

一般の ultradifferentiable class における

擬微分作用素の理論について.

(On theories of pseudo-differential operators
of general ultradifferentiable class.)

京大理学部 松本和一郎 (Waichiro MATSUMOTO)

§1. Introduction. C^∞ (又は $\mathcal{B}$) における擬微分作用素
の理論はよく研究されてゐる。(J.J. Kohn and L. Nirenberg
[10], L. Hörmander [7], H. Kumano-go [16], [17] 他.)

一方, Gevrey classes, 特に analytic class においてもそれ
はかなり研究されてゐる。(L. Boutet de Monvel and P. Kree
[3], L. R. Volevič [27], S. Hashimoto, T. Matsuzawa and
Y. Morimoto [6], L. Boutet de Monvel [2], K. Taniguchi
[25], F. Trèves [26], M. S. Baouendi, C. Goulaouic and
G. Métivier [1] 他.) しかしながら, C^∞ においては,
特に H. Kumano-go の一連の仕事により擬微分作用素と
その表象の漸近展開の形式和の空間の構造が十分に解明され
たのに反して, Gevrey classes においてはこれらの構造は,

なお十分に説明されたとは...が...。たとえば、Gevrey classes における擬微分作用素は $-\infty$ 次の operators を modulo として star algebra を成すことは多くの人が指摘しているが、modulo class なしに exact に algebra になるものであろうか？ 更に $-\infty$ 次の operators を modulo として star algebra になることの証明についても、必ず作用素の積の表象がとるであろう漸近展開を想定し、その漸近展開を表象と別につくり、作った表象と本来の積の表象との差が $-\infty$ 次の作用素の表象になることを示している。作用素の積について論じるのであろうか、本来その漸近展開はもう必要なくても証明できるのではな...か？ 等々。

上の疑問のうち前者は肯定的であることを示せよ。(ただし、"擬微分作用素"の定義は多様でありうるから、あくまで、"標準的"な定義を採用した場合についてである。) 他方後者は肯定的であると信じ、講演でもそのように報告したが見落としがあって、今のところ不明である。もちろん、ある場合には可能なのだが、その証明できた場合と...のが、

Gevrey class を含まないのであるが、"わゆる弱分離性" (後述) も満たす class であり、いここかとまどっている。

話が少し前後したが、構造を説明した...という目的のために、あえて Gevrey classes に限らず一般の ultradifferen-

tiabile classes βIMn (定義は後出) において擬微分作用素理論を試み. それがうまくいくためには IMn に対してどのような条件をおけばよいかを調べる。

なお, Gevrey classes 以外に (偏) 微分方程式論において必要となる $\text{ultradifferentiable classes (= ul. d. classes)}$ があのかという点については, ささやかながうあふと, 筆者は考えている。(W. Matsumoto [19], [20] 等.) しかしながら, 本稿においては応用の点は一応考えに入れずに論をすすめる。

§2. 記号, 定義及び仮定. 本稿では $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ を擬微分作用素 (= p.s. d. op.) の表象にのみ依存する定数として用いる。これは行ごとに異なってもよいとする。

$K \subset \subset \Omega$ は $K \subset \Omega$ の compact subset で $\partial K \cap \partial \Omega = \emptyset$ を意味する。 $K \rightarrow \Omega$ は列 $\{K\}$ が $K \subset \subset \Omega$ かつ $\bigcup K = \Omega$ を満たすことを意味する。

$\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ とおく。 $\alpha, \alpha', \alpha^{(k)} (1 \leq k \leq n) \in \mathbb{Z}_+^l$ に対して $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$, $\alpha \pm \alpha' = (\alpha_1 \pm \alpha'_1, \dots, \alpha_l \pm \alpha'_l)$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_l!$, $\alpha \geq \alpha'$ if $\alpha_j \geq \alpha'_j \ (\forall j)$, $\binom{\alpha}{\alpha^{(k)}}_n = \alpha! / \alpha^{(1)}! \cdots \alpha^{(n)}! \ (\sum_k \alpha^{(k)} = \alpha)$, $\binom{\alpha}{\alpha'} = \alpha! / \alpha'! (\alpha - \alpha')!$ ($\alpha \geq \alpha'$), $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_l})^{\alpha_l}$, $D_x^\alpha = (-i)^{|\alpha|} (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$, $p_{(\alpha)}^{(\beta)} = D_x^\alpha (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^\beta p_{(1, \bar{z})}$ とおく。

$|\bar{z}| = (\sum_{j=1}^l \bar{z}_j^2)^{1/2}$, $\langle \bar{z} \rangle = (1 + |\bar{z}|^2)^{1/2}$ とおこう。これは

