

爆風方程式の解の存在

東京電機大 理工 桜井 明
新井 勉

§1. 序

静止理想気体中の一点に有限のエネルギーが瞬間的に注入されたとき発生する衝撃波の伝播の問題は、数学的には、以下の方程式系 (1) (2) (3) を満たす関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, $\lambda(y)$ を求める事に帰着される。

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \lambda f + (f-x) \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{r h} \frac{\partial g}{\partial x} \\ (f-x) \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial h}{\partial y} = -h \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1) \\ -\lambda g + (f-x) \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial g}{\partial y} = -r g \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

$(0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq \bar{y} \leq 1)$
 $\bar{y}$: 定数)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1, y) = 2(1-y)/(r+1) \\ g(1, y) = 2r/(r+1) - (r-1)y/(r+1) \\ h(1, y) = (r+1/r-1) \left(1 + \frac{2}{r-1} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$f(0, y) = 0. \quad (3)$$

ただし, f, g, h, λ はそれぞれ波面背後の気体の速度, 圧力, 密度および減衰度をあらわし, γ は比熱の比 ($\doteq 1.4$), $\alpha = 0, 1, 2$ はそれぞれ点源, 線源, 面源に対応する. りなみに方程式系 (1) (2) (3) は, 連続, 運動, エネルギーの式, 及び波面での Rankine-Hugoniot の式に, 適当な変換 (Blast Wave 変換) を施した結果得られるものである [2].

この問題に対して, 既に多くの研究がなされていゝが, その殆んどが, 近似解についての解析である [2], [3], [5] [8]. 本小論では, $y (= C^2/\lambda^2, C: \text{音速}, \lambda: \text{波面の速度})$ の中級数で表わされるような, (1) (2) (3) の解の存在を証明する. その為の数学的道具は, 線型常微分方程式の理論, 及び, 完備距離空間における縮小写像の原理 (不動点の存在定理) が主なものである.

§ 2. 方程式の変形

方程式系 (1) (2) (3) を変形しよう. まず, 関数 $f_0(x), g_0(x), h_0(x)$ を方程式:

$$\begin{cases} \left\{ -\frac{\alpha+1}{2} f_0 + (f_0 - x) f_0' \right\} h_0 = -\frac{1}{\gamma} g_0', \\ -(\alpha+1) g_0 + (f_0 - x) g_0' = -\gamma g_0 \left(f_0' + \frac{\alpha f_0}{x} \right), \end{cases} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_0 - x) h_0' = -h_0 \left(f_0' + \frac{\alpha f_0}{x} \right), \\ \quad \quad \quad (0 < x \leq 1, \quad / = \frac{d}{dx}) \\ f_0(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad g_0(1) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad h_0(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \end{array} \right.$$

の解とする。(4)は、(1)で形式的に $y=0$, $\lambda = \alpha + 1$ としたものである。(4)の解は解析的に閉じた形で表わされ、その詳しい性質が調べられている[2],[8]。

さて、これらの関数を用いて、

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = f_0(x) + y(x - f_0(x))\varphi(x, y), \\ g(x, y) = g_0(x)(1 + y\psi(x, y)) \\ h(x, y) = h_0(x)(1 + y\chi(x, y)) \\ \lambda(y) = (\alpha + 1)(1 + y\Lambda(y)) \end{array} \right. \quad (5)$$

と置き、 $\varphi, \psi, \chi, \Lambda$ を求めようとする。その際、変数 x を $\tau = \int_x^1 \frac{dx}{x - f_0(x)}$ により変換し(この変換により x の変域 $(0, 1]$ は、 τ の変域 $[0, \infty)$ に一対一対応する事が知られている[2],[8])、さらに $2y/(\gamma-1)$ を改めて y とかけば、 $\varphi, \psi, \chi, \Lambda$ の満たすべき方程式系は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\tau) \vec{X}_\tau(\tau, y) + B(\tau) \vec{X}(\tau, y) - (\alpha + 1)y I \vec{X}_y(\tau, y) \\ + \Lambda(y) \vec{a} = y \vec{Y}(\tau, y) \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad 0 \leq y \leq \bar{y}, \end{array} \right.$$

