

計算代数的手法を用いた最小費用流問題の解析*

石関 隆幸 (Takayuki Ishizeki)[†] 中山 裕貴 (Hiroki Nakayama)[‡] 今井 浩 (Hiroshi Imai)[‡]

[†] 東京大学大学院理学系研究科情報科学専攻

[‡] 東京大学大学院情報理工学研究科コンピュータ科学専攻

113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1

{ishizeki, nak-den, imai}@is.s.u-tokyo.ac.jp

要旨

近年、整数計画問題に対してトーリックイデアルの離散性を利用し、Gröbner 基底や標準対などの計算代数的手法を応用する研究が行われている。これらのアプローチは既存の整数計画問題の解法に比べて計算時間の改善を与えるものではないが、整数計画問題の代数的な構造を与えるものとして重要である。本稿では、係数行列が単模の場合、特に主・双対最小費用流問題に対してこれらの手法を適用し、これまでに知られていなかった新たな構造を示す。まず、単模な行列に対する Gröbner 基底や標準対について考え、双対実行可能基底の数の最大値を多面体の体積を用いて与える。次に、最小費用流問題に対して Gröbner 基底をグラフの言葉で与え、主(双対)問題の双対(主)実行可能基底の数を解析する。特に、主問題の双対実行可能基底の数の最小値と最大値がそれぞれ 1, $(d-1)$ 次 Catalan 数 $\frac{1}{d} \binom{2(d-1)}{d-1}$ になるのに対し、双対問題の主実行可能基底の下限が $\Omega(2^{\lfloor d/2 \rfloor})$ と指数オーダーになることを示す。これらの解析には、Gröbner 基底と標準対の関係、およびトーリックイデアルに関する組み合わせ論の結果を用いる。特に、前者は最小費用流におけるサーキットの集合と双対実行可能基底の関係に対応し、これまで知られていなかった新たな関係を与えている。

1 概要

近年、Gröbner 基底 (Gröbner bases) [2] および標準対分解 (standard pair decompositions) [8] を用いた整数計画問題の計算代数的アプローチが研究されている。これらは既存の整数計画問題の解法に比べて計算時間を改善したり、既存の解法では解けなかった難しい問題を解くというものではないが、計算困難な問題に対して計算代数的な手法を適用し、整数計画問題の構造の代数的解析を与えるという点で重要である [2, 8, 9, 18, 21, 23, 24]。多項式環上のイデアルに対しては、被約 Gröbner 基底と標準対は、被約 Gröbner 基底の主項で生成される主項イデアルに含まれる単項式の集合の補集合 (標準単項式の集合) のある種の分解が標準対分解である、という意味で双対の関係にある。この種の双対性が組合せ最適化における新たな双対性を与えると思われる、さらに双対定理の成り立つ整数計画問題のクラスに対してこれらの手法を適用することにより、一般の整数計画問題からは得られない計算量クラスを得られると期待される。

係数行列 A が単模 (unimodular) である問題は、不等式系 $yA \leq c$ が完全双対整数性 (totally dual integral, TDI) を持つ性質の良い問題のクラスである。このとき、各標準対は双対実行可能基底に対応し、標準対を用いた整数計画問題のアプローチは各双対実行可能基底に対する被約費用 (reduced cost) を計算しているのと等価になる (定理 3.4)。ゆえに、標準対の数 (つまり双対実行可能基底の数) がこのアプローチの

*本稿は我々の論文 [12] に沿っている

計算量を与える．さらに，このときの標準対の数の最大値はある行列から定まる多面体の正規化体積 (normalized volume) で与えられる (定理 3.3).

係数行列が単模である問題の中でも，最小費用流問題は多項式時間で解くことのできる問題のクラスであることが知られている．最小費用流問題に対応する Gröbner 基底を用いたアプローチは閉路消去アルゴリズムの変形となっている．計算時間が多項式時間になる閉路消去法アルゴリズム [6, 13, 14] では，任意の実行可能フローに対して，残余ネットワーク内の費用が負のサイクルの集合 (指数個あることがある) の中から多項式個を選び，それらに沿ってフローを流し変えていくことにより最適フローを求めている．同様に，Gröbner 基底を用いたアルゴリズムでは Gröbner 基底に対応するサイクルの集合の中から費用が負のサイクルを選び，フローを流し変える．従って，被約 Gröbner 基底の要素数がこのアルゴリズムの複雑度を与えていると考えられる．一方，最小費用流問題に対する標準対を用いたアプローチでは，まず標準対の集合を求め，非負整数解が求まるまで繰り返し各標準対に対して定まる線型連立方程式を解いていく．ネットワーク最適化問題に対して，被約 Gröbner 基底と標準対の間の双対性はサーキットと双対実行可能な補木 (双対問題に対してはカットセットと主実行可能な木) の関係に対応する．これらの関係はよく分かっていないため，このような計算代数的双対性はネットワーク最適化問題に対する新たな解析手法を与えている．

そこで，本稿では単模な行列に対して Gröbner 基底や標準対分解を適用することを考える．本稿の構成は次の通りである．まず 2 節では，被約 Gröbner 基底および標準対を定義し，整数計画問題，正則三角形分割および双対多面体との関係を述べる．3 節では係数行列が単模である場合を考え，算術的次数 (標準対の個数，つまり双対実行可能基底の個数) の最大値が係数行列を斉次化して得られる多面体の正規化体積に等しくなることを示す (定理 3.3). 4 節では， d 点無閉路トーナメントグラフ上の主最小費用流問題の Gröbner 基底および標準対を解析する．いくつかの被約 Gröbner 基底をグラフのサーキットで特徴づけ (定理 4.6, 4.8)，双対実行可能基底の最小値および最大値がそれぞれ 1, $(d-1)$ 次 Catalan 数 $\frac{1}{d} \binom{2(d-1)}{d-1}$ となることを示す (定理 4.12, 4.15). この最大値は 3 節の結果，およびべき単行列上の超幾何系と関連する多面体の研究 [5] の結果を用いる．5 節では，双対最小費用流問題を考え，ある Gröbner 基底がカットセットで特徴づけられることを示す．(定理 5.3). さらに，主実行可能基底の個数の下限が $\Omega(2^{\lfloor d/6 \rfloor})$ と指数オーダーになることを示す (定理 5.7).

		Gröbner 基底 [2]	標準対 [8]
主問題	グラフの言葉では	サーキットの集合	全域木の集合
	アルゴリズム	閉路消去法の変形	双対実行可能基底の列挙
	d 点無閉路トーナメントグラフ上では	最小: $d(d-1)/2$ 最大: ?	最小: 1 最大: $\frac{1}{d} \binom{2(d-1)}{d-1}$
双対問題	グラフの言葉では	カットセットの集合	補木の集合
	アルゴリズム	カットセット消去法の変形	主実行可能基底の列挙
	d 点無閉路トーナメントグラフ上では	最小: $d-1$ 最大: ?	下限: $\Omega(2^{\lfloor d/6 \rfloor})$

表 1: 主・双対最小費用流問題に対する計算代数的解析

2 トーリックイデアルと Gröbner 基底

行列 $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$, 費用ベクトル $c \in \mathbb{R}^n$, 右辺ベクトル $b \in \mathbb{Z}^d$ に対して, $IP_{A,c}(b)$ を整数計画問題

$$IP_{A,c}(b) := \text{minimize } \{c \cdot x \mid Ax = b, x \in \mathbb{N}^n\} \quad (\mathbb{N} \text{ は非負整数全体の集合とする})$$

とし, 整数計画問題の族 $IP_{A,c} := \{IP_{A,c}(b) \mid b \in \{Au \mid u \in \mathbb{N}^n\}\}$ を考える. $IP_{A,c}$ の各問題が唯一つの最適解を持つとき, 費用ベクトル c はジェネリック (generic) であると言う.

$IP_{A,c}$ の構造を計算代数的に解析するのに, トーリックイデアルがよく使われている. 多項式環 $k[x] := k[x_1, \dots, x_n]$ (k は体, n は $IP_{A,c}(b)$ の変数の数) において, 指数ベクトル $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して, $x^a := x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ と表す. このとき, A の トーリックイデアル (toric ideal) I_A を $I_A := \langle x^u - x^v \mid Au = Av, u, v \in \mathbb{N}^n \rangle$ で定める.

2.1 Gröbner 基底と Conti-Traverso のアルゴリズム

$k[x]$ の単項式上の全順序 $\succ$ が項順序 (term order) であるとは, 1 が唯一つの最小元であり, $x^u \succ x^v \Rightarrow x^{u+w} \succ x^{v+w}$ ($\forall w \in \mathbb{N}^n$) が成り立つことを言う. さらに, 項順序 $\succ$ を一つ固定したとき, c に対する重み順序 $\succ_c$ を, $c \cdot v$ または「 $c \cdot u = c \cdot v$ かつ $x^u \succ x^v$ 」のときに $x^u \succ_c x^v$ であると定める. $c \geq 0$ ならば, $\succ_c$ は項順序になる.

$f \in I_A$ の項で $\succ_c$ に関して最大な項を f の主項 (initial term) といい, $\text{in}_{\succ_c}(f)$ で表す. これを用いて, トーリックイデアル I_A の主項イデアル (initial ideal) $\text{in}_{\succ_c}(I_A)$ を $\text{in}_{\succ_c}(I_A) := \langle \text{in}_{\succ_c}(f) \mid f \in I_A \rangle$ で定義する.

定義 2.1 有限集合 $\mathcal{G}_{\succ_c} = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq I_A$ が $\text{in}_{\succ_c}(I_A) = \langle \text{in}_{\succ_c}(g_1), \dots, \text{in}_{\succ_c}(g_s) \rangle$ を満たすとき, $\mathcal{G}_{\succ_c}$ を I_A の $\succ_c$ に対する Gröbner 基底 (Gröbner basis) という. さらに Gröbner 基底 $\mathcal{G}_{\succ_c}$ が被約 (reduced) であるとは, 任意の i に対して $\text{in}_{\succ_c}(g_i)$ の係数が 1 で, かつ任意の i に対して g_i のどの項も $\text{in}_{\succ_c}(g_j)$ ($i \neq j$) で割れないことである.

$\succ_c$ が項順序ならば被約 Gröbner 基底は唯一つ存在し, Buchberger アルゴリズムで計算することができる [4]. また, I_A の任意の Gröbner 基底は I_A の生成元になっている [4]. さらに, I_A が次数付け $\deg(x_i) = d_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) に対して斉次ならば, 任意の $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ について $\succ_c$ は項順序になり, 被約 Gröbner 基底 $\mathcal{G}_{\succ_c}$ が存在することが知られている [17].