実軸のある錐近傍内で analytic である。

$\mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}(\xi) \equiv \int e^{-\sqrt{-1}x \cdot \xi} f(x) dx$, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] \equiv \int e^{\sqrt{-1}x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$
 $(d\xi = (2\pi)^{-l} d\xi)$ とおく。ある函数空間 X の任意の元 φ の
 Fourier 変換が可能のとき、 φ の Fourier image $\hat{\varphi}$ 全体のなる
 空間を $\mathcal{F}[X]$ とかく。 $\mathcal{F}[X]$ の dual space の元 f に対して、
 f の Fourier image $\hat{f}$ を $\langle \hat{f}, \varphi \rangle \equiv \langle f, \hat{\varphi} \rangle$ で定義する。
 $\hat{f}$ は X の dual space の元である。

$a(x, \xi) \in E(\mathbb{R}^{2l})$ が

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^l, \exists C(\alpha, \beta) > 0$$

$$|a_{(\alpha)}^{(\beta)}(x, \xi)| \leq C \langle \xi \rangle^m, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2l},$$

をみたすとき、 $e^{-\sqrt{-1}x \cdot \xi} a(x, \xi)$ の振動積分を次のように定義する。

$$Os - \iint e^{-\sqrt{-1}x \cdot \xi} a(x, \xi) dx d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-\sqrt{-1}x \cdot \xi} \chi(\varepsilon x) \chi(\varepsilon \xi) a(x, \xi) dx d\xi.$$

==: χ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$ の元で $\chi(0) = 1$ をみたすものである。

振動積分は χ のとり方に依存しない。その詳しい性質は、

H. Kumano-go [17] をみられたい。

正数列 $\{M_n\}$, 正数 R 及び $\mathbb{R}^l$ の集合 Ω に対して

$$\mathcal{B}\{M_n\}_R(\Omega) = \{f(x) \in C^\infty(\Omega) \mid \exists C; \text{depending on } f \text{ s.t.}$$

$$|f^{(\alpha)}(x)| \leq C R^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \text{ in } \Omega \text{ for } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^l \}$$

$$\mathcal{D}_L\{M_n\}_R = \{f(x) \in \mathcal{D}_L^\infty(\mathbb{R}^l) \mid \sum_x \|f^{(\alpha)}\|_{L^2}^2 / (R^{|\alpha|} M_{|\alpha|})^2 < \infty\}$$

とかく。前者は Banach sp., 後者は Hilbert sp. となる。

class $\{M_n\}$ の ul. d. spaces を次のように定義する。

$$\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega) \equiv \text{ind-lim}_{R \rightarrow \infty} \mathcal{B}\{M_n\}_R(\Omega),$$

$$\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega) \equiv \text{proj-lim}_{K \rightarrow \Omega} \text{ind-lim}_{R \rightarrow \infty} \mathcal{B}\{M_n\}_R(K),$$

$$\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega) \equiv \text{ind-lim}_{K \rightarrow \Omega} \text{ind-lim}_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{B}\{M_n\}_R(K) \cap \mathcal{D}(K)),$$

$$\mathcal{D}_L\{M_n\} \equiv \text{ind-lim}_{R \rightarrow \infty} \mathcal{D}_L\{M_n\}_R.$$

特に $M_n = n!^\nu$ ($\nu > 0$) が ν 次の Gevrey class を与える。更に

$\nu = 1$ であれば real analytic class となる。 $\Omega = \mathbb{R}^d$ のとき、

(Ω) を略す。又、特に Ω を明示する必要のないときも (Ω) を略す。これらの空間及びその dual spaces の位相は、

H. Komatsu [12] に見えられた。特に、 $\mathcal{D}_L\{M_n\} = \text{proj-lim}_{R \rightarrow \infty} \mathcal{D}_L\{M_n\}_R$ で、Fréchet space である。

ul. d. sp.'s の研究に関しては S. Mandelbrojt [18] に組織的に述べられている。ここでは、その他の結果も含めて、必要な事柄をまとめておく。

Kolmogoroff の定理により、 $\mathcal{B}\{M_n\}$, $\mathcal{D}\{M_n\}$ においては $\{M_n\}$ を対数的に凸なものに、空間をかえりこむことなくとりかえられる。更に、Goury の定理により、 $\liminf (M_n/n!)^{1/n} > 0$ ならば、 $\mathcal{E}\{M_n\}$ においても同様である。(後にわれわれは non-quasianalytic のための条件 $\sum_n M_n^{-1/n} < \infty$ を仮定するから $\liminf (M_n/n!)^{1/n} > 0$ は自然に成り立つ。(W. Rudin [23].))

