

有限状態逐次決定過程とその決定問題

京大・工学部 茨木 俊 秀

1. まえがき

いわゆる最適化問題 (Optimization Problem) は、各分野で、さまざまの形で研究されてゐる。しかし、とくに問題が離散的あるいは組合せ問題的な性格をもつとき、その Formulation 及び解法に関する統一的な扱いは難しく、問題個別の議論に終始せざるを得ないのが現状のようである。

こゝでは、そのような最適化問題の多くが (有限状態) 逐次決定過程の形式に記述できる [2] ことに着目し、動的計画法 (Dynamic Programming) [1] の適用可能性及び可解性の立場から、逐次決定過程の種々のクラスを提案し、その統一的な把握を試みる。逐次決定過程の各クラスに対し、表現し得る最適化問題の範囲は異なり、また、その解法 (最適方策を求める) の難易度も変化する。これは、ある意味で対応する最適化問題の Complexity の階層を示しているとも解釈することができる。この点を明らかにするため、

以下、2種の表現定理を逐次決定過程の各クラスについて議論し、同時に、その可解性（最適方策を求めるアルゴリズムの存在）を調べる。また、状態数の最小化ゆえに関連した各種決定問題についても議論する。この種の決定問題のあるものは決定可能であるが、多くは決定不可能となる。なお、紙面の都合上、証明はすべて省略し、結果のみを記す。

2. 定義

最適化問題はすべて離散的決定過程 (ddp) の形式に書かれると考える。ddp $\mathcal{I}$ は $\mathcal{I} = (\Sigma, \delta, f)$ である。ただし、 Σ は基本的決定の有限集合、 Σ^* は Σ の要素を連接 (Concatenate) して得られる方策 (Policy) の全体とする。とくに $\varepsilon \in \Sigma^*$ は空系列である。 $\delta \subset \Sigma^*$ は許容方策 (Feasible Policies) の集合、 $f: \delta \rightarrow E$ (E は実数の集合) は各方策のコストを与える関数である。 $x \in \delta$ が $(\forall y \in \delta)(f(x) \leq f(y))$ を満たすとき $\mathcal{I}$ の最適方策 (Optimal Policy) といいその全体を $O(\mathcal{I})$ と記す。また、 f が $\Sigma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ は整数の集合) で δ を 正規集合 Domain としてもつ部分帰納的関数であるとき、 $\mathcal{I}$ は帰納的 ddp (r-ddp) であるという。

有限オートマトン (fa) はシステム $M = (Q, \Sigma, q_0, \lambda, Q_F)$ である。ただし、 Q は状態の有限集合、 Σ は有限アルファベット、

$q_0 \in Q$ は初期状態, $\lambda: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ は状態遷移関数, $Q_F \subset Q$ は最終状態の集合である. λ は $\varepsilon, x, y \in \Sigma^*$ に対し $\lambda(q, \varepsilon) = q$, $\lambda(q, xy) = \lambda(\lambda(q, x), y)$ とあることにより $\lambda: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ と考えることが出来る. また, $F(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \bar{\lambda}(x) \in Q_F\}$, $\bar{\lambda}(x) = \lambda(q_0, x)$, とある.

さて, 逐次決定過程 (sdp) はシステム $\Pi = (M, h, q_0)$ である. ただし, M は fa , $h: E \times Q \times \Sigma \rightarrow E$ はコスト関数, $q_0 \in E$ は初期状態 q_0 のもつコストの初期値である. h は $h(z, q, \varepsilon) = z$; $(\forall x, y \in \Sigma^*)(h(z, q, xy) = h(h(z, q, x), \lambda(q, x), y))$ により $h: E \times Q \times \Sigma^* \rightarrow E$ に拡張出来る. ことに, $\bar{h}(x) = h(z_0, q_0, x)$ と置く. Π の許容方策の集合は $F(\Pi) = F(M)$ により与えられる. 最適方策の集合は $O(\Pi) = \{x \in F(\Pi) \mid (\forall y \in F(\Pi))(\bar{h}(x) \leq \bar{h}(y))\}$ である. sdp $\Pi = (M, h, q_0)$ の $h: E \times Q \times \Sigma \rightarrow E$ の定義域 $L_\Pi = \{(\bar{h}(x), \bar{\lambda}(x), a) \mid x \in \Sigma^*, a \in \Sigma\}$ をもつ部分帰納的関数から成り, 帰納的 sdp (r-sdp) という. つまり, r-sdp π はある π の方策 $x \in \Sigma^*$ に対し π のコスト $\bar{h}(x)$ が計算可能である ($\bar{h}: \Sigma^* \rightarrow E$ は帰納的). sdp ある π は r-sdp は有限状態をもつ確定的決定過程の一般的表现形式である.