任意の $u \in \mathbb{Z}^n$ は $u = u^+ - u^-$ ($u^+, u^- \in \mathbb{N}^n$ かつ $\text{supp}(u^+) \cap \text{supp}(u^-) = \emptyset$) と一意に表わせる. ここで, $\text{supp}(u) := \{i \mid u_i \neq 0\}$ である (u のサポート (support) という). I_A の Gröbner 基底 $\mathcal{G}_{\succ_c}$ は, $\mathcal{G}_{\succ_c} = \{x^{u_1^+} - x^{u_1^-}, \dots, x^{u_p^+} - x^{u_p^-}\}$ ($u_1, \dots, u_p \in \ker(A) \cap \mathbb{Z}^n$) と表わせる [17].

例 2.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, 下のグラフ上の最小費用流問題 $IP_{A,c}(b) = \text{minimize}\{c \cdot x \mid Ax =$

$b, x = (x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,3}) \in \mathbb{N}^3\}$ を考える. このとき, $I_A = \langle x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3} \rangle$ である.

また, $c = (c_{1,2}, c_{1,3}, c_{2,3}) = (3, 1, 2)$ のとき, 主項イデアルは $\text{in}_c(I_A) = \langle x_{1,2}x_{2,3} \rangle$ となり, 被約 Gröbner 基底は $\mathcal{G}_{\succ_c} = \{x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3}\}$ となる.

以下では, $\succ_c$ が項順序となるような費用ベクトル c および項順序 $\succ$ を考える. $\{x \in \mathbb{N}^n \mid Ax = b\}$ の中で $\succ_c$ に関して最小な唯一つの元を求める問題を $IP_{A,\succ_c}(b)$ とすると, この問題の解 u は $IP_{A,c}(b)$ の最適解の一つになっている. Conti-Traverso [2] は, トーリックイデアルの Gröbner 基底を用いて $IP_{A,\succ_c}(b)$ を解くアルゴリズムを提案した. ここでは, 主要な計算ステップに着目したバージョンの Conti-Traverso アルゴリズムを述べる [17]. $f \in k[x]$ を被約 Gröbner 基底 $\mathcal{G}$ で割った余りは一意に定まり, $\mathcal{G}$ による f の正規形 (normal form) と呼ばれる.

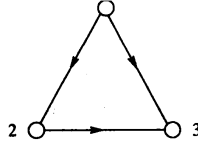


図 1: 3点無閉路トーナメントグラフ

アルゴリズム 2.3 (Conti-Traverso アルゴリズム [2, 17])

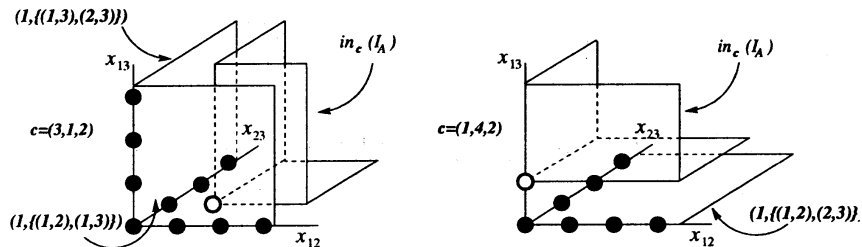
1. トーリックイデアル I_A の $\succ_c$ に対する被約 Gröbner 基底 $\mathcal{G}_{\succ_c}$ を計算する.
2. $IP_{A,c}(b)$ の任意の実行可能解 v に対して, $\mathcal{G}_{\succ_c}$ による x^v の正規形 x^u を計算する.
3. u を出力する. u が $IP_{A,\succ_c}(b)$ の解である.

例 2.2 (続き) $b = (4, 5)$ とする. 実行可能解 $(4, 0, 9)$ に対して, $\mathcal{G}_{\succ_c}$ による $x_{1,2}^4 x_{2,3}^9$ の正規形は $x_{1,3}^4 x_{2,3}^5$ となるから, $IP_{A,\succ_c}(b)$ の解は $(0, 4, 5)$ である.

2.2 標準対分解

$[n] := \{1, \dots, n\}$ とおく. 単項式 $x^a \in k[x]$ および添字集合 $\sigma \subseteq [n]$ の対 (x^a, σ) が $in_{\succ_c}(I_A)$ の標準対 (standard pair) であるとは, (i) $\text{supp}(a) \cap \sigma = \emptyset$, (ii) $x^a \cdot k[x_j \mid j \in \sigma] := \{x^a \cdot f \mid f \in k[x_j \mid j \in \sigma]\}$ に属する任意の単項式は $in_{\succ_c}(I_A)$ の標準単項式 ($in_{\succ_c}(I_A)$ に属さない単項式), (iii) (i) および (ii) を満たす他の対 $(x^{a'}, \sigma')$ で, 「 x^a は $x^{a'}$ で割り切れ, かつ $\text{supp}(x^a/x^{a'}) \cup \sigma \subseteq \sigma'$ を満たす」ようなものは存在しない, を満たすことである. また, 同じ記号 (x^a, σ) で, $x^a \cdot k[x_j \mid j \in \sigma]$ に属する単項式全体の集合も表すことにする. すると上の条件 (iii) は, (i), (ii) を満たす任意の $(x^{a'}, \sigma')$ について $(x^a, \sigma) \not\subseteq (x^{a'}, \sigma')$ となることを示している. $in_{\succ_c}(I_A)$ のすべての標準対の集合を $S(in_{\succ_c}(I_A))$ で表す. $in_{\succ_c}(I_A)$ の標準対全体は, $in_{\succ_c}(I_A)$ の標準単項式全体の一意な分解を与える. これを $in_{\succ_c}(I_A)$ の標準対分解 (standard pair decomposition) という. $in_{\succ_c}(I_A)$ の標準対の個数 $|S(in_{\succ_c}(I_A))|$ は $in_{\succ_c}(I_A)$ の算術的次数 (arithmetic degree) と呼ばれ, $\text{arith-deg}(in_{\succ_c}(I_A))$ と表す [19].

例 2.2 (続き) (添字集合を $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ とする) $c = (3, 1, 2)$ のとき, $in_{(3,1,2)}(I_A)$ の標準対分解は $\{(1, \{(1, 2), (1, 3)\}), (1, \{(1, 3), (2, 3)\})\}$ となり, $in_{(3,1,2)}(I_A)$ の算術的次数は 2. 一方 $c = (1, 4, 2)$ のとき標準対分解は $\{(1, \{(1, 2), (2, 3)\})\}$ となり, $in_{(1,4,2)}(I_A)$ の算術的次数は 1 である.

図 2: 2 種類の標準対分解. 格子点 (p, q, r) は単項式 $x_{1,2}^p x_{1,3}^q x_{2,3}^r$ に対応.

以下, c をジェネリックな費用ベクトルとする. このとき $in_{\succ_c}(I_A) = in_c(I_A) := \langle in_c(f) \mid f \in I_A \rangle$ ($in_c(f)$ は f の項の中で指数ベクトルと c との内積が最大であるものの和) である. A の列ベクトルを $\{a_1, \dots, a_n\}$ とし, $a_1, \dots, a_n$ で生成される錐を $\text{cone}(A)$ と表す. $\sigma \subseteq [n]$ に対して, 添字が σ に含ま

れる列ベクトル全体からなる A の部分行列を A_σ と表す. 費用ベクトル c に対して, $\text{cone}(A)$ の正則三角形分割 (regular triangulation) Δ_c を以下のように定める: $\text{cone}(A_\sigma)$ が Δ_c の面となるのは $y \cdot a_j = c_j$ ($j \in \sigma$) かつ $y \cdot a_j < c_j$ ($j \notin \sigma$) を満たす $y \in \mathbb{R}^d$ が存在するときかつそのときのみである. $\text{cone}(A_\sigma)$ が Δ_c の面のとき, σ も Δ_c の面であるという. c がジェネリックであることから, Δ_c が実際に三角形分割 (つまり, Δ_c の各面が単体的) であることが示せる [18].

補題 2.4 ([17, 19])

- (i) $\text{inc}(I_A)$ が $(*, \sigma)$ なる標準対を持つとき, σ は Δ_c の面である.
- (ii) $\text{inc}(I_A)$ が $(1, \sigma)$ なる標準対を持つ必要十分条件は, σ が Δ_c の極大面であることである.
- (iii) $a_1, \dots, a_n$ が原点を通らない超平面上にあるとき, Δ_c は $\{a_1, \dots, a_n\}$ の凸包 $\text{conv}(A)$ の c に対する正則三角形分割に等しく, Δ_c の極大面 σ に対して $(*, \sigma)$ なる $\text{inc}(I_A)$ の標準対の数は Δ_c における σ の正規化体積に等しい.

ここで, $\text{conv}(A)$ の頂点がある m 次元格子 (lattice) $L \simeq \mathbb{Z}^m$ 上にあるとき, Δ_c の極大面 σ の正規化体積 (normalized volume) を, σ の体積を $0, e_1, \dots, e_m$ の凸包の体積が 1 になるように正規化したもので定義する ($\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ は格子 L の基底).

多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ の面 F に対して, P に対する F の正規錐 (normal cone) を $\{\omega \in \mathbb{R}^n \mid \omega \cdot x' \geq \omega \cdot x \ (\forall x' \in F, x \in P)\}$ で定める. P の全ての面の正規錐の集合を P の正規扇 (normal fan) という.

補題 2.5 ([9]) Δ_c は多面体 $P_c := \{y \in \mathbb{R}^d \mid yA \leq c\}$ の正規扇である.

P_c は $IP_{A,c}(b)$ の線形緩和問題 $LP_{A,c}(b) := \text{minimize } \{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ の双対多面体となっている. A が行フルランクのとき, この補題は $LP_{A,c}(b)$ の双対実行可能基底と Δ_c の極大面との間に 1 対 1 対応があることを述べている.

例 2.2 (続き) $c = (3, 1, 2)$ のとき, $\Delta_{(3,1,2)} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$ である.

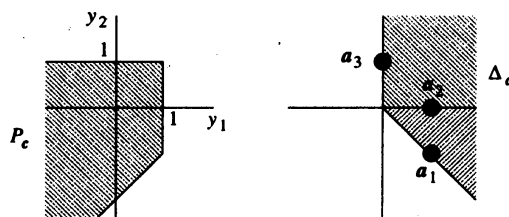


図 3: 双対多面体 $P_{(3,1,2)}$ と正則三角形分割 $\Delta_{(3,1,2)}$

u を $IP_{A,c}(b)$ の最適解とすると, x^u は標準単項式であるから, ある標準対 (x^a, σ) に含まれる. ゆえに, ある非負整数 $\{k_i\}_{i \in \sigma}$ について $u = a + \sum_{i \in \sigma} k_i e_i$ と表せ, $b = Au = Aa + \sum_{i \in \sigma} k_i a_i$ となっている. 補題 2.4 より $\{a_i\}_{i \in \sigma}$ は線型独立だから, $\{k_i\}_{i \in \sigma}$ は連立線型方程式 $\sum_{i \in \sigma} x_i a_i = b - Aa$ の唯一つの解である. このことより $\text{inc}(I_A)$ の標準対分解を用いて $IP_{A,c}(b)$ を解くアルゴリズムが構成できる.

