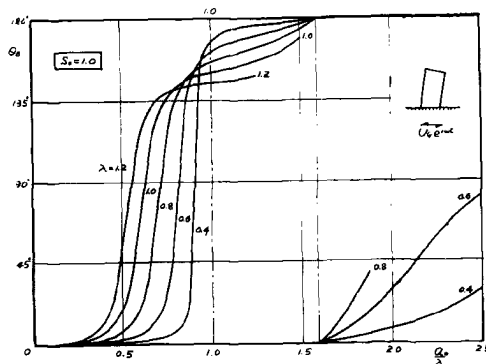


Fig. 20

Phase characteristics of translational displacement at the foundation.

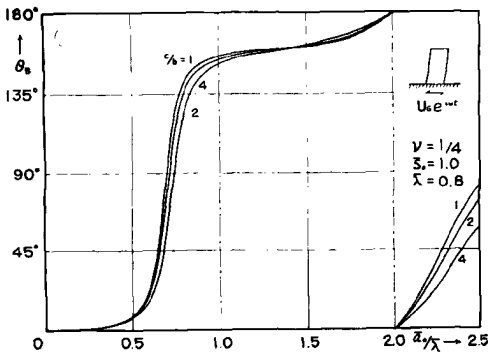


Fig. 23

# Rocking of a rigid body.

Amplitude characteristics.

Phase characteristics.

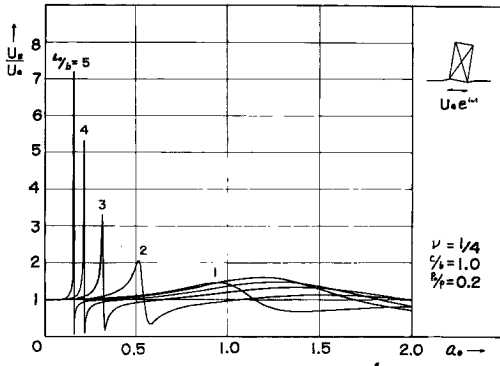


Fig. 24

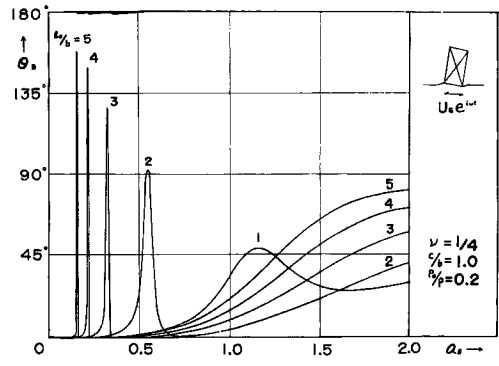


Fig. 27

Translational displacement at the foundation.

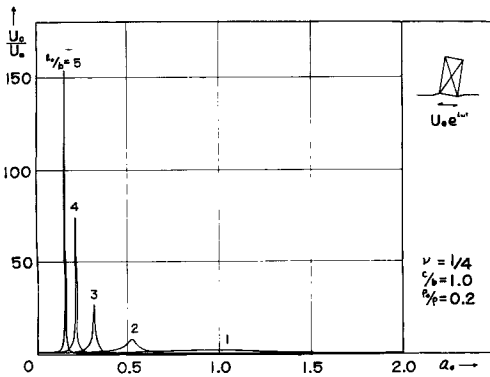


Fig. 25

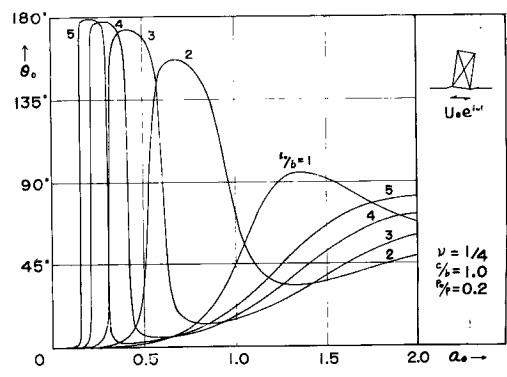


Fig. 28

Translational displacement at the gravitational center.