sdp π において $(\forall z_1, z_2 \in E)(\forall q \in Q)(\forall a \in \Sigma)(z_1 \geq z_2 \Rightarrow h(z_1, q, a) \geq h(z_2, q, a))$, ある π は r-sdp π において $(\forall (z_1, q, a), (z_2, q, a) \in L_\Pi)(z_1 \geq z_2 \Rightarrow h(z_1, q, a) \geq h(z_2, q, a))$ の条件を満たすこと, され

それ 単調 sdp (msdp), 単調 r-sdp (r-msdp) という。これら
 に対し、つぎのような反動的計画法の関数方程式が成立する
 [2]。すなわち、 $G(g) = \min \{ \bar{h}(x) \mid \bar{\lambda}(x) = g \in Q \}$ とするとき
 (minimumの存在を仮定),

$$G(g_0) = \min \{ z_0, \min \{ h(G(g'), g', a) \mid \lambda(g', a) = g_0 \} \}$$

$$G(g) = \min \{ h(G(g'), g', a) \mid \lambda(g', a) = g \}, \quad g \neq g_0$$

が成立する。この関数方程式が解ければ

$$\min \{ G(g) \mid g \in Q_F \}$$

が最適方針 $x \in O(\pi)$ のコスト $\bar{h}(x)$ である。このように msdp
 (あるいは r-msdp) は反動的計画法の適用できる確定的決定
 過程の一般的表現形式である。

つぎに、msdp π が $(\forall z_1, z_2 \in Z)(\forall g \in Q)(\forall a \in \Sigma)(z_1 > z_2 \Rightarrow h(z_1, g, a) > h(z_2, g, a))$, あるいは r-msdp π が $(\forall (z_1, g, a), (z_2, g, a) \in L_\pi)(z_1 > z_2 \Rightarrow h(z_1, g, a) > h(z_2, g, a))$ を満たすとき、それそれ smsdp, r-smsdp (Strictly Monotone sdp, r-sdp) という。さらに、msdp π が $(\forall z \in E)(\forall g \in Q)(\forall a \in \Sigma)(h(z, g, a) \geq z)$, あるいは r-msdp π が $(\forall (z, g, a) \in L_\pi)(h(z, g, a) \geq z)$ を満たすとき、それそれ pmsdp, r-pmsdp (Positively Monotone sdp, r-sdp) という。最後に、msdp π あるいは r-msdp π が $F(\pi)$: finite を満たすとき、それそれ lmsdp, r-lmsdp (Loop-Free msdp, r-msdp) であるという。

以上の msdp (r-msdp) の Subclasses に対し、復元するように、多くの決定問題が^{決定}可能となる。

2, ddp $\mathcal{I}$ に対し、sdp π が $O(\pi) = O(\mathcal{I})$ を満たすとき、 π は $\mathcal{I}$ を弱表現するという。 $\mathcal{I}$ を弱表現する sdp π で最小数の状態をもつものを最小弱表現という。また、 π が $F(\pi) = F(\mathcal{I})$, $(\forall x \in F(\pi)) (\bar{h}_1(x) = f(x))$ を満たすとき、 $\mathcal{I}$ の強表現であるという。 $\mathcal{I}$ を強表現する sdp π で最小数の状態をもつものを最小強表現という。 $\pi_1 = (M_1, h_1, \Sigma_1)$, $\pi_2 = (M_2, h_2, \Sigma_2)$ を sdp とする。 $O(\pi_1) = O(\pi_2)$ のとき、 π_1 と π_2 は弱等価、また、 $F(\pi_1) = F(\pi_2) \wedge (\forall x \in F(\pi_1)) (\bar{h}_1(x) = \bar{h}_2(x))$ ならば、強等価であるという。最後に、 $\Omega_{\text{sdp}} = \{O(\pi) \mid \pi: \text{sdp}\}$ とする。おなじみ、 $O(\mathcal{I}) \in \Omega_{\text{sdp}} \iff \mathcal{I}$ を弱表現する sdp π 存在。以上の概念は、sdp の他のクラスについても同様に定義できる。

3. ddp 及び msdp の例

ddp, msdp の具体例については [2] に詳しい。代表的なものとして最短経路問題、行商人問題、種々のスケジューリング問題、Cutting Stock 問題などがある。