アルゴリズム 2.6 ($S(\text{inc}(I_A))$ を使った $IP_{A,c}(b)$ を解くアルゴリズム [8])

- (i) $(x^a, \sigma) \in S(\text{inc}(I_A))$ に対して, 線型連立方程式 $\sum_{i \in \sigma} x_i a_i = b - Aa$ の解 $\{k_i\}_{i \in \sigma}$ を求める.

- (ii) $\{k_i\}_{i \in \sigma}$ が非負整数ならば, $\mathbf{a} + \sum_{i \in \sigma} k_i \mathbf{e}_i$ を最適解として出力して終了. そうでなければ, 他の標準対について (i) から実行.

このアルゴリズムは高々 $\text{arith-deg}(\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A))$ 個の連立線型連立方程式を解く. よって, 算術的次数 $\text{arith-deg}(\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A))$ は $IP_{A,\mathbf{c}}$ の複雑度の指標とみなせる.

3 単模な行列に対する標準対

$A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ を行フルランクな行列とする. A の任意の 0 でない極大マイナーの絶対値が等しいとき, A は単模 (unimodular) であるという. A が単模であるとき, 任意の $\mathbf{c}$ に対して $\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)$ はスクエアフリーな単項式 (指数ベクトルが 0-1 ベクトルである単項式) を極小な生成元に持ち [17], 全ての標準対は $\Delta_{\mathbf{c}}$ の極大面から得られる.

補題 3.1 ([9]) $\{m_1, \dots, m_s\}$ を $\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の極小な生成元とする. $m_1, \dots, m_s$ が全てスクエアフリーならば, $S(\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)) = \{(1, \sigma) \mid \sigma \text{ は } \Delta_{\mathbf{c}} \text{ の極大面}\}$.

行列 $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ に対して, A の斉次化行列 (homogenized matrix) $A' \in \mathbb{Z}^{(d+1) \times (n+1)}$ を

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & A & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1)$$

で定める. $\mathbf{a}'_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_i \end{pmatrix}$ ($1 \leq i \leq n$) とし, $\mathbf{a}'_{n+1}$ を A' の第 $(n+1)$ 列ベクトルとすると, $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n, \mathbf{a}'_{n+1}$ は原点を通らない超平面 $x_1 = 1$ 上にある.

新たに, $\begin{pmatrix} \beta \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ が $\{A'\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}\}$ を動くときの整数計画問題

$$IP_{A',(\mathbf{c},0)}(\mathbf{b}, \beta) := \text{minimize } \left\{ \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \mid A' \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^{n+1} \right\}$$

の族を $IP_{A',(\mathbf{c},0)}$ とする. $\mathbf{c}$ が $IP_{A,\mathbf{c}}$ においてジェネリックならば, $(\mathbf{c}, 0)$ も $IP_{A',(\mathbf{c},0)}$ においてジェネリックである.

命題 3.2 ([19]) $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in k[\mathbf{x}]$, $\sigma \subseteq [n]$ とする. $(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \sigma) \in S(\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A))$ である必要十分条件は $(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \sigma \cup \{n+1\}) \in S(\text{in}_{(\mathbf{c},0)}(I_{A'}))$.

例 2.2 (続き) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる. $I_{A'} \subset k[x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,3}, x_4]$ とすると, $\mathbf{c} = (3, 1, 2)$ のとき

$\text{in}_{(3,1,2,0)}(I_{A'})$ の標準対分解は $\{(1, \{(1, 2), (1, 3), 4\}), (1, \{(1, 3), (2, 3), 4\})\}$ であり, $\text{in}_{(3,1,2)}(I_A)$ の標準対 $(1, \{(1, 2), (1, 3)\})$, $(1, \{(1, 3), (2, 3)\})$ に対応する. また, $\mathbf{c} = (1, 4, 2)$ のとき $\text{in}_{(1,4,2,0)}(I_{A'})$ の標準対分解は $\{(1, \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}), (1, \{(1, 2), (2, 3), 4\})\}$ である. このとき標準対 $(1, \{(1, 2), (2, 3), 4\})$ だけが 命題 3.2 の仮定を満たし, これは $\text{in}_{(1,4,2)}(I_A)$ の標準対 $(1, \{(1, 2), (2, 3)\})$ に対応する.

$\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{n+1}$ は原点を通らない超平面上にあるから, 補題 2.4 (iii) より $\text{conv}(A')$ の正規化体積は $\Delta'_{(\mathbf{c},k)}$ の極大面に対応する $\text{in}_{(\mathbf{c},k)}(I_{A'})$ の標準対の個数と等しくなる.

定理 3.3 ([7]) A が単模であるとき, $\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の算術的次数の最大値は $\text{conv}(A')$ の正規化体積に等しい.

(証明) 任意の $\mathbf{c}$ に対して $\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の標準対の集合は $\{(1, \sigma) \mid \sigma \text{ は } \Delta_{\mathbf{c}} \text{ の極大面}\}$ となり, 各標準対 $(1, \sigma)$ は $\text{in}_{(\mathbf{c}, 0)}(I_{A'})$ の標準対 $(1, \sigma \cup \{n+1\})$ に対応する. 特に $\sigma \cup \{n+1\}$ は $\Delta'_{(\mathbf{c}, 0)}$ の極大な面となる. よって,

$$\begin{aligned} \text{arith-deg}(\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)) &= |\{(1, \sigma) \in S(\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A))\}| \\ &= |\{(1, \sigma \cup \{n+1\}) \in S(\text{in}_{(\mathbf{c}, 0)}(I_{A'}))\}| \\ &\leq \sum_{\tau} |\{(*, \tau) \in S(\text{in}_{(\mathbf{c}, 0)}(I_{A'}))\}| \\ &= \text{conv}(A') \text{ の正規化体積} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, (2) は $\Delta_{(\mathbf{c}, 0)}$ のすべての極大面 τ についての和である.

$I_A \subset k[x]$, $I_{A'} \subset k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ とする. $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}} x_{n+1}^k \in I_{A'}$ ($\mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in k[x]$) となる必要十分条件は $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = k$ かつ $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in I_A$ となることである. $\mathbf{c} = (1, 1, \dots, 1)$ とし, $\succ$ を x_{n+1} がもっとも小さい変数であるような任意の逆辞書式順序とすると, $\succ_{(\mathbf{c}, 0)}$ に対する $I_{A'}$ の被約 Gröbner 基底 $\mathcal{G}$ の任意の元 g に対して, $\text{in}_{\succ_{(\mathbf{c}, 0)}}(g)$ は変数 x_{n+1} を含まず, また $\{\text{in}_{\succ_{(\mathbf{c}, 0)}}(g) \mid g \in \mathcal{G}\}$ は $k[x]$ のある項順序 $\succ'$ に関して $\text{in}_{\succ'}(I_A)$ の極小生成元になっているから, $\text{in}_{\succ_{(\mathbf{c}, 0)}}(g)$ はスクエアフリーである. よって, 正則三角形分割 $\Delta'_{\succ_{(\mathbf{c}, 0)}}$ は単模 [17] で, 各極大面は $\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の標準対と 1 対 1 に対応する. よって, $\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の算術的次数は $\Delta'_{\succ_{(\mathbf{c}, 0)}}$ の極大面の数に等しく, $\text{conv}(A')$ の正規化体積となる. $\square$

$LP_{A, \mathbf{c}}(\mathbf{b})$ のある基底 B に対する基底形式

$$P_{(M \ I), \tilde{\mathbf{c}}}(\tilde{\mathbf{b}}) := \text{maximize } \{(-\tilde{\mathbf{c}})^T \mathbf{x}' \mid M\mathbf{x}' + I_d \mathbf{x}'' = \tilde{\mathbf{b}}_B, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \geq 0\}$$

およびその双対問題

$$D_{(I \ -M^T), \tilde{\mathbf{b}}}(\tilde{\mathbf{c}}) := \text{minimize } \{\tilde{\mathbf{b}}_B^T \mathbf{y}'' \mid I_{n-d} \mathbf{y}' - M^T \mathbf{y}'' = \tilde{\mathbf{c}}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'' \geq 0\}$$

を考える. ここで, $M \in \mathbb{Z}^{d \times (n-d)}$, $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{\mathbf{b}}_B, \tilde{\mathbf{b}}_N)$ ($\tilde{\mathbf{b}}_B = (\tilde{b}_i)_{i \in B} \in \mathbb{Z}^d$, $\tilde{\mathbf{b}}_N = (\tilde{b}_i)_{i \notin B} = \mathbf{0} \in \mathbb{Z}^{n-d}$) で, $I_d \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ および $I_{n-d} \in \mathbb{Z}^{(n-d) \times (n-d)}$ は単位行列, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ は $P_{(M \ I), \tilde{\mathbf{c}}}(\tilde{\mathbf{b}})$ のそれぞれ基底変数, 非基底変数, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}''$ は $D_{(I \ -M^T), \tilde{\mathbf{b}}}(\tilde{\mathbf{c}})$ のそれぞれ基底変数, 非基底変数, $\tilde{\mathbf{c}}$ は基底 B に対する被約費用ベクトルである.

$\text{in}_{\mathbf{c}}(I_A) = \text{in}_{\tilde{\mathbf{c}}}(I_{(M \ I)})$ の任意の標準対 $(1, \sigma)$ に対して, $\bar{\sigma} := \{1, \dots, n\} \setminus \sigma$ は双対問題 $D_{(I \ -M^T), \tilde{\mathbf{b}}}(\tilde{\mathbf{c}})$ の基底となる (補題 2.5).

$$\sigma_1 := (\{1, \dots, n\} \setminus B) \cap \sigma, \quad \sigma_2 := B \cap \sigma, \quad \bar{\sigma}_1 := (\{1, \dots, n\} \setminus B) \cap \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma}_2 := B \cap \bar{\sigma}.$$

とするとき, $D_{(I \ -M^T), \tilde{\mathbf{b}}}(\tilde{\mathbf{c}})$ の基底変数 $\bar{\sigma}$ に対する被約費用ベクトル (reduced cost vector) を以下のように定める.

$$\tilde{\mathbf{b}}'_{\bar{\sigma}} = \tilde{\mathbf{b}}_{\bar{\sigma}} - N_1^T (B_1^{-1})^T \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma}, \quad \text{ここで } B_1 = (I_{\bar{\sigma}_1} \ (-M^T)_{\bar{\sigma}_2}), \quad N_1 = (I_{\sigma_1} \ (-M^T)_{\sigma_2}).$$

定理 3.4 標準対 $(1, \sigma)$ に対するアルゴリズム 2.6 (i) の方程式の解は, $D_{(I \ -M^T), \tilde{\mathbf{b}}}(\tilde{\mathbf{c}})$ の基底 $\bar{\sigma}$ に対する被約費用ベクトルである.