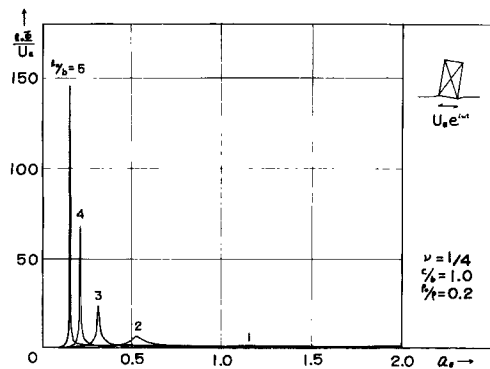


Fig. 26

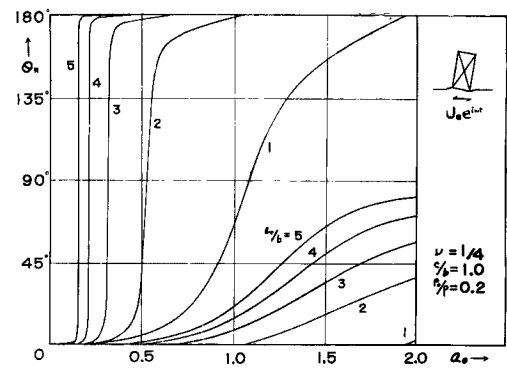


Fig. 29

Rotational displacement at the foundation.

## Rocking of a continuous body. (shearing type)

Amplitude characteristics.

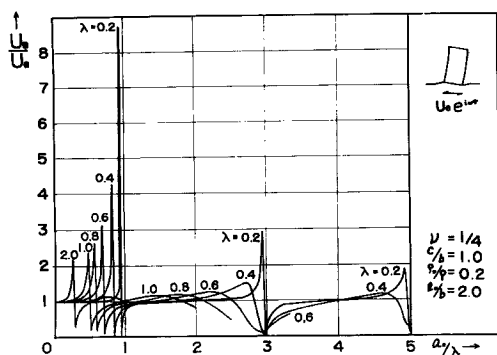


Fig. 30

Phase characteristics.

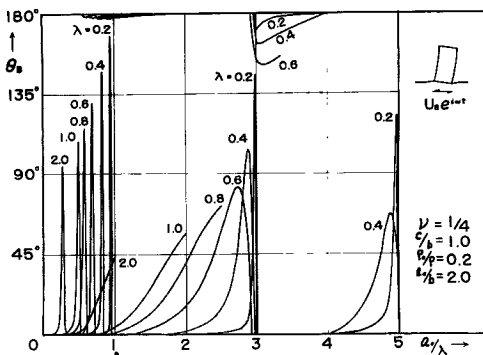


Fig. 33

Translational displacement at the foundation.

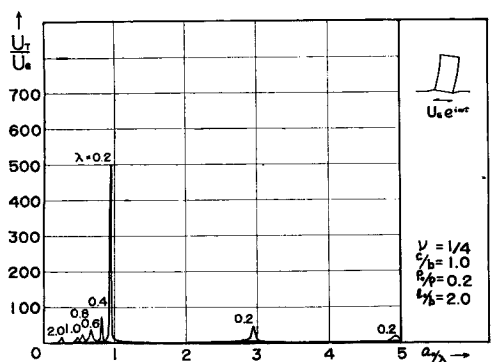


Fig. 31

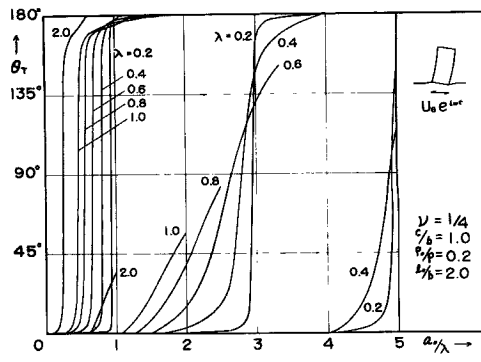


Fig. 34

Translational displacement at the top of structure.