例 3.1 $\Gamma = (N, A)$ を節点集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 枝の集合 $A = V \times V$ をもつ完全グラフとし、 d_{ij} を枝 (i, j) の長さとする。 $v_0 \in V$ に対し、節点 1 から出発し、 N_0 の各節点を訪

とも1回経由し、節集 N に至る最短経路を見出す問題を考へる。 $N_0 = \emptyset$ ならば通常の最短経路問題、 $N_0 = N$ ならば行商人問題に等しい。

さて、 $\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 $i \in \Sigma$ を“現在の節集から節集 i へ進む”という基本的決定と解釈する。この時、上の問題は $\text{ddp } \Sigma = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ に等しい。ただし、 $\mathcal{S} = \{x \in \Sigma^* \mid x = i_1 i_2 \dots i_k n \wedge \{1, i_1, \dots, i_k, n\} \supset N_0\}$, $f(x = i_1 i_2 \dots i_k n) = d_{i_1 i_1} + d_{i_1 i_2} + \dots + d_{i_k n}$ である。

つぎに Σ を強表現する $\text{sdp } \Pi$ を考へる。 $(B, i) = \{i_1 i_2 \dots i_k i \mid \{1, i_1, \dots, i_k, i\} \cap N_0 = B\}$ とする。 $\Pi = (M, h, \xi_0)$ の $M \in \mathcal{Q} = \{[B, i] \mid B \subset N_0, i \in N\}$, $\xi_0 = [\emptyset, 1]$, $\mathcal{Q}_F = \{[N_0, n]\}$,

$$\lambda([B, i], j) = \begin{cases} [B \cup j, j] & \text{if } j \in N_0 \\ [B, j] & \text{otherwise} \end{cases}$$

により与えられる。明らかに $(B, j) = \{x \mid \bar{\lambda}(x) = [B, j]\}$ であるから $F(\Pi) = \mathcal{S}$ を得る。また、 $\xi_0 = 0$, $h(\xi, [B, i], j) = \xi + d_{ij}$ とすれば、 $(\forall x \in \mathcal{S})(\bar{h}(x) = f(x))$ が成立する。よって、 Π は Σ を強表現する。また、 h の構造より、 Π は msdp である。 $\text{msdp } \Pi$ から得られる動的計画法の関数方程式は、この種の問題を解く一つのアルゴリズムを与える[3]。

4. sdp とその Subclasses に対する弱表現定理 [4]

Σ^* 上の同値関係 R が 右不変 であるとは $(\forall x, y \in \Sigma^*) (xRy \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*) (xzRyz))$ の成立することである。同値関係 R が $B \subset \Sigma^*$ を 細分 するとは, $(\forall x, y \in \Sigma^*) (xRy \Rightarrow (x \in B \Leftrightarrow y \in B))$ の成立することである。 B を細分する右不変同値関係の全体を $\Lambda(B)$ とする。 $B \subset \Sigma^*$ に対し, $R_B \in (\forall x, y \in \Sigma^*) (xR_By \Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*) (xz \in B \Leftrightarrow yz \in B))$ によって定義する。 $R_B \in \Lambda(B)$ 。 $R \in \Lambda(B)$ で $|\Sigma^*/R| < \infty$ を満たすものの全体を $\Lambda_F(B)$ と書く。 $\Lambda_F(B) \neq \emptyset \Leftrightarrow B$: 正規集合, また, 任意の $T \in \Lambda_F(B)$ に対し, $\exists M_T$ を作り $F(M_T) = B$ とあることが知られている。

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ を互いに素な $B_i \subset \Sigma^*$ の族とする。 $R \in \Lambda(\Sigma^*)$ が $\mathcal{B}$ を J-分離 するとは, $xRy \wedge x \in B_i \wedge y \in B_j \Rightarrow i=j$ の成立することである。(すなわち, R の各同値類はたかだか1個の B_i と交わる。)

定理 4.1 sdp と sdp によって弱表現される必要十分条件は, $U/R_U, U \equiv 0(X), U$ が J-分離する $T \in \Lambda_F(\Sigma^*)$ の存在することである。

$U \subset \Sigma^*$ に対し, Σ^* 上の2項関係 $\leq_U \in (\forall x, y \in \Sigma^*) (x \leq_U y \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*) (yz \in U \Rightarrow xz \in U))$ によって定義する。つぎに $R \in \Lambda(U)$ に対し, $\leq_U \in B/R, B \subset \Sigma^*$ に拡張する。すなわち

ち, $(\forall A_i, A_j \in B/R)(A_i \preceq_U A_j \iff (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x \preceq_U y))$.
 $\preceq_U$ は $\Sigma^*, \Sigma^*/R$ 上の擬順序であり, とくに $R = R_U$ の場合半順序となる. $B \subset \Sigma^*$ が U に関して単調 であるとは $(\forall x, y \in B)$
 $(x \preceq_U y \vee y \preceq_U x)$ の成立することである.