(証明) $\tilde{\mathbf{b}}'_\sigma$ が, 標準対 $(1, \sigma)$ に対するアルゴリズム 2.6 (i) の方程式を満たすこと, つまり $(M_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2}) \tilde{\mathbf{b}}'_\sigma = \tilde{\mathbf{b}}$ となることを示す. これは, 以下により示される.

$$\begin{aligned}
 (M_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2}) \tilde{\mathbf{b}}'_\sigma &= (M_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2}) \tilde{\mathbf{b}}_\sigma - (M_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2}) N_1^T (B_1^{-1})^T \tilde{\mathbf{b}}_\sigma \\
 &= I_{\sigma_2} \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma_2} - (M_{\sigma_1} (I_{\sigma_1})^T + I_{\sigma_2} ((-M^T)_{\sigma_2})^T) (B_1^{-1})^T \tilde{\mathbf{b}}_\sigma \\
 &= I_{\sigma_2} \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma_2} - \{ (M - M_{\sigma_1} (I_{\sigma_1})^T) + (-M - I_{\sigma_2} ((-M^T)_{\sigma_2})^T) \} (B_1^{-1})^T \tilde{\mathbf{b}}_\sigma \quad (3) \\
 &= I_{\sigma_2} \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma_2} + (M_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2}) (I_{\sigma_1} (-M^T)_{\sigma_2})^T (B_1^{-1})^T \tilde{\mathbf{b}}_\sigma \\
 &= I_{\sigma_2} \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma_2} + (M_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2}) B_1^T (B_1^{-1})^T \tilde{\mathbf{b}}_\sigma \\
 &= I_{\sigma_2} \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma_2} + (M_{\sigma_1} \ I_{\sigma_2}) \tilde{\mathbf{b}}_\sigma \\
 &= I_{\sigma_2} \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma_2} + I_{\sigma_2} \tilde{\mathbf{b}}_{\sigma_2} \\
 &= \tilde{\mathbf{b}}.
 \end{aligned}$$

ここで, (3) は $M = MI = M_{\sigma_1} (I_{\sigma_1})^T + M_{\sigma_1} (I_{\sigma_1})^T$ および $-M = I(-M) = I_{\sigma_2} ((-M^T)_{\sigma_2})^T + I_{\sigma_2} ((-M^T)_{\sigma_2})^T$ から従う. $\square$

4 主最小費用流問題の Gröbner 基底と標準対

G_d を頂点 $1, 2, \dots, d$ を持つ d 点無閉路トーナメントグラフとし, $n = \binom{d}{2}$ を G_d の辺の数とする. ここで G_d の各枝 (i, j) ($i < j$) は頂点 i から頂点 j に向きがついているとする. 以下のような最小費用流問題 $P_{A, \mathbf{c}}(\mathbf{b})$ を考える.

$$P_{A, \mathbf{c}}(\mathbf{b}) := \text{minimize } \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \},$$

ここで, $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ は G_d の点枝接続行列である.

G_d の頂点の列 $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ で, 各 $1 \leq i < p$ について (v_i, v_{i+1}) または (v_{i+1}, v_i) が G_d の枝になっているようなものを G_d 内のウォーク (walk), 道 $(v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ をサイクル (cycle), 任意の $i \neq j$ に対して $v_i \neq v_j$ であるようなサイクル $(v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ をサーキット (circuit) という.

定義 4.1 C を G_d 内のサーキットとし, C に適当に向きを定める. 枝 (i, j) の向きが C の向きと同じとき $u_{ij}^+ = 1, u_{ij}^- = 0$, そうでないとき $u_{ij}^+ = 0, u_{ij}^- = 1$ とおき, $\mathbf{u}_C^+ = (u_{ij}^+)_{1 \leq i < j \leq d}, \mathbf{u}_C^- = (u_{ij}^-)_{1 \leq i < j \leq d} \in \mathbb{R}^n$ と定める. $\mathbf{u}_C := \mathbf{u}_C^+ - \mathbf{u}_C^-$ を C の接続ベクトル (incidence vector) という. これを用いて, G_d のサイクル C と $f_C := \mathbf{x}^{\mathbf{u}_C^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}_C^-} \in I_A$ を同一視する.

定義 4.2 ベクトル $\mathbf{u} \in \ker(A) \setminus \{\mathbf{0}\}$ がサーキット (circuit) であるとは, $\ker(A) \setminus \{\mathbf{0}\}$ のベクトルの中でサポート $\text{supp}(\mathbf{u})$ の包含関係に関して極小であり, さらに $\mathbf{u}$ の非零要素が互いに素になっていることである. $\mathbf{u} \in \ker(A) \setminus \{\mathbf{0}\}$ がサーキットのとき, $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$ は I_A のサーキットであるといい, I_A のサーキット全体の集合を $\mathcal{C}_A$ で表す.

$\mathcal{C}_A$ は G_d 内のすべてのサーキットの集合に対応する. I_A のすべての項順序に対する被約 Gröbner 基底の和集合を I_A の普遍 Gröbner 基底 (universal Gröbner basis) といい, $\mathcal{U}_A$ と表す.

命題 4.3 ([17]) G_d の接続行列 A に対して, $\mathcal{U}_A = \mathcal{C}_A$ となる. 特に, I_A の任意の被約 Gröbner 基底はスクエアフリーであり, $\mathcal{U}_A$ の要素の数は d に関して指数オーダーになる.

命題 4.4 I_A は次数付け $\deg(x_{i,j}) = 1$ に対しては斉次ではないが, $\deg(x_{i,j}) = j - i$ に対して斉次であ

(証明) 任意の d に対して $x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3} \in I_A$ かつ $x_{1,2}x_{2,3} \notin I_A$ となるから, I_A は次数付け $\deg(x_{i,j}) = 1$ に対して斉次ではない.

$v_1, v_2, \dots, v_p, v_1$ を G_d 内のサーキットとし, $C^+ := \{k \mid v_k < v_{k+1}\}$, $C^- := \{k \mid v_k > v_{k+1}\}$ ($v_{p+1} := v_1$ とする) とおくと, C に対する二項式 f_C は $f_C = \prod_{k \in C^+} x_{v_k v_{k+1}} - \prod_{k \in C^-} x_{v_{k+1} v_k}$ である. すると

$$\begin{aligned} \deg \left(\prod_{k \in C^+} x_{v_k v_{k+1}} \right) - \deg \left(\prod_{k \in C^-} x_{v_{k+1} v_k} \right) &= \sum_{k \in C^+} (v_{k+1} - v_k) - \sum_{k \in C^-} (v_k - v_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^p (v_{k+1} - v_k) = 0 \end{aligned}$$

より f_C は次数付け $\deg(x_{i,j}) = j - i$ に対して斉次である. $\square$

これより, 任意の $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して I_A の被約 Gröbner 基底が存在する.

4.1 主問題の Gröbner 基底

ここでは, ある項順序に対する被約 Gröbner 基底の要素がグラフの言葉で表せることを示す. 系として, 被約 Gröbner 基底の要素の数が多項式オーダーになるような項順序が存在することが示せる. ここで示す Gröbner 基底は超幾何系の解析に応用できる [11].

命題 4.5 $x_{i,j} \succ x_{k,l} \Leftrightarrow i < k$ または $(i = k \text{ かつ } j < l)$ なる変数の順序で誘導される辞書式順序を $\succ$ とすると, $\succ$ に対する I_A の被約 Gröbner 基底は $\{g_{ijk} := x_{i,j}x_{j,k} - x_{i,k} \mid i < j < k\} \cup \{g_{ijkl} := x_{i,k}x_{j,l} - x_{i,l}x_{j,k} \mid i < j < k < l\}$ となる. 特に, この Gröbner 基底の要素の数は $\binom{d}{3} + \binom{d}{4}$ である.

$\{g_{ijk} \mid i < j < k\}$ は G_d の長さ 3 のサーキット全体の集合, $\{g_{ijkl} \mid i < j < k < l\}$ は各 4 点 i, j, k, l に対して一意に定まる長さ 4 のサーキットの集合となっている (Figure 4).

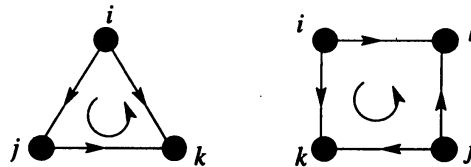


図 4: g_{ijk} (左) および g_{ijkl} (右) に対応するサーキット

(証明) 命題 4.3 より, G_d 内の任意のサーキットに対応する二項式が g_{ijk} および g_{ijkl} のいずれかであるか, 主項がある $\text{in}_\succ(g_{ijk})$ あるいは $\text{in}_\succ(g_{ijkl})$ で割れることを示せばよい.

長さ 3 の任意のサーキットに対応する二項式は $\{g_{ijk}\}$ に含まれる.

4 点 $i < j < k < l$ で定まるサーキットは, $C_1 := (i, j, k, l, i)$, $C_2 := (i, j, l, k, i)$, $C_3 := (i, k, j, l, i)$ のいずれかかその逆向きのサーキットである. C_1 およびその逆向きのサーキットに対応する二項式は $\pm(x_{i,j}x_{j,k}x_{k,l} - x_{i,l})$ であり, その主項 $x_{i,j}x_{j,k}x_{k,l}$ は $\text{in}_\succ(g_{ijk})$ で割れる. 同様に, C_2 およびその逆向きのサーキットに対応する二項式の主項は $\text{in}_\succ(g_{ijl})$ で割れる. C_3 およびその逆向きのサーキットに対応する二項式は g_{ijkl} である.

C を長さ 5 以上のサーキットとする. v_1 を C の中で数字の一番小さい頂点とし, $C := (v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ と表す. 一般性を失うことなく, $v_2 < v_p$ としてよい. C に対応する二項式 f_C の主項 $\text{in}_\succ(f_C)$

は, C 上で枝 (v_1, v_2) と同じ向きの枝に対応する変数全体の積となる. もし $v_2 < v_3$ ならば, x_{v_1, v_2} および x_{v_2, v_3} が $\text{in}_{\succ}(f_C)$ に含まれ, $\text{in}_{\succ}(f_C)$ は $\text{in}_{\succ}(g_{v_1 v_2 v_3})$ で割れる. $v_2 > v_3$ のときは, $v_3 < v_2 < v_p$ より $v_1 < v_k < v_2 < v_{k+1}$ なる k ($3 \leq k \leq p-1$) が存在し, x_{v_1, v_2} および $x_{v_k, v_{k+1}}$ が $\text{in}_{\succ}(f_C)$ に含まれ, $\text{in}_{\succ}(f_C)$ は $\text{in}_{\succ}(g_{v_1 v_k v_2 v_{k+1}})$ で割れる. $\square$

定理 4.6 $\succ$ を任意の項順序とし, $\mathbf{c} = (c_{1,2}, \dots, c_{1,d}, c_{2,3}, \dots, c_{d-1,d}) \in \mathbb{R}^n$ を, 任意の $i < j < k$ に対して $c_{i,j} + c_{j,k} > c_{i,k}$ を満たし, さらに任意の $i < j < k < l$ に対して $c_{i,k} + c_{j,l} > c_{i,l} + c_{j,k}$ を満たすベクトルとすると, $\succ_{\mathbf{c}}$ に対する I_A の被約 Gröbner 基底は命題 4.5 のときと同じになる.