3

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X}(0, y) = \vec{C}(y), \\ \varphi(\tau, y) : \tau \text{ について有界} \end{array} \right. \quad (6)$$

と仮定する。

そこで,

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ x \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha+1}{2} \frac{f_0}{x-f_0} \\ \alpha+1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{(x-1)^2}{4x} \\ -\frac{1}{1+y} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{xE} & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} Q & R & -R \\ -(\alpha+1)(x-1) & -(\alpha+1) & 0 \\ -(\alpha+1) & 0 & -(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{h_0(x-f_0)^2}{g_0}, \quad Q = 2f_0' + \frac{\alpha-1}{2},$$

$$R = f_0' + \frac{\alpha+1}{2} \frac{f_0}{x-f_0}$$

であり, $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ は非線形部分で,

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{1}{(1+y\Lambda)(1+y\chi)} \left[(\Lambda + \chi + y\Lambda\chi) \left\{ \varphi_z - \frac{\psi_z}{rE} + Q\varphi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + R(\psi - \chi) - \frac{\alpha+1}{2} \frac{f_0}{x-f_0} \Lambda \right\} + \varphi \left\{ -\varphi_z + (1-f_0')\varphi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\alpha+1}{2} \Lambda \right\} (1+y\chi) + \chi \left(\varphi_z + Q\varphi - \frac{\alpha+1}{2} \frac{f_0}{x-f_0} \right) \right], \\
 Y_2 &= \frac{1}{1+y\Lambda} \left[\Lambda \left\{ r\varphi_z - \psi_z - (\alpha+1)((r-1)\varphi + \psi - \Lambda) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \varphi\psi_z - r\varphi_z\psi + (\alpha+1)(r-1)\varphi\psi \right\} \right], \\
 Y_3 &= \frac{1}{1+y\Lambda} \left[\Lambda (\varphi_z - \chi_z) - (\varphi\chi)_z + (\alpha+1)\varphi(\chi - \Lambda) \right]
 \end{aligned} \tag{7}$$

である。

より、線型方程式。

方程式(6)において、右辺の関数 $\vec{Y}(\tau, y)$ が与えられ、さらに与えられ

$$\vec{Y}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_n(\tau) y^n \quad 0 \leq y \leq \bar{y}$$

と級数展開できるとする。この時、線型方程式(6)の解 $\vec{X}(\tau, y)$, $\Lambda(y)$ を

$$\vec{X}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{X}_n(\tau) y^n, \quad A(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n \quad (8)$$

の形で求めよう。(8)を形式的に(6)に代入し、 y の巾について
の係数を比較すれば、線型常微分方程式：

$$\begin{cases} A(\tau) X_n'(\tau) + B_n(\tau) \vec{X}_n(\tau) = -\lambda_n \vec{a} + \vec{\gamma}_{n-1}(\tau) \\ \vec{X}_n(0) = \vec{c}_n = \begin{pmatrix} c_n^{(1)} \\ c_n^{(2)} \\ c_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad / = \frac{d}{d\tau}, \end{cases} \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (9)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{cases} B_n = B - n(\alpha+1)I, \\ \vec{c}_n \text{ は } \vec{c} \text{ を } y \text{ について中級数展開した係数,} \\ \vec{\gamma}_{-1} = \vec{0}. \end{cases}$$

以下、 $\vec{X}_n = (\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$, $\vec{\gamma}_n = (\gamma_n^{(1)}, \gamma_n^{(2)}, \gamma_n^{(3)})$ と書こう。
方程式(9)は、 $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ についての微分方程式であるが、次のように、未知関数 χ_n を消去することができる。