定理 4.2 $\text{ddp } \mathcal{I}$ が msdp によって弱表現される必要十分条件はつぎの条件を満たす $T \in \Lambda_F(\Sigma^*)$ の存在することである.

(i) T は $U/R_U, U \equiv O(\mathcal{I})$, を J -分離する. (ii) 全ての $C_j \in \Sigma^*/T$ は U に関して単調.

例題 4.1 $\text{ddp } \mathcal{I} = (\Sigma, S, f) \in, \Sigma = \{a, b\}, S = \{a^i b^j \mid i \geq 0, j \geq 0\}$

$$f(a^i b^j) = \begin{cases} i-j & \text{if } i > j \\ 0 & \text{if } j \geq i, \end{cases}$$

によって定義する. 明らかに, $O(\mathcal{I})(\equiv U) = \{a^i b^j \mid j \geq i\}$.

Σ^*/R_U は同値類: $A_i = \{a^i\}, i = 0, 1, \dots, B_0 = \{a^i b^j \mid j \geq i, j > 0\},$
 $B_i = \{a^k b^j \mid k-j = i, j > 0\}, i = 1, 2, \dots, D = \Sigma^* - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i - \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i,$ から成る. とくに, $U/R_U = \{A_0, B_0\}$. よって, $T \in \Lambda_F(\Sigma^*) \in$
 $\Sigma^*/T = \{C_0, C_1\}, C_0 = \{\varepsilon\}, C_1 = \Sigma^* - C_0$ によって定義すれば, T は U/R_U を J -分離する. つまり, $\mathcal{I}$ は sdp によって弱表現可能. つぎに, Σ^*/R_U 上の $\preceq_U$ を図示すると図 1 を得る. ここで, $T \in \Lambda_F(\Sigma^*) \in \Sigma^*/T = \{C_0, C_1\}, C_0 = \{a^i \mid i \geq 0\}, C_1 = \Sigma^* - C_0,$ によって定義されると (図 1 参照), T は定理 4.2 の条件を満たすから $\mathcal{I}$ は msdp によって弱表現可能.

例題 4.2 $\{a^i b^j \mid j \geq i\}$,

$\{a^i b^j \mid i=j \geq 0\} \in \Omega_{sdp}$, $\{a^i b^j \mid i \geq j\} \notin \Omega_{sdp}$, $\{a^i b^j c \mid j \geq i\}$, $\{a^i b^j c \mid i=j\}$, $\{a^i b^j c \mid i \geq j\} \in \Omega_{sdp}$, $\{a^i b^j \mid j \geq i\} \in \Omega_{msdp}$, $\{a^i b^j \mid i=j\}$, $\{a^i b^j \mid i \geq j\} \notin \Omega_{msdp}$, $\{a^i b^j c \mid j \geq i\}$, $\{a^i b^j c \mid i=j\} \in \Omega_{msdp}$, $\{a^i b^j c \mid i \geq j\} \notin \Omega_{msdp}$.

定理 4.3 $ddp \mathcal{L}$ or $smsdp$

$(pmsdp)$ により弱表現される必要十分条件は $O(\mathcal{L})$: 正規集合である。

定理 4.4 $ddp \mathcal{L}$ or $lmsdp$ により弱表現される必要十分条件は $O(\mathcal{L})$: Finite である。

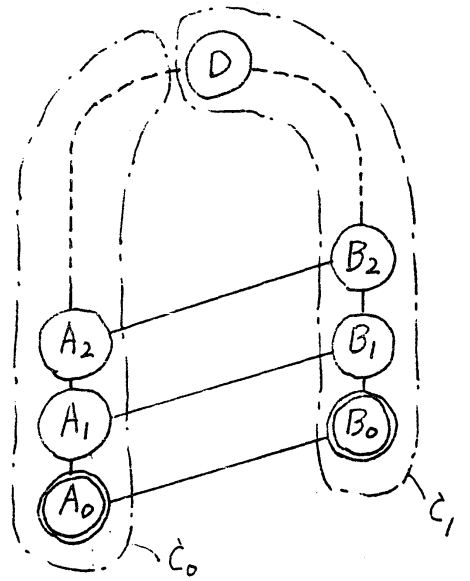


図 1. $U = \{a^i b^j \mid j \geq i\}$ に対する半順序 $\leq_U$.