(証明) 命題 4.5 における項順序を $\succ'$ とおくと, $c_{i,j} + c_{j,k} > c_{i,k}$ より $\text{in}_{\succ_{\mathbf{c}}}(g_{ijk}) = x_{i,j}x_{j,k} = \text{in}_{\succ'}(g_{ijk})$ となり, さらに $c_{i,k} + c_{j,l} > c_{i,l} + c_{j,k}$ より $\text{in}_{\succ_{\mathbf{c}}}(g_{ijkl}) = x_{i,k}x_{j,l} = \text{in}_{\succ'}(g_{ijkl})$ となる. ゆえに, $\text{in}_{\succ_{\mathbf{c}}}(I_A) = \text{in}_{\succ'}(I_A)$ となるから, $\succ_{\mathbf{c}}$ および $\succ'$ に対する I_A の被約 Gröbner 基底は同じである. $\square$

命題 4.7 $x_{i,j} \succ x_{k,l} \Leftrightarrow i < k$ または $(i = k \text{ かつ } j > l)$ なる変数の順序で誘導される辞書式順序を $\succ$ とすると, $\succ$ に対する I_A の被約 Gröbner 基底は $\{g_{ij} := x_{i,j} - x_{i,i+1}x_{i+1,i+2} \cdots x_{j-1,j} \mid i < j-1\}$ となる. 特に, この Gröbner 基底の要素の数は $\binom{d}{2} - (d-1)$ である.

$\{g_{ij} \mid i < j-1\}$ は全域木 $T := \{(i, i+1) \mid 1 \leq i < d\}$ に対する G_d の基本サーキットすべての集合に対応している.

(証明) C を T の基本サーキットでないサーキットとする. v_1 を C の中で数字が一番小さい頂点とし, $C := (v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ と表す. 一般性を失うことなく, $v_2 < v_p$ としてよい. このとき, C に対応する二項式 f_C の主項 $\text{in}_{\succ}(f_C)$ は変数 x_{v_1, v_p} を含むから, $\text{in}_{\succ}(f_C)$ は $\text{in}_{\succ}(g_{v_1 v_p})$ で割れる. $\square$

定理 4.8 $\succ$ を任意の項順序とし, $\mathbf{c} = (c_{1,2}, \dots, c_{1,d}, c_{2,3}, \dots, c_{d-1,d}) \in \mathbb{R}^n$ を, 任意の $i < j-1$ に対して $c_{i,j} > c_{i,i+1} + c_{i+1,i+2} + \cdots + c_{j-1,j}$ を満たすベクトルとすると, $\succ_{\mathbf{c}}$ に対する I_A の被約 Gröbner 基底は命題 4.7 のときと同じになる.

(証明) 命題 4.7 における項順序を $\succ'$ とおくと, $c_{i,j} > c_{i,i+1} + c_{i+1,i+2} + \cdots + c_{j-1,j}$ より $\text{in}_{\succ_{\mathbf{c}}}(g_{ij}) = x_{i,j} = \text{in}_{\succ'}(g_{ij})$ となる. ゆえに, $\text{in}_{\succ_{\mathbf{c}}}(I_A) = \text{in}_{\succ'}(I_A)$ となるから, $\succ_{\mathbf{c}}$ および $\succ'$ に対する I_A の被約 Gröbner 基底は同じである. $\square$

4.2 Gröbner 基底の要素数の範囲

一般に, トーリックイであるの任意の被約 Gröbner 基底の要素の次数は, 行列の行の数の指数オーダになることが知られている [16] が, 被約 Gröbner 基底の要素数についてはわかっていない. 無閉路トーナメントグラフのトーリックイデアルに対しては, 点枝接続行列が単模になることから要素数が解析できる場合がある.

命題 4.9 I_A の被約 Gröbner 基底の要素数の最小値は $\binom{d}{2} - (d-1)$ である. 命題 4.7 の基底がこの最小値を満たす例となっている.

(証明) I_A の被約 Gröbner 基底は I_A の生成元をなすから, 被約 Gröbner 基底の要素数は I_A の基底の要素数以上である. I_A は G_d のサイクル空間に対応し, その基底の要素数はサイクル空間の次元 $\binom{d}{2} - (d-1)$ である. $\square$

d	# GB	要素数の最大値	要素数の最小値
4	10	5	3
5	211	15	6
6	48312	37	10
7	≥ 37665	≥ 75	15

表 2: 主問題に対する被約 Gröbner 基底の数, 要素数の最大・最小値

被約 Gröbner 基底の要素数の上限を解析するために, すべての項順序に対するトーリックイデアルの被約 Gröbner 基底を列挙する TiGERS [10] というプログラムで $d \leq 7$ のときについて計算したところ, Table 2 のようになった。

$d = 7$ に対しては, 被約 Gröbner 基底の数および要素数の最大値は非常に大きく, 正確な値は求まらなかった。 $d \leq 5$ のときは, 命題 4.5 の基底が最大値をなす例となっているが, $d \geq 6$ では要素数の最大値は命題 4.5 の基底の要素数より少し大きくなっている。 $d = 6$ のときでさえ, 被約 Gröbner 基底の要素数が 37 となるような費用ベクトルの特徴づけができていない。要素数が最大になる被約 Gröbner 基底の特徴づけは困難であると思われる。

問題 4.10 I_A の被約 Gröbner 基底の要素数は d について多項式オーダーになる。

4.3 主問題の標準対

本節では, $\mathbf{c}$ はジェネリックであるとする。もし $\mathbf{c}$ がジェネリックでなければ, ジェネリックな $\mathbf{c}'$ で, 任意の $f \in I_A$ に対して $\text{inc}_{\mathbf{c}'}(f)$ が $\text{inc}_{\mathbf{c}}(f)$ に含まれるようなものを変わりに用いればよい。 $P_{A,\mathbf{c}}(\mathbf{b})$ の制約式 1 つは余分だから, 最後の制約式を除いた問題 $P_{\bar{A},\mathbf{c}}(\bar{\mathbf{b}})$ を考える。すると, $\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A) = \text{inc}_{\mathbf{c}}(I_{\bar{A}})$ かつ $\bar{A}$ は行フルランクである。さらに, $\text{cone}(A)$ の $\mathbf{c}$ による正則三角形分割と $\text{cone}(\bar{A})$ の $\mathbf{c}$ による正則三角形分割は単体的複体として同じになる。どちらの正則三角形分割も $\Delta_{\mathbf{c}}$ で表すことにする。

任意の主項イデアル $\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A)$ はスクエアフリーな単項式で生成される (命題 4.3) から, 標準対の集合 $S(\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A))$ は, $\{(1, \sigma) \mid \sigma \text{ は } \Delta_{\mathbf{c}} \text{ の極大面}\}$ となる。

E を G_d の枝集合とし, $S \subseteq E$ について $\mathbf{x}^S := \prod_{(i,j) \in S} x_{i,j}$ と表す。

容量なし最小費用流問題の最適フローが流れる枝は林 (forest) をなす [1]。これと $\text{cone}(A)$ の次元が $d-1$ となることから, 次の命題は命題 2.4, 命題 4.3, 補題 3.1 を用いて示される。

命題 4.11 $(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \sigma)$ が $\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の標準対である必要十分条件は, $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = 1$ かつ σ が $\mathbf{x}^{\sigma} \notin \text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A)$ を満たす G_d の全域木となることである。

3 節の結果から, $(1, *)$ なる形の $\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の標準対の集合と $P_{\bar{A},\mathbf{c}}(\bar{\mathbf{b}})$ の双対実行可能基底の集合には 1 対 1 の関係がある。ゆえに, 最小費用流問題 $P_{A,\mathbf{c}}(\mathbf{b})$ に対するアルゴリズム 2.6 は, 双対実行可能基底の列挙の変形となっている。

前節で示した Gröbner 基底は算術的次数 (つまり双対実行多面体の頂点数) の上下限を与える。 $\mathbf{c}$ がジェネリックであることから, $\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の算術的次数は 1 以上である。

定理 4.12 $\mathbf{c}$ がジェネリックな費用ベクトルであるときの, $\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A)$ の算術的次数の最小値は 1 である。

(証明) 定理 4.8 の費用ベクトル $\mathbf{c}$ に対して, $\text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A) = \langle x_{i,j} \mid j-i > 1 \rangle$ となる。このとき, $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \notin \text{inc}_{\mathbf{c}}(I_A)$ である必要十分条件は, 任意の $j-i > 1$ を満たす i, j に対して $a_{i,j} = 0$ となることである。この

ような単項式全体の集合は、単項式集合 $(1, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (d-1, d)\})$ に等しい。よって、この対のみが $\text{inc}(I_A)$ の標準対になる。 $\square$

定理 4.15 c がジェネリックな費用ベクトルであるときの、 $\text{inc}(I_A)$ の算術的次数の最大値は $(d-1)$ 次 Catalan 数 $C_{d-1} := \frac{1}{d} \binom{2(d-1)}{d-1}$ である。

この定理を示すために、Gelfand ら [5] による、ある超幾何関数に関する結果を用いる。

補題 4.16 ([5]) d 点無閉路トーナメントグラフの点枝接続行列 A の斉次化行列を A' とし、 A' の列ベクトル $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{n+1}$ の凸包を $\text{conv}(A')$ とする。このとき、 $\text{conv}(A')$ の正規化体積は $(d-1)$ 次 Catalan 数 C_{d-1} に等しい。

(定理 4.15 の証明) A は単模だから、定理 3.3 より $\text{arith-deg}(\text{inc}(I_A)) \leq (\text{conv}(A') \text{ の正規化体積}) = C_{d-1}$ である。

命題 4.11 および定理 4.6 より、定理 4.6 の c について $(1, \sigma)$ が $\text{inc}(I_A)$ の正規対である必要十分条件は σ が次を満たす全域木となることである：

- (a) (i, j) と (j, k) の両方が σ に含まれるような $1 \leq i < j < k \leq d$ は存在しない。
- (b) (i, k) と (j, l) の両方が σ に含まれるような $1 \leq i < j < k < l \leq d$ は存在しない。

このような全域木の本数は $(d-1)$ 次 Catalan 数になることが知られている (例えば [15] を参照)。 $\square$

ここで、Catalan 数は $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}} (1 + O(\frac{1}{n}))$ となる (例えば [3] を参照)。

5 双対最小費用流問題の Gröbner 基底と標準対

本章では双対最小費用流問題の Gröbner 基底および標準対を解析する。

$G_d = (V, E)$ とする。 $D \subseteq E$ が G_d のカットセット (cutset) であるとは、 V の分割 (V_1, V_2) (つまり $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$) が存在して $D = \{(i, j) \in E \mid i \in V_1 \text{ かつ } j \in V_2, \text{ または } i \in V_2 \text{ かつ } j \in V_1\}$ と表せることである。このとき、 D を (V^+, V^-) に対するカットセットとも言う。