命題 3.1. φ_n, ψ_n が、微分方程式：

$$\begin{cases} \varphi_n' - \frac{1}{rE} \psi_n' + \left(Q - n(\alpha+1) + \frac{R}{(n+2)r-1} \right) \varphi_n \\ + R \left(1 - \frac{n+2}{(n+2)r-1} \right) \psi_n \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &= Y_{n-1}^{(1)} - a_1 \lambda_n + \frac{RS(\bar{Y}_{n-1}, \lambda_n)}{(n+2)\delta-1} \\
 &\delta \varphi_n' - \psi_n' - (d+1)(\delta-1)\varphi_n - (d+1)(n+1)\psi_n \\
 &= Y_{n-1}^{(2)} - a_2 \lambda_n \\
 &\begin{pmatrix} \varphi_n(0) \\ \psi_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

の解である時,

$$\chi_n = \frac{S - \varphi_n + (n+2)\psi_n}{(n+2)\delta-1} \quad (11)$$

とよくと, $(\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$ は (9) の解である。ただし,

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{S}(\bar{Y}_{n-1}, \lambda_n) &= -\frac{n+1}{n+2} (1 - e^{-(d+1)(n+1)\tau}) \lambda_n \\
 &+ e^{-(d+1)(n+1)\tau} \left[\int_0^\tau e^{(d+1)(n+1)\frac{s}{\delta}} \{ -((n+2)\delta-1) Y_{n-1}^{(3)}(s) \right. \\
 &\quad \left. + (n+2) Y_{n-1}^{(2)}(s) \} ds + C_n^{(1)} - (n+2)C_n^{(2)} + ((n+2)\delta-1)C_n^{(3)} \right]
 \end{aligned}$$

である。この命題は, (10) (11) を使, て直接計算してみることによって確かめられる。

そこで, 以下, 方程式 (10) を考えようことにする。(10) は, 正規形:

$$\begin{cases} \vec{\Pi}_n'(\tau) + D_n(\tau) \vec{\Pi}_n(\tau) = \vec{F}_n(\tau) \\ \vec{\Pi}_n(0) = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix} \end{cases} \quad 0 \leq \tau < \infty \quad (12)$$

と書きなおす事ができる。ここで

$$\vec{\Pi}_n = (\varphi_n, \psi_n),$$

$$D_n = \frac{E}{1-E} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{rE} \\ -r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q + \frac{R}{(n+2)r-1} - n(\alpha+1) & R(1 - \frac{n+2}{(n+2)r-1}) \\ -(\alpha+1)(r-1) & -(\alpha+1)(n+1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_n = \frac{E}{1-E} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{rE} \\ -r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n-1}^{(1)} - a_1 \lambda_n + \frac{RS}{(n+2)r-1} \\ \gamma_{n-1}^{(2)} - a_2 \lambda_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1^{(n)} \\ F_2^{(n)} \end{pmatrix}$$

である。

線型常微分方程式の理論より, (12)の解 $\vec{\Pi}_n$ は, 斉次方程式:

$$\vec{\Pi}' + D_n(\tau) \vec{\Pi} = \vec{0} \quad (13)$$

の基本解行列, $\Phi_n(\tau)$ を用いて,

$$\vec{\Pi}_n(\tau) = \Phi_n(\tau) \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix} + \Phi_n(\tau) \int_0^\tau \Phi_n^{-1}(s) \vec{F}_n(s) ds \quad (14)$$

と表示されるから, $\Phi_n(\tau)$ を調べる事によつて, (φ_n, ψ_n) が, 従つて (11) を使えば, (9) の解 $(\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$ が, γ_{n-1} で評価される事になる。そこで (13) の基本解行列 $\Phi_n(\tau)$ を構成しよう。その爲に, (13) を単独2階方程式に帰着させよう。次の

よって関数を導入する。

$$\begin{cases} V(\tau) = \frac{1}{2(1-E)} \left\{ \frac{(\alpha+1)(r-1)}{r} + E(Q + (r-1)R + \alpha+1) \right\}, \\ I_n(\tau) = \frac{(\alpha+1)E}{1-E} \left\{ [Q + (2-r)R] + nQ - (\alpha+1)n(n+1) \right\} \\ Y(\tau) = \int_0^\tau V(s) ds. \end{cases} + V^2 - dV/d\tau,$$