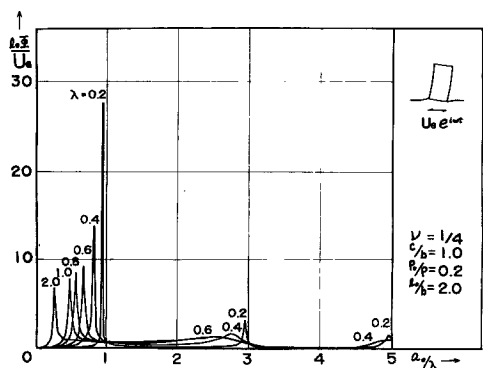


Fig. 32

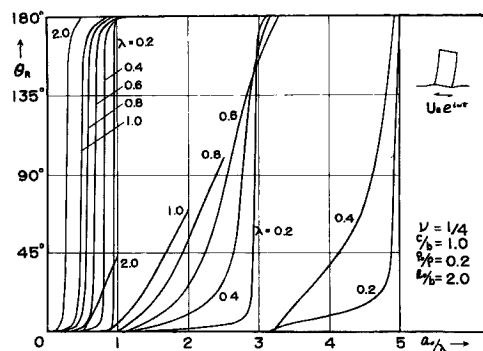


Fig. 35

Rotational displacement at the foundation.

Rocking of a continuous body. (bending type)

Amplitude characteristics.

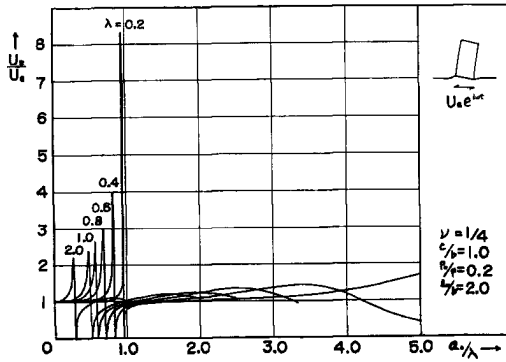


Fig. 36

Phase characteristics.

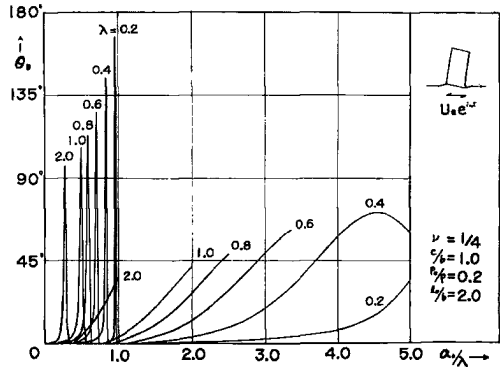


Fig. 39

Translational displacement at the foundation.

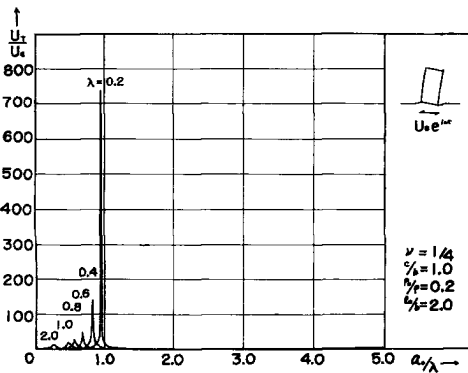


Fig. 37

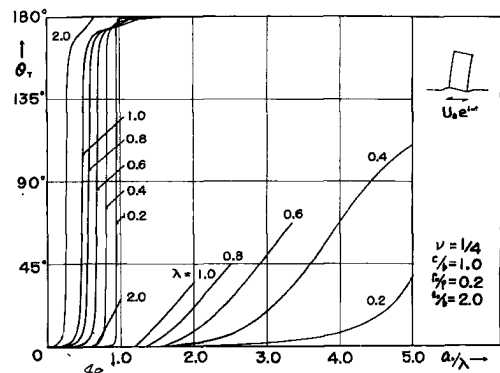


Fig. 40

Translational displacement at the top of structure.

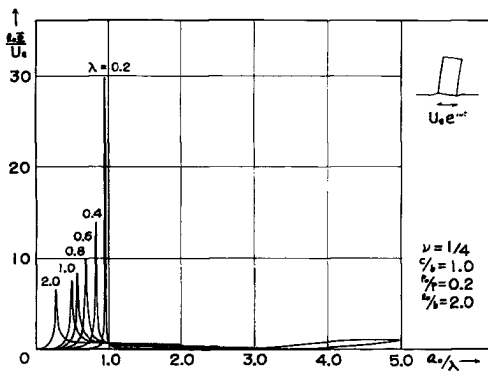


Fig. 38

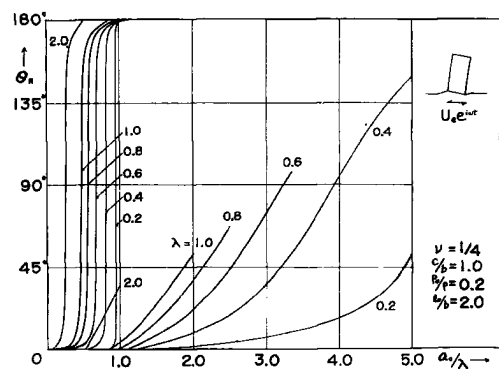


Fig. 41

Rotational displacement at the foundation.