定義 5.1 D を $V = (V^+, V^-)$ に対する G_d のカットセットとすると、ベクトル $\mathbf{u}_D \in \mathbb{R}^n$ を

$$(\mathbf{u}_D)_{ij} := \begin{cases} 1 & (i \in V^+ \text{ and } j \in V^-) \\ -1 & (i \in V^- \text{ and } j \in V^+) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定める。このベクトル $\mathbf{u}_D$ を D の接続ベクトル (incidence vector) という。これを用いて、 G_d のカットセット D と $f_D := \mathbf{x}^{\mathbf{u}_D^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}_D^-} \in I_{(I-M^T)}$ を同一視する。

3 節と同様に、基底 $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (d-1, d)\}$ に対応した $P_{A, \mathbf{c}}(\mathbf{b})$ と等価な問題:

$$P_{(M \ I), \tilde{\mathbf{c}}}(\tilde{\mathbf{b}}) := \text{maximize } \{(-\tilde{\mathbf{c}})^T \mathbf{x}' \mid M \mathbf{x}' + I \mathbf{x}'' = \tilde{\mathbf{b}}_B, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \geq 0\},$$

およびその双対問題

$$D_{(I-M^T), \tilde{\mathbf{b}}}(\tilde{\mathbf{c}}) := \text{minimize } \{\tilde{\mathbf{b}}_B^T \mathbf{y}'' \mid I \mathbf{y}' - M^T \mathbf{y}'' = \tilde{\mathbf{c}}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'' \geq 0\},$$

を考える。ここで、 $(M \ I)$ および $(I - M^T)$ は全域木 $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (d-1, d)\}$ に対するそれぞれ基本カットセット行列および基本サーキット行列、 $\tilde{c}$ は基底 $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (d-1, d)\}$ に対する被約費用ベクトル、 $\tilde{b} = (\tilde{b}_B, \tilde{b}_N) = (\tilde{b}_{ij})_{1 \leq i < j \leq d}$, $\tilde{b}_B = (\tilde{b}_{i,i+1})_{1 \leq i < d}$, $\tilde{b}_N = (\tilde{b}_{i,j})_{i < j-1} = \mathbf{0}$ であり、また

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \mathbf{x}' = (x_{1,3}, \dots, x_{1,d}, x_{2,4}, \dots, x_{d-2,d}), \mathbf{x}'' = (x_{1,2}, x_{2,3}, \dots, x_{d-1,d}) \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{y}'', \mathbf{y}'), \mathbf{y}' = (y_{1,3}, \dots, y_{1,d}, y_{2,4}, \dots, y_{d-2,d}), \mathbf{y}'' = (y_{1,2}, y_{2,3}, \dots, y_{d-1,d}) \end{aligned}$$

である。 $P_{(M \ I), \tilde{c}}(\tilde{b})$ は $d-1$ 個の制約式を持ち (つまり $(M \ I) \in \mathbb{Z}^{(d-1) \times n}$), $D_{(I - M^T), \tilde{b}}(\tilde{c})$ は $n-d+1$ 個の制約式を持つ (つまり $(I - M^T) \in \mathbb{Z}^{(n-d+1) \times n}$).

基本サーキット行列 $(I - M^T)$ のランクが $n-d+1$ であること、および基本カットセット行列 $(M \ I)$ の各行ベクトルが $\ker((I - M^T))$ に含まれることから、基本カットセット行列 $(M \ I)$ の行ベクトル全体は $\ker(I - M^T)$ の基底をなす。

基本サーキット行列 $(I - M^T)$ に対して、サーキットの集合 $\mathcal{C}_{(I - M^T)}$ は G_d のカットセット全体の集合に対応する。基本サーキット行列 $(I - M^T)$ は完全単模、つまり任意の Minor 行列式が 0 か ± 1 である (例えば [20] を参照) から、命題 4.3 より $\mathcal{C}_{(I - M^T)} = \mathcal{U}_{(I - M^T)}$ となる。

命題 5.2 線型連立方程式 $(M \ I)\mathbf{x} = \tilde{b}_B$ が非負の解を持つような費用ベクトル $\tilde{b}$ に対して、 $I_{(I - M^T)}$ は $\tilde{b}$ に対する被約 Gröbner 基底を持つ。

(証明) $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ を線型連立方程式 $(M \ I)\mathbf{x} = \tilde{b}_B$ の解とする (非負であることに注意)。 $(M \ I)$ の i 行目、つまり枝 $(i, i+1)$ に対する基本カットセットの接続ベクトルを $\mathbf{r}_i$ とする。 $(V^+, V \setminus V^+)$ ($V^+ \subseteq \{1, \dots, d-1\}$) に対するカットセット D に対して、 $\mathbf{u}_D = \sum_{i \in V^+, i+1 \notin V^+} \mathbf{r}_i - \sum_{i \notin V^+, i+1 \in V^+} \mathbf{r}_i$ となることより、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_D &= \sum_{i \in V^+, i+1 \notin V^+} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_i - \sum_{i \notin V^+, i+1 \in V^+} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i \in V^+, i+1 \notin V^+} \tilde{b}_{i,i+1} - \sum_{i \notin V^+, i+1 \in V^+} \tilde{b}_{i,i+1} \\ &= \tilde{b} \cdot \mathbf{u}_D \end{aligned}$$

となる。ゆえに、任意のカットセット D について $\text{in}_{\mathbf{a}}(f_D) = \text{in}_{\tilde{b}}(f_D)$ が成り立ち、 $\text{in}_{\mathbf{a}}(I_{(I - M^T)}) = \text{in}_{\tilde{b}}(I_{(I - M^T)})$ である。よって、 $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ より $I_{(I - M^T)}$ は $\tilde{b}$ に対する被約 Gröbner 基底を持つ。□

例 2.2 (続き) $\mathbf{c} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, 5)$ のとき、全域木 $\{(1, 2), (2, 3)\}$ に対応する主問題・双対問題はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_{1,3} \\ \text{s.t.} \quad & \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_{1,3} \\ x_{1,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \\ & x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,3} \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad & 4y_{1,2} + 9y_{2,3} \\ \text{s.t.} \quad & \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_{1,3} \\ y_{1,2} \\ y_{2,3} \end{pmatrix} = -4 \\ & y_{1,2}, y_{1,3}, y_{2,3} \geq 0 \end{aligned}$$

このとき、 $I_{(1, -1, -1)} = \langle x_{1,2} - x_{2,3}, x_{1,2}x_{1,3} - 1, x_{1,3}x_{2,3} - 1 \rangle$ であり、 $\tilde{b} = (4, 0, 9)$ に対する被約 Gröbner 基底は $\{x_{2,3} - x_{1,2}, x_{1,2}x_{1,3} - 1\}$ である。

5.1 双対問題の Gröbner 基底

主問題に対するとときと同様に, ある項順序に対する被約 Gröbner 基底の要素がグラフの言葉で表せることを示す.

定理 5.3 $\tilde{\mathbf{b}}$ を命題 5.2 の条件を満たし, さらに $1 \leq \forall i < \forall j \leq d$ について $\tilde{b}_{i,i+1} > \tilde{b}_{j,j+1}$ かつ $j > i+1$ なる任意の i, j について $\tilde{b}_{i,j} = 0$ を満たす費用ベクトルとする. このとき, $I_{(I-M^T)}$ の $\tilde{\mathbf{b}}$ に対する被約 Gröbner 基底は $\{g_i := \prod_{j<i} x_{j,i} - \prod_{k>i} x_{i,k} \mid i = 2, 3, \dots, d\}$ である. 特に, この Gröbner 基底の要素数は $d-1$ である.

各 g_i は $(V \setminus \{i\}, \{i\})$ に対するカットセットの接続ベクトルに対応している.

(証明) (V^+, V^-) (一般性を失うことなく $1 \in V^+$ としてよい) に対するカットセット D について, $P^+ := \{i \in V^+ \mid i \neq d, i+1 \in V^-\}$, $P^- := \{i \in V^- \mid i \neq d, i+1 \in V^+\}$ とする. $P^+ = \{i_1, \dots, i_p\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_p$), $P^- = \{j_1, \dots, j_q\}$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_q$) と表したとき, $p = q$ または $p = q+1$ であり, さらに $i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \dots < i_k < j_k < i_{k+1} < j_{k+1} < \dots$ となる. $\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}_D^+ = \sum_{r=1}^p \tilde{b}_{i_r, i_r+1} > \sum_{r=1}^q \tilde{b}_{j_r, j_r+1} = \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}_D^-$ より $\text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(f_D) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_D^+}$ となるから, $\text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(g_{i_1+1}) = \prod_{j \leq i_1} x_{j, i_1+1}$ より $\text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(f_D)$ は $\text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(g_{i_1+1})$ で割れる. $\square$

5.2 Gröbner 基底の要素数の範囲

命題 5.4 $I_{(I-M^T)}$ の被約 Gröbner 基底の要素数の最小値は $d-1$ である. 定理 5.3 の基底がこの最小値を満たす例となっている.

(証明) $I_{(I-M^T)}$ の被約 Gröbner 基底は $I_{(I-M^T)}$ の生成元をなすから, 被約 Gröbner 基底の要素数は $I_{(I-M^T)}$ の基底の要素数以上である. $I_{(I-M^T)}$ は G_d のコサイクル空間に対応し, その基底の要素数はコサイクル空間の次元 $d-1$ である. $\square$

被約 Gröbner 基底の要素数の上限を解析するために, 前述のソフトウェア TiGERS を用いて $d \leq 7$ の時について計算したところ, Table 3 のようになった.

d	# GB	要素数の最大値	要素数の最小値
4	7	5	3
5	48	10	4
6	820	20	5
7	44288	39	6

表 3: 双対問題に対する被約 Gröbner 基底の数, 要素数の最大・最小値

どのような費用ベクトルが被約 Gröbner 基底の要素数を最大にするのかは良く分かっておらず, そのような基底の特徴づけは困難であると思われる.

問題 5.5 $I_{(I-M^T)}$ の被約 Gröbner 基底の要素数は d について多項式オーダーになる.