すなわち得らぬ結果 [2][8] から, 以下の事加合かる。

$$(i) \exists C > 0, \delta > 0; \quad |E(\tau)| \leq C e^{-\delta\tau}$$

$$(ii) I_n(\tau) \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\alpha+1)(r-1)}{r} \right\}^2 (\equiv I_\infty) \text{ as } \tau \rightarrow \infty.$$

$$(iii) I_n(\tau) = \frac{1}{2} I_\infty \text{ なる } \tau \text{ を } T_n \text{ とかくと,}$$

$$T_n = O(\log n).$$

さて, 次の命題の成立する事が, 確かめらる。

命題 3.2. w を 2階微分方程式:

$$w''(\tau) = I_n(\tau) w(\tau) \quad 0 \leq \tau < \infty \quad (15)$$

の解とする。この時,

$$u(\tau) = \frac{e^Y}{(\alpha+1)((n+2)r-1)} \left[w' + \left\{ V + (\alpha+1)(n+1) \right\} w \right]$$

$$v(\tau) = \frac{r e^Y}{(\alpha+1)((n+2)r-1)} \left[w' + \left\{ V - \frac{(\alpha+1)(r-1)}{r} \right\} w \right]$$

なる $\vec{w}(\tau) = (u(\tau), v(\tau))$ は, 奇次方程式 (13) の解である。

次に、2階方程式(15)の基本解を作ろう。

命題 3.3.

方程式(15)は、以下の評価を満足するような、一次独立な解 $w_1^{(n)}, w_2^{(n)}$ をもつ。(K_1 は n, τ によらない定数).

$$(i) |w_1^{(n)}(\tau)|, |w_1^{(n)'}(\tau)| \leq \begin{cases} K_1 & (0 \leq \tau \leq T_n) \\ K_1 e^{\int_{T_n}^{\tau} \sqrt{I_n(s)} ds} & (T_n \leq \tau) \end{cases}$$

$$(ii) |w_2^{(n)}(\tau)|, |w_2^{(n)'}(\tau)| \leq \begin{cases} K_1 & (0 \leq \tau \leq T_n) \\ K_1 n e^{-\int_{T_n}^{\tau} \sqrt{I_n(s)} ds} & (T_n \leq \tau) \end{cases}$$

証明. $\tau \geq T_n$ のとき, $w_1^{(n)}(\tau)$ を $w'' = I_n(\tau) w$ の解で, $w_1^{(n)}(T_n) = 1$, $w_1^{(n)'}(T_n) = \sqrt{I_n(T_n)}$ なるものとする. 比較定理を用いて, (i) を示せる. $w_2^{(n)}(\tau) = w_1^{(n)} \int_{\tau}^{\infty} \frac{ds}{w_1^{(n)2}}$ とおけば, やはり比較定理により (ii) を得る. $0 \leq \tau \leq T_n$ に対しては, もう少し詳しい解析が必要であるが, ここでは割愛する。

さて, 定数 $k_{ij}^{(n)}$ ($i, j = 1, 2$) を適当にとり,

$$\begin{cases} u_i^{(n)}(\tau) = \frac{e^{\Upsilon(\tau)}}{(\alpha+1)(n+2)r-1} \left[k_{i1}^{(n)} (w_1^{(n)'} + (V(\tau) + (\alpha+1)(n+1)) w_1^{(n)}) \right. \\ \quad \left. + k_{i2}^{(n)} (w_2^{(n)'} + (V(\tau) + (\alpha+1)(n+1)) w_2^{(n)}) \right], \\ w_i^{(n)}(\tau) = \frac{r e^{\Upsilon(\tau)}}{(\alpha+1)(n+2)r-1} \left[k_{i1}^{(n)} (w_1^{(n)'} + (V - \frac{(\alpha+1)(r-1)}{r}) w_1^{(n)}) \right. \end{cases}$$

$$\left\{ + k_{12}^{(n)} (w_2^{(n)'} + (\nabla - \frac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}) w_2^{(n)}) \right] \quad (16)$$