5. sdp とその Subclasses に対する強表現定理

$ddp \mathcal{L} = (\Sigma, S, f)$ に対し, 同値関係 R_E を $x R_E y \Leftrightarrow x R_S y \wedge (\forall xz \in S)(f(xz) = f(yz))$ により定義する。また, $p \in E$ に対し, $\Psi_p = \{A_j \mid A_j \in S/R_E \wedge (\forall x \in A_j)(f(x) = p)\}$ とする。

定理 5.1 (2)(4) $ddp \mathcal{L} = (\Sigma, S, f)$ が sdp により強表現される必要十分条件は, 全ての $p \in E$ に対し, Ψ_p が J -分離されるような $T \in \mathcal{L}_F(S)$ の存在することである。

つぎに, $\text{ddp } \mathcal{T}$ に対し, 擬順序 $\preceq_{\mathcal{T}} \in \mathcal{X} \preceq_{\mathcal{T}} \mathcal{Y} \Leftrightarrow \mathcal{X} R_{\mathcal{T}} \mathcal{Y} \wedge (\forall xz \in \mathcal{S})(f(xz) \leq f(yz))$ によって定義する. $B \subset \Sigma^*$ が $\mathcal{T}$ に関し単調であるとは $(\forall x, y \in B)(x \preceq_{\mathcal{T}} y \vee y \preceq_{\mathcal{T}} x)$ の成立することという.

定理 5.2 [2][4] $\text{ddp } \mathcal{T} = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ が msdp によって強表現される必要十分条件は, つぎの条件を満たす $T \in \Lambda_F(\mathcal{S})$ の存在することである. (i) T は $\mathcal{A}$ の $p \in E$ に対し Ψ_p を $\mathcal{T}$ -分離する. (ii) 各 $C_j \in \Sigma^*/T$ は $\mathcal{T}$ に関し単調である.

$\text{ddp } \mathcal{T} = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ に対し, 擬順序 $\boxdot_{\mathcal{T}} \in \mathcal{X} \boxdot_{\mathcal{T}} \mathcal{Y} \Leftrightarrow \mathcal{X} R_{\mathcal{T}} \mathcal{Y} \wedge ((\forall xz \in \mathcal{S})(f(xz) < f(yz)) \vee \mathcal{X} R_{\mathcal{T}} \mathcal{Y})$ によって定義する.

$B \subset \Sigma^*$ が $\mathcal{T}$ に関し強単調であるとは, $(\forall x, y \in B)(x \boxdot_{\mathcal{T}} y \vee y \boxdot_{\mathcal{T}} x)$ の成立することという.

定理 5.3 [4] $\text{ddp } \mathcal{T} = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ が smsdp によって強表現される必要十分条件は, つぎの条件を満たす $T \in \Lambda_F(\mathcal{S})$ の存在することである. (i) T は $\mathcal{A}$ の $p \in E$ に対し Ψ_p を $\mathcal{T}$ -分離する. (ii) 各 $C_j \in \Sigma^*/T$ は $\mathcal{T}$ に関し強単調である.

$\text{ddp } \mathcal{T} = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ と $T \in \Lambda_F(\mathcal{S})$ に対し, つぎのようなグラフ $\Gamma_{\mathcal{T}; T}$ (一般には無限グラフ) を定義する. (1) 各 $A_i \in \mathcal{Y} (\equiv \Sigma^*/R_{\mathcal{T}} \wedge T)$ に対し, $\Gamma_{\mathcal{T}; T}$ に節点 A_i が存在する. (2) $\Gamma_{\mathcal{T}; T}$ はつぎの3種の枝をもつ. (a) $A_i, A_j \in \mathcal{Y}$ に対し, $A_i \neq A_j \wedge A_i T A_j \wedge A_i \preceq_{\mathcal{T}} A_j$ あるいは $A_i \neq A_j \wedge A_i, A_j \in \mathcal{S} \wedge f(A_i) < f(A_j)$

ならば (A_i, A_j) は $\Gamma_{\Sigma; T}$ のタイプ A の枝である。(b) $A_i \neq A_j$, $A_i, A_j \in \Sigma$ かつ $f(A_i) = f(A_j)$ ならば (A_i, A_j) はタイプ B の枝である。(c) $(\exists a \in \Sigma)(A_i a \subset A_j)$ ならば (A_i, A_j) はタイプ C の枝である。