したがって次の仮定を導入するのはかまうまい。

仮定 1. $\{M_n\}$ は対数的に凸である。

このとき次のことが成り立つ。

命題 2.1. i) $B\{M_n\}(\Omega)$, $E\{M_n\}(\Omega)$ は algebra を成す。

$E\{M_n\}_{(a)}$ の元と $\mathcal{D}\{M_n\}_{(a)}$ の元の積は $\mathcal{D}\{M_n\}_{(a)}$ へ、 $B\{M_n\}_{(a)}$ の元と

$\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega)$ の元の積は $\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega)$ にそれぞれ属す。

ii) $\{M_n\}$ が次の条件

$$(R) \quad \exists C > 0, \quad (M_m/m!)^{1/m} \leq C (M_n/n!)^{1/n} \quad (1 \leq m \leq n).$$

をみたすならば、 $E\{M_n\}_{(a)}$ は zero に等でない元での除法に、

$B\{M_n\}(\Omega)$ は一様に zero に等でない元での除法に閉じている。

iii) $\{M_n\}$ が次の条件

$$(K) \quad \exists C > 0, \quad (M_m/m!)^{1/(m-1)} \leq C (M_n/n!)^{1/(n-1)} \quad (2 \leq m \leq n).$$

をみたすならば、 $E\{M_n\}$ と $B\{M_n\}$ はそれぞれ合成関数をつくること、陰関数の定理、常微分方程式の解を求める

ことに閉じている。

証明に就しては、i) は容易、ii) については W. Rudin [23],

iii) については H. Komatsu [13], [14], [15] をみられたい。

$\lim_n (M_n)^{1/n} = \infty$ としよう。(これは後で non-quasianalytic のための条件を仮定すると、自然に満たされる。) $\{M_n\}$ の元は有限個を変更しても空間としては同じものを与えよから、 $\{M_n\}$ は対数的に凸のみならず、単調増大かつ $M_0 = 1$ として

よ。 $a_n = \log M_n$ とおこう。 次の函数は well-defined である。

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} r^n / M_n \quad (r > 0), \quad H(t) = \sup_{n \geq 0} \{nt - a_n\}.$$

$H(t)$ は 単調増大、下に凸な折線である。 H から石微分可能である。 $(\frac{d}{dt})_r$ を石微分として

$$h(t) = (\frac{d}{dt})_r H(t)$$

とおこう。 次の関係式が成り立つ。

$$T(r) = \exp H(\log r), \quad r \cdot (\frac{d}{dr})_r T(r) / T(r) = h(\log r).$$

実は、 $T(r)$ 及び $H(t)$ の定義において、 $\sup$ は $n = h(\log r)$, $n = h(t)$ で $\max$ として与えられる。 $\{M_n\}$ の対数的凸性から次の等式が成り立つ。

$$(*) \quad M_n = \sup_{r > 0} r^n / T(r), \quad a_n = \sup_t \{nt - H(t)\}.$$

この $\sup$ は 2 点 2 点、 $r = M_{n+1}/M_n$, $t = a_{n+1} - a_n$ で与えられる。

$\{\tilde{M}_n\}$ があて正数 C_1, R_1, C_2, R_2 に対して

$$C_1 R_1^n M_n \leq \tilde{M}_n \leq C_2 R_2^n M_n$$

をみたすとき、 $\{\tilde{M}_n\}$ は $\{M_n\}$ と同等であるという。 $\{M_n\}$ と $\{\tilde{M}_n\}$ は同じ cl. d. sp. を与える。

$\tilde{T}(r)$ があて正数 C_1, R_1, C_2, R_2 に対して

$$C_1 T(r/R_1) \leq \tilde{T}(r) \leq C_2 T(r/R_2)$$

をみたすとき、 $\tilde{T}(r)$ は $T(r)$ と同等であるという。 $T(r), \tilde{T}(r)$

から前頁(*)の式で $M_n, \hat{M}_n$ を定義すると $\{M_n\}$ と $\{\hat{M}_n\}$ は
 同等になる。ul.d.sp.の定義のしかたにより、われわれは
 Class $\{M_n\}$ の ul.d.sp. を考察するにあたり、 $\{M_n\}, T(r)$ の
 かわりに同等な $\{\hat{M}_n\}, \hat{T}(r)$ を用いてもよい。

$$L^2[W(\mathbb{R})] = \{g(\mathbb{R}) ; \text{measurable かつ } g(\mathbb{R})W(\mathbb{R}) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