(命題 3.2 より, このらの $(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})$ は, 奇次方程式の解である) が, 初期条件: (13)

$$\begin{pmatrix} u_1^{(n)}(0) \\ v_1^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_2^{(n)}(0) \\ v_2^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満すようにとる。このように $k_{ij}^{(n)}$ が存在する事は容易に確かめられる。こうして得られた関数の組 $(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})$ を用いて,

$$\Phi_n(\tau) = \begin{pmatrix} u_1^{(n)}(\tau) & u_2^{(n)}(\tau) \\ v_1^{(n)}(\tau) & v_2^{(n)}(\tau) \end{pmatrix}$$

なる行列を作れば, Φ_n は方程式 (13) の基本解行列である。これを解の公式 (14) に代入し, その第 2 成分を調べれば,

$$\begin{aligned} \psi_n(\tau) &= C_n^{(1)} v_1^{(n)}(\tau) + C_n^{(2)} v_2^{(n)}(\tau) \\ &+ v_1^{(n)}(\tau) \int_0^\tau \frac{1}{\det \Phi_n(s)} [F_n^{(1)}(s) v_2^{(n)}(s) - F_n^{(2)}(s) u_2^{(n)}(s)] ds \\ &+ v_2^{(n)}(\tau) \int_0^\tau \frac{1}{\det \Phi_n(s)} [-F_n^{(1)}(s) v_1^{(n)}(s) + F_n^{(2)}(s) u_1^{(n)}(s)] ds \end{aligned}$$

となる。($n \geq 1$ のとき, $(C_n^{(1)}, C_n^{(2)}) = (0, 0)$ である事に注意). $W_n^{(n)}$ の性質 (命題 3.3) 及 v^n , $\vec{F}_n$ の具体的な表示を用いて, この式を調べれば, $\psi_n(z)$ に関する, n , z についての評価として,

$$|\psi_n(z)| \leq K_2 \left\{ \overbrace{|\psi_n(0)|}^{+|\varphi_n(0)|} + \sup_{z \geq 0} |\vec{Y}_{n-1}(z)| + |\lambda_n| \right\}$$

$$|\psi_n'(z)| \leq K_2 E(z) \left\{ \overbrace{|\psi_n(0)|}^{+|\varphi_n(0)|} + \sup_{z \geq 0} |\vec{Y}_{n-1}(z)| + |\lambda_n| \right\}$$

なる不等式が得られる。ここで K_2 は, n , z によらない定数 (以下 K_i でそのような定数を表わすものとする)。

さて, この $\psi_n(z)$ を既知として, 方程式 (10) の才一式を, φ_n についての線型微分方程式とみなす。これは容易に積分できて, $\varphi_n(z)$ が z について有界であるという条件を課せば, λ_n が $\vec{Y}_{n-1}$ に応じて一意的に定まり, そのような λ_n に対して不等式:

$$|\lambda_n|, |\varphi_n(z)|, |\varphi_n'(z)| \leq K_3 \left\{ |\varphi_n(0)| + |\psi_n(0)| + \sup_{z \geq 0} |\vec{Y}_{n-1}(z)| \right\}$$

が得られる。更に (11) を用いるなら, 線型方程式 (9) の解の評価として, 結局次の命題を示せたことになる。

命題 3.4. 線型方程式(9) の解に対し, $\varphi_n(z)$ に関して τ について有界という条件から, λ_n が一意に定まり, さらに不等式:

$$|\varphi_n(z)|, |\varphi'_n(z)|, |\psi_n(z)|, |\psi'_n(z)|, |\chi_n(z)|, \\ |\chi'_n(z)|, |\lambda_n|$$

$$\leq K_4 \{ |C_n^{(1)}| + |C_n^{(2)}| + |C_n^{(3)}|$$

$$+ \sup_{\tau \geq 0} |\vec{\gamma}_{n-1}(\tau)| \}$$

が成立する。

この命題より, $\vec{X}(z, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{X}_n(z) y^n$, $\Delta(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n$ は, $\vec{Y}(z, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_n(z) y^n$ に対する線型方程式(6) の解となる事が分かる。

§4. 非線型方程式(6) の解の存在.