5.3 双対問題の標準対

4.3 節同様、本節では $\tilde{\mathbf{b}}$ はジェネリックであるとする。任意の主項イデアル $in_{\tilde{\mathbf{b}}}$ リーな単項式で生成されるから、任意の $in_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M^T)})$ の標準対は $(1, *)$ という $D_{(I-M^T), \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{\mathbf{b}})}$ の最適解はカットセットを含まないことと $\text{cone}((I-M^T))$ の $\mathbf{z}$ とから、次の命題は命題 2.4, 補題 3.1 を用いて示される。

命題 5.6 $(\mathbf{x}^a, \sigma)$ が $in_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M^T)})$ の標準対である必要十分条件は、 $\mathbf{x}^a = 1$ を満たす G_d の補木となることである。

例 2.2 (続き) $\mathbf{c} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, 5)$ のとき、主項イデアル $in_{(4,0,9)}(I_{(1|-1,-1)})$ の標準対 $(1, \{(1, 2)\})$, $(1, \{(1, 3)\})$ を持つ。

定理 5.7 命題 5.2 の条件を満たす任意の $\tilde{\mathbf{b}}$ に対して、以下を満たす $S \subset \{1, \dots$

- $|S| \geq \lfloor (d-1)/6 \rfloor$
- 任意の $\sigma \subseteq S$ に対して、以下を満たす G_d の全域木 T_σ が存在:
 - (A) T_σ は枝集合 $\{(i, i+1) \mid i \in S \setminus \sigma\}$ を含み、かつ $\{(j, j+1) \mid j \in \sigma\}$ ない
 - (B) $(1, \overline{T_\sigma})$ は $in_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M^T)})$ の標準対。ここで、 $\overline{T_\sigma} := E \setminus T_\sigma$ は T_σ の

特に、(A) から $\sigma \neq \tau$ なる任意の $\sigma, \tau \subseteq S$ に対して $T_\sigma \neq T_\tau$ となるから、 $in_{\tilde{\mathbf{b}}}$ $\Omega(2^{\lfloor d/6 \rfloor})$ 個の標準対を持つ。

(証明) 添字集合 $\{1, \dots, d-1\}$ を以下の部分集合たちに分割する:

$$\begin{aligned} M_0 &:= \{i \in \{1, \dots, d-1\} \mid x_{i,i+1} \in in_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M^T)})\} \\ M_1 &:= \{i \in \{1, \dots, d-1\} \mid i \notin M_0, i \equiv 0 \pmod{3}\} \\ M_2 &:= \{i \in \{1, \dots, d-1\} \mid i \notin M_0, i \equiv 1 \pmod{3}\} \\ M_3 &:= \{i \in \{1, \dots, d-1\} \mid i \notin M_0, i \equiv 2 \pmod{3}\} \end{aligned}$$

このとき M_0 について次の補題が成り立つ。

補題 5.8 $|M_0| \leq \lceil (d-1)/2 \rceil$ である。

(Lemma 5.8 の証明) (V^+, V^-) に対応するカットセット D で、 f_D が次数 1 のを考える。一般性を失うことなく、 $i \in V^+$ としてよい。つまり、 V^+ から V^- へ向かう。 $j-i > 1$ と仮定する。任意の k ($i < k < j$) について $k \in V^+$ な V^- へ向かい、 $k \in V^-$ ならば枝 (i, k) が V^+ から V^- へ向かうことになり $I_j = i+1$ となる。さらに、任意の $k < i$ について $k \in V^-$ かつ任意の $k > i+1$ から、 $V^+ = \{i, i+2, i+3, \dots, d\}$, $V^- = \{1, \dots, i-1, i+1\}$ である。

ある $f \in I_{(I-M^T)}$ に対して $in_{\tilde{\mathbf{b}}}(f) = x_{i,i+1}$ であるとき、もし $x_{i-1,i} \in in_{\tilde{\mathbf{b}}}(\{i-1, i+1, \dots, d\}, \{1, \dots, i-2, i\})$ の間のカットセットに付随する二項式に

$$f' := x_{i,i+1} - \left(\prod_{k \leq i-2} x_{k,i} \right) \left(\prod_{k \geq i+2} x_{i+1,k} \right) \left(\prod_{\substack{k \leq i-1, \\ l \geq i+2}} x_{k,l} \right) \left(\prod_{k \leq i-2} x_{k,i-1} \right) \left(\prod_{k \geq i+2} x_{i+1,k} \right)$$

に簡約され、 f' の主項は $x_{i,i+1}$ となる。 f' はすべての項が $x_{i,i+1}$ を含むから、 $\text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(f'/x_{i,i+1}) = 1$ となり、 $\tilde{\mathbf{b}}$ が項順序を定めることに矛盾。ゆえに、 $x_{i-1,i} \notin \text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M\mathbf{T})})$ である。同様に $x_{i+1,i+2} \notin \text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M\mathbf{T})})$ である。したがって、 $|M_0| \leq \lceil (d-1)/2 \rceil$ となる。 $\square$

これより、 M_1, M_2, M_3 のうち少なくとも1つは $\lfloor (d-1)/6 \rfloor$ 個の要素を持つ。そのような M_i ($i = 1, 2, 3$) を S とする。任意の $\sigma := \{i_1 > i_2 > \dots > i_r\} \subseteq S$ に対して、題意を満たす全域木の列 $T_0, T_{\{i_1\}}, T_{\{i_1, i_2\}}, \dots, T_\sigma$ を帰納的に構成する。

・初期ステップ：

$T_0 := \{(1, 2), (2, 3), \dots, (d-1, d)\}$ とする。 T_0 は明らかに全域木である。被約 Gröbner 基底はカットセットの部分集合に対応するから、被約 Gröbner 基底の任意の要素の主項はある i について $x_{i,i+1}$ という変数を含む。ゆえに、 $\mathbf{x}^{\overline{T_0}} \notin \text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M\mathbf{T})})$ である。

・帰納ステップ：

$\sigma \setminus \{i_r\}$ に対して所望の全域木 $T_{\sigma \setminus \{i_r\}}$ が得られているとする。枝集合

$$T^1 := \{T_{\sigma \setminus \{i_r\}} \setminus \{(i_r, i_r + 1)\}\} \cup \{(i_r, i_r + 2)\}, \quad T^2 := \{T^1 \setminus \{(i_r + 1, i_r + 2)\}\} \cup \{(i_r - 1, i_r + 1)\}.$$

を定める。 T^1, T^2 はどちらも条件 (A) を満たす全域木である。 T^1, T^2 のどちらか一方が条件 (B) を満たすことを示す。

(a) T^1 が条件 (B) を満たすとき。

T^1 が T_σ に対する所望の全域木である。

(b) T^1 が条件 (B) を満たさないとき。

このとき、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}} \in \text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M\mathbf{T})})$ である。 $\mathcal{G}$ を $I_{(I-M\mathbf{T})}$ の $\tilde{\mathbf{b}}$ に対する被約 Gröbner 基底とすると、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ はある二項式 $g \in \mathcal{G}$ で簡約できる。 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ を簡約しうる g は以下のカットセットに付随する二項式のうちの1つである (図5を参照)。

(i) ある $p \leq i_r$ に対して $V^+ = \{p, p+1, \dots, i_r, i_r+2, i_r+3, \dots, d\}$, $V^- = \{1, 2, \dots, p-1, i_r+1\}$ としたとき、 (V^+, V^-) に対応するカットセットに付随する二項式 $g_{(p)}^{(1)}$ で、その主項は V^+ から V^- に向かう枝全体に対応。

(ii) ($r > 1$ のとき) $(i_{q(k)} + 1, i_{q(k)} + 2) \in T_{\sigma \setminus \{i_r\}}$ ($k = 1, \dots, t$) を満たす $1 \leq \exists q(t) < \dots < \exists q(2) < \exists q(1) < r$ およびある $1 \leq \exists p \leq i_r$ に対して $V^- = \{1, 2, \dots, p-1, i_r+1, i_{q(1)}+1, \dots, i_{q(t)}+1\}$, $V^+ = V \setminus V^-$ としたとき、 (V^+, V^-) に対応するカットセットに付随する二項式 $g_{(p,t)}^{(2)}$ で、その主項は V^+ から V^- に向かう枝全体に対応。

補題 5.9 ある p について $g_{(p)}^{(1)} \in \mathcal{G}$ であり、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ は $g_{(1)}^{(1)}$ で簡約できる、つまり、 $g_{(1)}^{(1)}$ の主項は枝集合 $\{(k, i_r+1) : k \leq i_r\}$ に対応する変数の積である。

(補題 5.9の証明) $r = 1$ のとき、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ を簡約できる二項式は $g_{(p)}^{(1)}$ の形の二項式のみである。

$r > 1$ とし、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ が任意の p について $g_{(p)}^{(1)}$ で簡約できないとする。このとき、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ はある $g_{(p,t)}^{(2)}$ で $\mathcal{G}$ の要素になっているようなもので簡約でき、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ は $g_{(1,t)}^{(2)}$ で簡約できる (もし $g_{(1,t)}^{(2)}$ で簡約できないとすると、 $g_{(p,t)}^{(2)}$ は $g_{(1,t)}^{(2)}$ で簡約でき、 $g_{(p,t)}^{(2)}$ は $\mathcal{G}$ の要素になり得ない)。

$\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ が $g_{(1,1)}^{(2)}$ で簡約できるとする。 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ を $g_{(1,1)}^{(2)}$ で簡約して得られる単項式を m_1 とすると、 m_1 は $g_{(1)}^{(1)}$ で単項式 m_2 に簡約される (仮定から、 $g_{(1)}^{(1)}$ の主項は V^- から V^+ への枝に対応する変数の積である)。

$V_D^- = \{i_{q(1)} + 1\}$, $V_D^+ = V \setminus V_D^-$ として、 (V_D^+, V_D^-) に対応するカットセット D に付随する二項式 $f_D \in I_{(I-M\mathbf{T})}$ について、 $\text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(f_D)$ は V_D^- から V_D^+ への枝に対応 (そうでないと、 $\mathbf{x}^{\overline{T_{\sigma \setminus \{i_r\}}}}$ が f_D で簡約

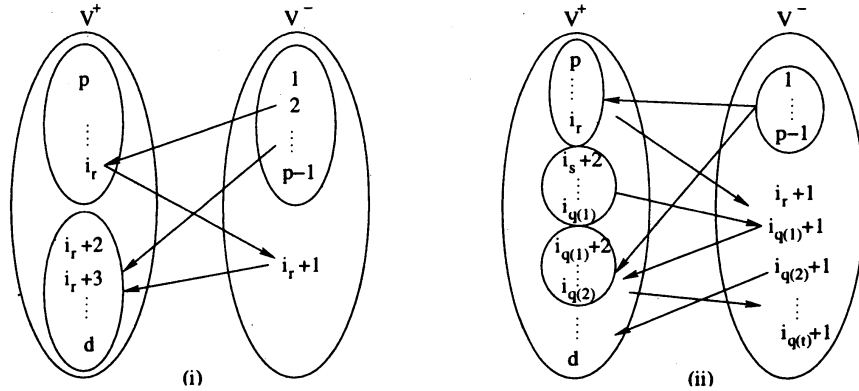


図 5: (i), (ii) に対応するカットセット

$g_{(1,1)}^{(2)}$ での簡約		$g_{(1)}^{(1)}$ での簡約	
割られる変数	掛けられる変数	割られる変数	掛けられる変数
$\{x_{k,i_r+1} : k \leq i_r\},$ $\{x_{k,i_{q(1)}+1} : k \leq i_{q(1)}, k \neq i_r+1\}$	$\{x_{i_r+1,l} : l \geq i_r+2, l \neq i_{q(1)}+1\},$ $\{x_{i_{q(1)}+1,l} : l \geq i_{q(1)}+2\}$	$\{x_{i_r+1,l} : l \geq i_r+2\}$	$\{x_{k,i_r+1} : k \leq i_r\}$

表 4: $g_{(1,1)}^{(2)}$, $g_{(1)}^{(1)}$ での簡約において増減する変数

でき、帰納法の仮定に矛盾). すると m_2 は f_D で簡約でき、簡約された単項式は $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ となる (表 5.3 参照). これは、 $\tilde{\mathbf{b}}$ が項順序を定義することに矛盾する.