$\Gamma_{\Sigma; T}$ の閉路でタイプ A の枝を含むものは I-閉路 (Inconsistent 閉路) と呼ばれる。

定理 5.4 [4] $\text{ddp } \Sigma = (\Sigma, \Sigma, f)$ が pmsdp に強表現される必要十分条件は, $\inf \{ \mu(x) \mid x \in \Sigma \} > -\infty$ であり, 次の条件を満たす $T \in \mathcal{A}_F(\Sigma)$ の存在することである。(i) T はすべての $p \in E$ に対し φ_p を J -分離する。(ii) 各 $G \in \Sigma^*/T$ は Σ に関し単調。(iii) $\Gamma_{\Sigma; T}$ は I-閉路を持たない。

定理 5.5 [4] $\text{ddp } \Sigma = (\Sigma, \Sigma, f)$ が msdp に強表現される必要十分条件は, Σ : Finite である。

6. $r\text{-sdp}$ とその Subclasses に対する弱表現定理 [5][6]

$\text{sdp}, \text{msdp}, \dots \in r\text{-sdp}, r\text{-msdp}, \dots$ とあると, §4 で述べた弱表現定理の条件も変化する。 $r\text{-sdp}, r\text{-msdp}, r\text{-pmsdp}, r\text{-lmsdp}$ に対しては, §4 の定理をそのまま拡張することができ, $r\text{-msdp}$ に対しては直接の拡張はできないことが分かっている。

定理 6.1 $r\text{-ddp } \Sigma$ が $r\text{-sdp}$ によって弱表現される必要十分条件は, $\cup, R_\cup, \cup \equiv \cap(I)$, Σ を J -分離する $T \in \mathcal{A}_F(\Sigma^*)$ の存在が

ることである。

定理 6.2 $r\text{-ddp } \mathcal{I} = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ が $r\text{-msdp}$ によって弱表現される必要十分条件は $\cup (\equiv 0(\mathcal{I})) = \emptyset$ あるいはつぎの条件を満たす帰納的関数 $h: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$ の存在することである。(i) $(\forall x, y \in \Sigma^*) (xTy \wedge h(x) \leq h(y) \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*) (h(xz) \leq h(yz)))$, (ii) $(\forall x \in \cup) (h(x) = h^*) \wedge (\forall x, y \in \Sigma^*) (x \in \cup \wedge y \notin \cup \wedge xTy \Rightarrow h(x) < h(y))$ 。ただし, h^* は定数。

定理 6.3 $r\text{-ddp } \mathcal{I}$ が $r\text{-smsdp}$ ($r\text{-pmsdp}$) によって弱表現される必要十分条件は $0(\mathcal{I})$: 正規集合, である。

定理 6.4 $r\text{-ddp } \mathcal{I}$ が $r\text{-lmsdp}$ によって弱表現される必要十分条件は $0(\mathcal{I})$: Finite, である。

7. $r\text{-sdp}$ とその Subclasses に対する強表現定理 [5][6]

強表現の場合, $r\text{-sdp}$, $r\text{-smsdp}$, $r\text{-lmsdp}$ に対し 2.3.5 の結果をそのまま拡張することができ、 $r\text{-msdp}$, $r\text{-pmsdp}$ に対し 2.4 は直接の拡張はできず Tjii ことが分かっている。

定理 7.1 $r\text{-ddp } \mathcal{I} = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ が $r\text{-sdp}$ によって強表現される必要十分条件は, 全ての $p \in \mathbb{R}$ に対し 2 重 p を $\mathcal{I}$ -分離するよう $T_i \in \Lambda_F(\mathcal{S})$ の存在することである。

定理 7.2 $r\text{-ddp } \mathcal{I} = (\Sigma, \mathcal{S}, f)$ が $r\text{-msdp}$ によって強表現される必要十分条件は, つぎの条件を満たす $T \in \Lambda_F(\mathcal{S})$ 及び帰納的

関数 $h': \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ の存在があることである。 (i) $(\forall x, y \in \Sigma^*)(xTy \wedge h'(x) \leq h'(y) \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*)(h'(xz) \leq h'(yz)))$, (ii) $(\forall x \in S)(h'(x) = f(x))$.