さて, 上に得られた, 線型方程式についての結果を用いて, 非線型方程式(6)の解の存在を証明しよう。問題を不動点定理にのせるために, 次のような関数空間を定義する。ただし, $\bar{y} \in (0, 1)$ を固定し, 変数は $0 \leq \tau < \infty$, $0 \leq y \leq \bar{y}$ とする。

$$\Omega_0 = \{ \varphi(\tau, y) \mid \varphi(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau) y^n, \varphi_n(\tau) \in \mathbb{C}^1, \\ \|\varphi\|_0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geq 0} \{ |\varphi_n(\tau)| + |\varphi'_n(\tau)| \} \bar{y}^n < \infty \}$$

$$\Omega_1 = \{ \Lambda(y) \mid \Lambda(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n, \\ \| \Lambda \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \bar{y}^n < \infty \},$$

$$\Omega = \{ \mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, \Lambda) \in \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_1, \\ \| \mathbb{X} \| = \| \varphi \|_0 + \| \psi \|_0 + \| \chi \|_0 + \| \Lambda \|_1 \}.$$

Ω がBanach空間となる事は容易に確かめられる。さて(6)の右辺の非線型項 $\vec{\gamma}$ は、(7)から $\mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, \Lambda)$ によって定められるが、この対応を $\vec{\gamma}(\mathbb{X})$ と書く。 $\vec{\gamma}(\mathbb{X})$ の性質を調べる必要がある。

命題 4.1. $\mathbb{X} \in \Omega$, $\bar{y} \| \mathbb{X} \| < 1$ に対し $\vec{\gamma}(\mathbb{X})$ は

$$\vec{\gamma}(\mathbb{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\gamma}_n(\tau) y^n$$

と中級数に展開され、さらに不等式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geq 0} |\vec{\gamma}_n(\tau)| \bar{y}^n \leq \frac{K_5}{(1 - \bar{y} \| \mathbb{X} \|^2)^2} (\| \mathbb{X} \|^3 + \| \mathbb{X} \|^2)$$

が成り立つ。

次に $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \Omega$ に対し, $\vec{\gamma}(\mathbb{X}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\gamma}_n^{(i)}(\tau) y^n$ ($i=1,2$) とかけば、次の命題も成立する。

命題 4.2. $R > 0$, $0 < d < 1$ と固定し, $\bar{y}$ は $\bar{y} R \leq d$ と

満すとする。この時、 $X_i \in \Omega$ が $\|X_i\| \leq R$ であれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z \geq 0} |\vec{\gamma}_n^{(1)}(z) - \vec{\gamma}_n^{(2)}(z)| \overline{y}^n$$

$$\leq K_6(d) \|X_1 - X_2\|.$$

ここで $K_6(d)$ は d にのみ依存する定数である。

命題 4.1, 4.2 の証明は、(7) で与えられる非線型項 $\vec{\gamma}$ の形が複雑であるから、ノルムの定義にもとづいて、かなりの計算をしなければならぬので、ここでは省略する。

以上の準備のもとに、問題 (6) を、 Ω での作用素の不動点を求める問題として定式化しよう。まず $X \in \Omega$ が与えられると、(7) により $\vec{\gamma}(X)$ が定まり、命題 4.1 より、それは y について中級数に展開される。次に、このような $\vec{\gamma}$ に対して、

§3 で述べた通り、線型方程式 (6) は、 y について中級数であらわされる解をもつ。この解を $\tilde{X}$ とすれば $\tilde{X} \in \Omega$ である。すなわち、 $X \in \Omega$ に対し、(6) の解 $\tilde{X} \in \Omega$ が定まる。この対応を T と書く。この T が不動点 X をもつなら、不動点 $X = (\varphi, \psi, \chi, \Lambda)$ が、非線型方程式 (6) の解となる。そこで、 y を適当に小さくと、た時、写像 T が Ω 内に不動点をもつ事を証明しよう。それには、以下の 2 つの命題を

示せばよい。(縮小写像の原理)

(i) $\bar{y}$ を適当にとれば, T は Ω のある閉球 $B = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leq R_B\}$ を, その自身の中へうつす.