## Vertical translation of a rigid body by a disturbing force.

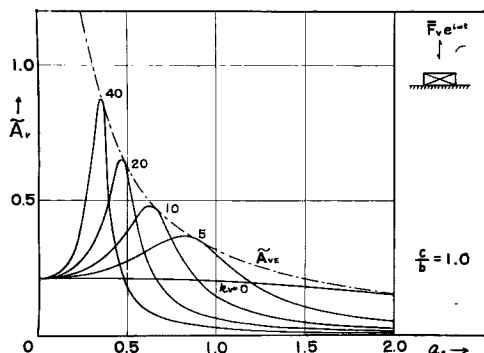


Fig. 42

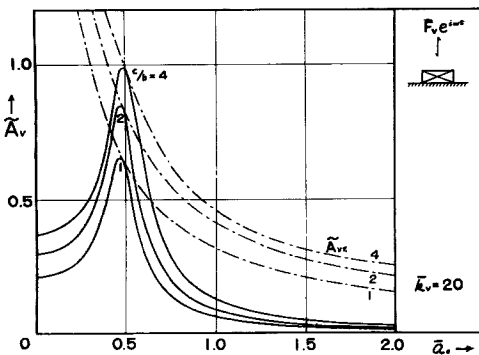


Fig. 45

Amplitude characteristics of translational displacement.

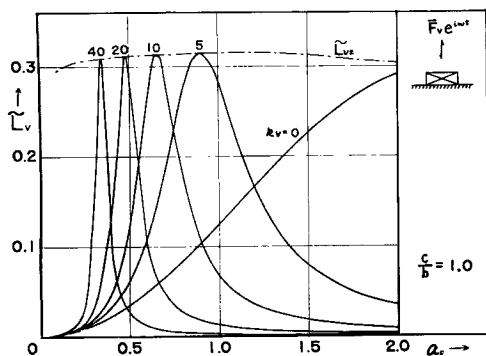


Fig. 43

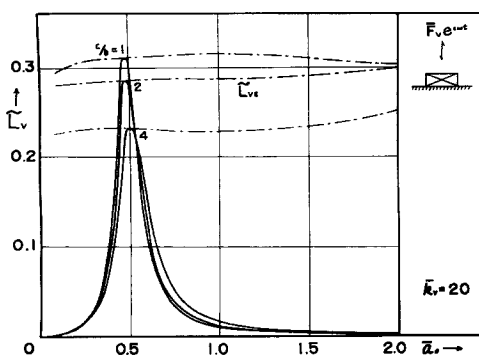


Fig. 46

Phase characteristics of translational displacement.

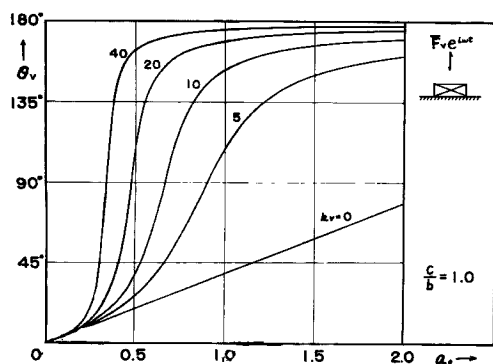


Fig. 44

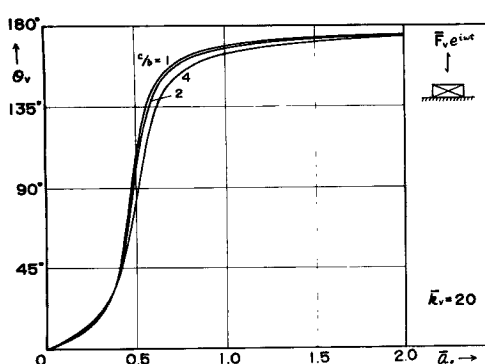


Fig. 47

Transmitted energy characteristics.