定理 7.3 $r\text{-ddp } \mathcal{L} = (\Sigma, S, f)$ が $r\text{-smsdp}$ によって強表現される必要十分条件は、つぎの条件を満たす $T \in A_F(S)$ の存在があることである。 (i) T は Σ^* の $p \in \Sigma$ に対し、 Σ_p を T -分離する。 (ii) 各 $C_i \in \Sigma^*$, T は $\mathcal{L}$ に関し強単調である。

定理 7.4 $r\text{-ddp } \mathcal{L} = (\Sigma, S, f)$ が $r\text{-pmsdp}$ によって強表現される必要十分条件は、つぎの条件を満たす $T \in A_F(S)$ 及び帰納的関数 $h': \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ の存在があることである。 (i) $(\forall x, y \in \Sigma^*)(xTy \wedge h'(x) \leq h'(y) \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*)(h'(xz) \leq h'(yz)))$. (ii) $(\forall x, z \in \Sigma^*)(h'(x) \leq h'(xz))$. (iii) $(\forall x \in S)(h'(x) = f(x))$.

定理 7.5 $r\text{-ddp } \mathcal{L} = (\Sigma, S, f)$ が $r\text{-lmsdp}$ によって強表現される必要十分条件は、 $S: \text{Finite}$, である。

8. 最適方策の集合の性質 [4][5][6]

$\Omega_{\text{sdp}}, \Omega_{\text{msdp}}, \dots$ 等と形式言語のクラスとの関係を図2に示す。ここで $\Omega_{r\text{-sdp}} = \Omega_{\text{sdp}} \cap (\text{帰納的集合のクラス})$ が成立するが、 $\Omega_{r\text{-msdp}} \subsetneq \Omega_{\text{msdp}} \cap (\text{帰納的集合のクラス})$ であることに注意して頂こう。また、 $\Omega_{\text{smsdp}} = \Omega_{\text{pmsdp}} = \Omega_{r\text{-smsdp}} = \Omega_{r\text{-pmsdp}} = (\text{正規集合のクラス})$, $\Omega_{\text{lmsdp}} = \Omega_{r\text{-lmsdp}} = (\text{有限集合のクラス})$ である。

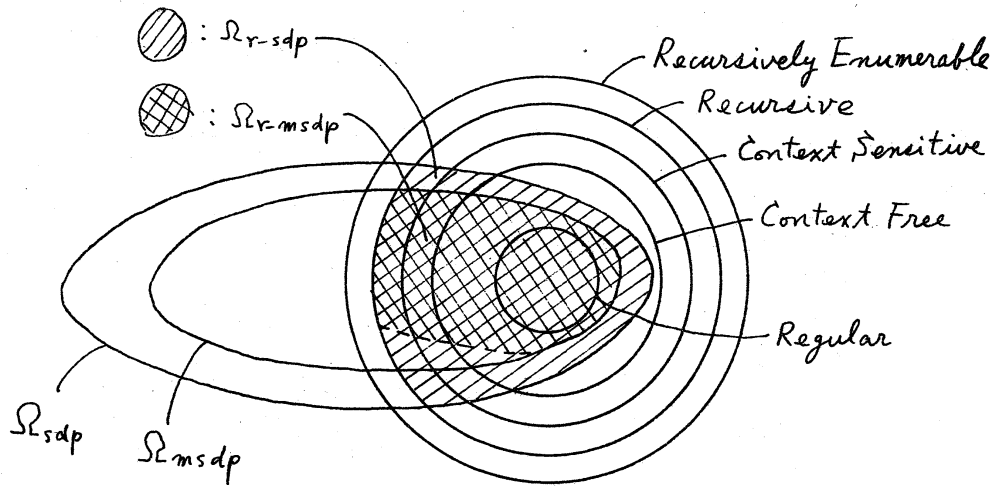


図2 最適方策の集合と形式言語のクラスとの関係

9. 最適方策決定のアルゴリズム

本節では $r\text{-sdp}$ の各クラスに対する 2 種のアルゴリズムの存在を議論する。アルゴリズム A はそのクラスの任意の $r\text{-sdp}$ π に対し $O(\pi) \neq \emptyset$ かどうかを決定し、 $O(\pi) \neq \emptyset$ ならば $x \in O(\pi)$ を少なくとも 1 個見出すもの、アルゴリズム B は $O(\pi) \neq \emptyset$ かどうかの決定の後、ある $x \in O(\pi)$ ($O(\pi)$ の正規表現) を与えるものである。アルゴリズムの存在あるものに対し、具体的アルゴリズムは 2.6 に記されている。 $rj, r0, sdp, msdp, \dots$ 等については $\bar{v}(x)$ の計算可能性が深証されているので、アルゴリズムの存在を論ずることは無意味である。

定理 9.1 [5] 任意の $n\text{-sdp}$ ($n\text{-msdp}$) Π に対する アルゴリズム A 及び アルゴリズム B はそれぞれ存在しない。