(ii) T は, その閉球 B において縮小的である. すなわち, ある定数 $k \in (0, 1)$ が存在して, 任意の $x_i \in B$ ($i=1, 2$) に対し, 不等式: $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq k \|x_1 - x_2\|$ が成立する.

(i) の証明: $R_B > 0$ と $R_B > K_4 \|\vec{c}\|_1$, $\alpha \in (0, 1)$ を固定し, $\bar{y}$ は $\bar{y} R_B \leq \alpha$ なるものとする. $x \in B$ に対し, 命題 3, 4, 4.1 より

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq K_4 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |\vec{c}_n| \bar{y}^n + \bar{y} \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \geq 0} |\vec{\Gamma}_n(t)| \bar{y}^n \right\} \\ &\leq K_4 \|\vec{c}\|_1 + \bar{y} K_4 K_5 (R_B^3 + R_B^2) / (1-\alpha)^2. \end{aligned}$$

この右辺は, $R_B > K_4 \|\vec{c}\|_1$ であるから, $\bar{y}$ を十分小さくとれば, R_B より小さくできる. つまり, このように決めた, $R_B, \bar{y}$ に対し, T は B を B 自身の中へ写す事になる.

(ii) の証明 上で定めた $R_B, \bar{y}$ を用いる. $x_i \in B$ ($i=1, 2$) とする. この時, $Tx_1 - Tx_2$ は, 方程式(6)において, 右辺の $\vec{y}$ を $\vec{y}(x_1) - \vec{y}(x_2)$ に, 初期値を $\vec{0}$ としたものの解

であるから、やはり、命題 3.4 及び 4.2 が使えて、

$$\begin{aligned} \|T\mathbb{X}_1 - T\mathbb{X}_2\| &\leq K_4 \overline{y} \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geq 0} |\vec{\gamma}_n^{(1)}(\tau) - \vec{\gamma}_n^{(2)}(\tau)| \overline{y}^n \\ &\leq K_4 K_6 \overline{y} \|\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2\| \end{aligned}$$

となる。よって、必要なら $\overline{y}$ をさらに小さくとり、 $k = K_4 K_6 \times \overline{y} < 1$ なるものとするれば、 T は B で縮小的である。

こうして、次の定理が得られた。

定理 $\overline{y}$ を適当に小さく取れば、方程式 (6) は、 y について中級数で表わされる解をもつ。この解 $\varphi, \psi, \chi, \Lambda$ から、式 (5) によって、 $f(x, y), g(x, y), h(x, y), \lambda(y)$ をつくれば、これらは問題 (1) (2) (3) の解である。

参考文献

- [1] 桜井明: 爆風の理論, 「研加」12 (1980) 3-12
- [2] A. Sakurai: Blast Wave Theory, Basic Development in Fluid Dynamics I, (Academic Press, 1965) 309
- [3] V. T. Korobeinikov 他: The Theory of Explosions, Trans. U.S. Dept. Commerce, FPRS 14 (1962)

- [4] G. B. Whitham : Linear and Nonlinear Waves,
(Wiley 1974)
- [5] 東野文男 : 爆風の理論, 「技がし」 5 (1973) 1-18.
- [6] G. G. Back & J. H. Lee : Higher-Order
Perturbation Solutions for Blast Waves, AIAA
Journal, 7 (1969) 742-744.
- [7] 桜井明 : 爆風解の計算, 才11回 流体力学講演集 (1977)
174
- [8] 桜井明 : 爆風の伝播及び構造に関する理論的研究.
東京電機大学研究報告 3 (1955) 51-96