同様に、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ が $g_{(1,t)}^{(2)}$ ($t > 1$) で簡約できるとき、 (V_D^+, V_D^-) ($V_D^- = \{i_{q(1)}+1, i_{q(2)}+1, \dots, i_{q(t)}+1\}$, $V_D^+ = V \setminus V_D^-$) に対応するカットセット D に付随する二項式 $f_D \in I_{(I-M^T)}$ を用いて矛盾が示せる. ゆえに、ある p に対して $g_{(p)}^{(1)} \in \mathcal{G}$ となる.

$\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ が $g_{(1)}^{(1)}$ で簡約できない (つまり、 $g_{(1)}^{(1)}$ の主項が枝集合 $\{(i_r+1, l) : l \geq i_r+2\}$ に対応) とき、 $g_{(p)}^{(1)}$ は $g_{(1)}^{(1)}$ で簡約でき、 $g_{(p)}^{(1)}$ が被約 Gröbner 基底 $\mathcal{G}$ の要素であることに矛盾. したがって、 $\mathbf{x}^{\overline{T^1}}$ は $g_{(1)}^{(1)}$ で簡約できる. $\square$

$\mathbf{x}^{\overline{T^1}} \in \text{in}_{\tilde{\mathbf{b}}}(I_{(I-M^T)})$ ならば $\mathbf{x}^{\overline{T^2}}$ は $\mathcal{G}$ のどの要素でも簡約できないことを示す. もし $\mathbf{x}^{\overline{T^2}}$ がある $g \in \mathcal{G}$ で簡約できるとすると、そのような g は以下の二項式のうちの 1 つである (図 6 を参照).

- (i) $g_{(i_r)}^{(1)}$ で、主項は x_{i_r, i_r+1} .
- (ii) $i_r+1 \in V^+$, $1, 2, \dots, i_r, i_r+2 \in V^-$ なる任意の (V^+, V^-) に対応するカットセットに付随する二項式で、主項は V^+ から V^- への枝全体に対応.
- (iii) ($r > 1$ のとき) $g_{(i_r, t)}^{(2)}$ で、主項は V^+ から V^- への枝全体に対応.

(i) は、 $g_{(i_r)}^{(1)}$ の主項が x_{i_r, i_r+1} であることになり、 $i_r \notin M(0)$ であったことに矛盾. 一方、(ii) の形の二項式は上の補題から $g_{(1)}^{(1)}$ で簡約でき、被約 Gröbner 基底 $\mathcal{G}$ の要素にはなり得ない.

(iii) の形の二項式で簡約できるとする. $\mathbf{x}^{\overline{T^2}}$ が $g_{(i_r, 1)}^{(2)}$ で簡約できるとする. この簡約で得られる単項式は、 (V_D^+, V_D^-) ($V_D^+ = \{1, 2, \dots, i_r-1, i_r+1\}$, $V_D^- = V \setminus V_D^+$) に対応するカットセットに付随する二項

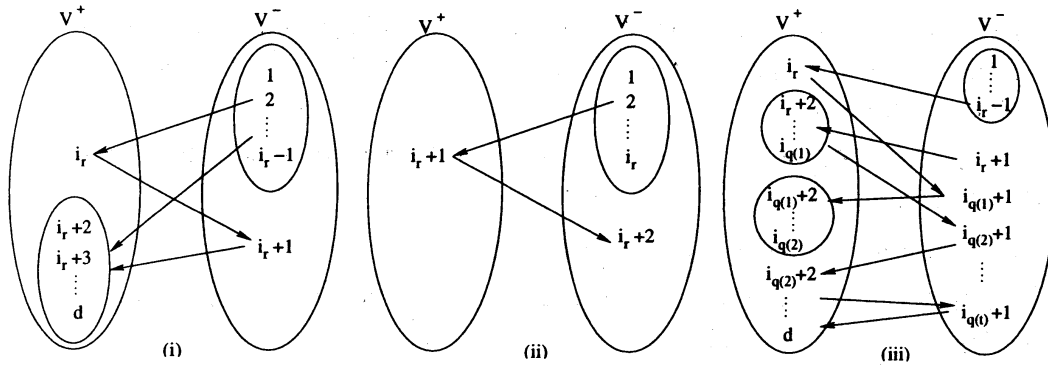


図 6: (i), (ii), (iii) に対応するカットセット

式 $f_D \in I_{(I-M^T)}$ で簡約できる ($i_r \notin M(0)$ より f_D の主項は V_D^+ から V_D^- への枝全体に対応する). この結果得られる単項式を m とおく.

$g_{(i_r,1)}^{(2)}$ での簡約		f_D での簡約	
割られる変数	掛けられる変数	割られる変数	掛けられる変数
$x_{i_r, i_r+1}, x_{i_r, i_{q(1)}+1},$ $x_{i_r+2, i_{q(1)}+1},$ $x_{i_r+3, i_{q(1)}+1},$ $\dots, x_{i_{q(1)}, i_{q(1)}+1}$	$\{x_{k, i_r} : k \leq i_r - 1\},$ $\{x_{k, l} : k \leq i_r + 1, k \neq i_r,$ $l \geq i_r + 2, l \neq i_{q(1)} + 1\},$ $\{x_{i_{q(1)}+1, l} : l \geq i_{q(1)} + 2\}$	$\{x_{k, i_r} : k \leq i_r - 1\},$ $\{x_{k, l} : k \leq i_r + 1,$ $k \neq i_r, l \geq i_r + 2\}$	x_{i_r, i_r+1}

表 5: $g_{(i_r,1)}^{(2)}$, f_D での簡約において増減する変数

$(V_{D'}^+, V_{D'}^-)$ ($V_{D'}^- = \{i_{q(1)} + 1\}$, $V_{D'}^+ = V \setminus V_{D'}^-$) に対応するカットセットに付随する二項式 $f_{D'}$ に対して, $\text{in}_{\tilde{b}}(f_{D'})$ は $V_{D'}^-$ から $V_{D'}^+$ への枝全体に対応する (そうでなければ, $\mathbf{x}^{\overline{T_\sigma \setminus \{i_r\}}}$ が $f_{D'}$ で簡約できることになり, 帰納法の仮定に矛盾). このとき, m は $f_{D'}$ により $\mathbf{x}^{\overline{T^2}}$ に簡約され (表 5.3 参照), $\tilde{b}$ が項順序を定義することに矛盾する.

同様に, $\mathbf{x}^{\overline{T^2}}$ が $g_{(i_r,t)}^{(2)}$ ($t > 1$) で簡約できるとき, 上の f_D と $(V_{D'}^+, V_{D'}^-)$ ($V_{D'}^- = \{i_{q(1)} + 1, i_{q(2)} + 1, \dots, i_{q(t)} + 1\}$, $V_{D'}^+ = V \setminus V_{D'}^-$) に対応するカットセットに付随する二項式 $f_{D'} \in I_{(I-M^T)}$ を使うことにより, 矛盾が示せる.

よって, $\mathbf{x}^{\overline{T^2}} \notin \text{in}_{\tilde{b}}(I_{(I-M^T)})$ となり, T^2 が所望の全域木 T_σ である. $\square$

参考文献

- [1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti and J. B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [2] P. Conti and C. Traverso. Buchberger algorithm and integer programming. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, **539**(1991), pp. 130–139.
- [3] T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.
- [4] D. A. Cox, J. B. Little and D. B. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1992.

- [5] I. M. Gelfand, M. I. Graev and A. Postnikov. Combinatorics of hypergeometric functions associated with positive roots. In *Arnold-Gelfand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory*, Birkhäuser, Boston, 1996, pp. 205–221.
- [6] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan. Finding minimum-cost circulations by cancelling negative cycles. *Journal of ACM*, **36**(1989), pp. 873–886.
- [7] T. Hibi and H. Ohsugi. private communication.
- [8] S. Hoçten and R. R. Thomas. Standard pairs and group relaxations in integer programming. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **139**(1999), pp. 133–157.
- [9] S. Hoçten and R. R. Thomas. Gomory Integer Programs. to appear in *Mathematical Programming*, 2001.
- [10] B. Huber and R. R. Thomas. TiGERS. http://www.math.tamu.edu/~rekha/TiGERS_0.9.uu
- [11] T. Ishizeki and H. Imai. Gröbner bases of acyclic tournament graphs and hypergeometric systems on the group of unipotent matrices. *RIMS Kokyuroku*, Kyoto University, Research Institute for Mathematical Sciences, **1171**(2000), pp. 7–20.
- [12] T. Ishizeki, H. Nakayama and H. Imai. Dualistic computational algebraic analyses of primal and dual minimum cost flow problems on acyclic tournament graphs. submitted. Los Alamos e-print archive, math.CO/0206159.
- [13] M. Shigeno, S. Iwata and S. T. McCormick. Relaxed most negative cycle and most positive cut canceling algorithms for minimum cost flow. *Mathematics of Operations Research*, **25**(2000), pp. 76–104.
- [14] P. T. Sokkalingam, R. K. Ahuja and J. B. Orlin. New polynomial-time cycle canceling algorithms for minimum-cost flows. *Networks*, **36**(2000), pp. 53–63.
- [15] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, Volume 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [16] B. Sturmfels. Gröbner bases of toric varieties. *Tôhoku Mathematical Journal*, **43**(1991), pp. 249–261.
- [17] B. Sturmfels. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. AMS University Lecture Series, 8, Providence, RI, 1995.
- [18] B. Sturmfels and R. R. Thomas. Variation of cost functions in integer programming. *Mathematical Programming*, **77**(1997), pp. 357–387.
- [19] B. Sturmfels, N. V. Trung and W. Vogel. Bounds on degrees of projective schemes. *Mathematische Annalen*, **302**(1995), pp. 417–432.
- [20] I. Takahashi and S. Fujishige. *Discrete Mathematics*. Iwanami Shoten, 1981. (in Japanese).
- [21] R. R. Thomas. A geometric Buchberger algorithm for integer programming. *Mathematics of Operations Research*, **20**(1995), pp. 864–884.
- [22] R. R. Thomas. Applications to Integer Programming. In *Applications of Computational Algebraic Geometry*. AMS Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **53**(1997), pp. 119–142.
- [23] R. Urbaniak, R. Weismantel and G. M. Ziegler. A variant of the Buchberger algorithm for integer programming. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **10**(1997), pp. 96–108.
- [24] G. M. Ziegler. Gröbner bases and integer programming. in *Some Tapas of Computer Algebra* (A. M. Cohen, H. Cuypers and H. Sterk eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. 168–183.