定理 9.2 [6] 任意の $n\text{-smsdp}$ ($n\text{-pmsdp}$ 或 $n\text{-lmsdp}$) Π に対し 2 アルゴリズム A , アルゴリズム B の両者が存在する。

この種のアルゴリズムを議論するとき, 文献[5]に定義された $n\text{-msdp}$ の部分クラス $n\text{-imsdp}$ (Invertible $n\text{-msdp}$) が興味深い。 $n\text{-imsdp}$ Π に対し 2 は, $O(\Pi) = \emptyset$ かどうかは決定不可能であるが, $O(\Pi) \neq \emptyset$ の仮定の下で $x \in O(\Pi)$ を求めるアルゴリズムが存在する。

実際の最適化問題に関しても, 通常, 最適方策を求めることが第一の目的である。それゆえ, 本節の結果から, 少しとも $n\text{-smsdp}$, $n\text{-pmsdp}$, $n\text{-lmsdp}$ 程度に表現し得なければ意味がないことが分かる。 $n\text{-msdp}$ に対し 2, アルゴリズム A, B が存在しないことは, 動的計画法に定式化できることと, 最適方策を計算する手段とは別物であることを示唆している。

10. 最小弱表現及び最小強表現[7]

一般に最適方策を求めるアルゴリズム (存在する場合) は, 状態数の小さい程早く収束する。この意味で最小弱 (強) 表現を求めることは実用上重要である。以下では, 最小弱 (強) 表現を求めるアルゴリズムを, 与えられた $n\text{-sdp}$ のクラスの

Π と弱(強)等価な同じクラスの最小 sdp を求めるアルゴリズムと考える。

定理 10.1 任意の $r\text{-sdp}$ ($r\text{-msdp}$) Π に対し最小弱表現を与えるアルゴリズムは存在する。

定理 10.2 任意の $r\text{-smsdp}$ ($r\text{-pmsdp}$ 或 $r\text{-lmsdp}$) Π に対し最小弱表現を与えるアルゴリズムが存在する。

定理 10.3 任意の $r\text{-sdp}$ ($r\text{-msdp}$, $r\text{-smsdp}$ 或 $r\text{-pmsdp}$) Π に対し最小強表現を与えるアルゴリズムは存在する。

定理 10.4 任意の $r\text{-lmsdp}$ Π に対し最小強表現を与えるアルゴリズムが存在する。

11. その他の決定問題[5]

前述べている決定問題のいくつかを表 1 にまとめる。

たとえば, 1, 2 の結果は与えられた任意の最適化問題に動的計画法ができるかどうかを決定する一般的アルゴリズムは存在しないことを示している。

表 1. $r\text{-sdp}$ の各クラスに対する決定問題

	決定問題	$r\text{-sdp}$	$r\text{-msdp}$	$r\text{-smsdp}$	$r\text{-pmsdp}$	$r\text{-lmsdp}$
1	Γ を弱表現する Π 存在?	U	U	U	U	U
2	Γ を強表現する Π 存在?	U	U	U	U	S
3	Π は Γ を弱表現するか?	U	U	U	U	U

4	Π は Σ を強表現するか?	U	U	U	U	S
5	Π_1 と Π_2 弱等価?	U	U	S	S	S
6	Π_1 と Π_2 強等価?	U	U	U	U	S
7	$r\text{-msdp } \Pi_1$ と 弱等価の Π_2 存在?	T	T	U	U	U
8	$r\text{-msdp } \Pi_1$ と 強等価の Π_2 存在?	T	T	U	U	S

注 U: 決定不可能, S: 決定可能, T: Trivial

なお, 文中の Σ は $r\text{-ddp}$, 指定の r は Π, Π_i 等は右欄の各列に対応するクラスの $r\text{-sdp}$ を示す。

謝辞

日頃ご指導のたまに京都大学三根久教授に感謝いたします。

文献

- [1] R. E. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.
- [2] R. M. Karp and M. Held, "Finite-state processes and dynamic programming," SIAM J. of Applied Math. 15, 693-718, 1967.
- [3] T. Ibaraki, "Algorithms for obtaining shortest paths visiting specified nodes," to appear in SIAM Review.
- [4] ———, "Representation theorems for equivalent optimization problems," to appear in Information

and Control.

- [5] ———, "Classes of discrete optimization problems and their decision problems," to be published.
- [6] ———, "Discrete optimization problems for which optimal policies are computable: solvable classes of dynamic programming," to be published.
- [7] ———, "Minimal representations of some classes of dynamic programming," to be published.