とおく。

命題 2.2. $\mathcal{F}[\mathcal{D}[\{M_n\}]] = \text{ind-lim}_{R \rightarrow \infty} L^2[T(\langle \mathbb{R} \rangle / R)]$
 $\mathcal{F}[\mathcal{D}'[\{M_n\}]] = \text{proj-lim}_{R \rightarrow \infty} L^2[T(\langle \mathbb{R} \rangle / R)^{-1}].$

さて、これから、ps.d.op.の理論を考察するにあたり、 $\{M_n\}$
 に課せらるであろう条件を列挙する。可微分性、弱分離性、
 分離性で、しつこくにより強い条件となる。 $\limsup A_n/g(n) < \infty$
 のとき $A_n = O(g(n))$, $\lim A_n/g(n) = 0$ のとき $A_n = o(g(n))$ とかく。

命題 2.3. (可微分性) 次の条件はすべて同値である。

(D.0) $\forall d \in \mathbb{Z}_+^d, f \in \mathcal{B}(\{M_n\})$ ならば $f(u) \in \mathcal{B}(\{M_n\})$.

(D.1) $\exists R > 1, M_{n+1} \leq R^n M_n \quad (n \gg 1)$. (可微分条件)

(D.2) $\log M_n = O(n^2)$. (D.3) $\log(M_{n+1}/M_n) = O(n)$.

(D.4) $\exists K > 0, T(r) = r^{K \log r} \quad (r \gg 1)$. (D.4') $\liminf_t H(t)/t^2 > 0$

(D.5) $\liminf_t h(t)/t > 0$.

(D.6) $\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists R > 1, T(r) \geq r^m T(r/R) \quad (r \gg 1)$.

命題 2.4. (弱分離性). 次の条件はすべて同値である。

$$(W.S.1) \quad \exists R > 1, \exists \{N_n\}, M_{n+m} \leq R^n M_n N_m \quad (n, m \gg 1) \quad (\text{弱分離条件}).$$

$$(W.S.2) \quad \forall m > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (M_{n+m}/M_n)^{1/n} = 1.$$

$$(W.S.3) \quad \log M_n = o(n^2). \quad (W.S.4) \quad \log(M_{n+1}/M_n) = o(n).$$

$$(W.S.5) \quad \forall K > 0, \exists r_0 > 0, T(r) \geq r^K \log r \quad (r \geq r_0).$$

$$(W.S.5') \quad \lim H(t)/t^2 = \infty. \quad (W.S.6) \quad \lim h(t)/t = \infty.$$

$$(W.S.7) \quad \exists R > 1, \forall m > 0, T(r) \geq r^m T(r/R) \quad (r \gg 1).$$

命題 2.5. (分離性) 次の二つの条件は同値である。

$$(S.1) \quad \exists R > 1, M_{n+m} \leq R^{n+m} M_n M_m \quad (n, m \gg 1) \quad (\text{分離条件})$$

$$(S.2) \quad \exists R > 1, T(r) \geq T(r/R)^2 \quad (r \gg 1).$$

命題 2.6. 条件 (S.1) の下には 次の同値な二つが成り立つ。

$$(S.3) \quad \exists \nu > 0, M_n \leq n!^\nu \quad (n \gg 1).$$

$$(S.4) \quad \exists \nu > 0, M_{n+1}/M_n \leq n^\nu \quad (n \gg 1).$$

$$(S.5) \quad \exists K > 0, T(r) \geq \exp r^K, \quad (r \gg 1).$$

命題 2.3 は S. Mandelbrojt [18] に、命題 2.4 ~ 2.6 は

W. Matsumoto [21] に与えられた。

快

われわれは推論を明にす。すなわち non-quasianalytic のための (必要十分) 条件を仮定しよう。

仮定2. $\{M_n\}$ は non-quasianalyticity 条件 をみたす:

$$(C.D) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (M_n)^{-1/n} < \infty.$$

注意. 仮定2 により, analytic class を含む quasi-analytic

class を排除したか. 以下のほとんどの結果は $\liminf (M_n/n!)^{1/n} > 0$ である限り (他の仮定と矛盾しない限り) quasianalytic class でも なり得る.

もちろん, $\{M_n\} = \{0\}$ であるから, 証明には注意を要す.

§3. ul.d. class における p.s.d. op's に要求する性質と,

漸近展開にあらわれ形式表象の定義.

C^∞ における擬微分作用素といっても, 目的に応じて, その定義は異な. しかし, その本質は共通であるから. $\equiv$ である. H. Kumano-go [17] でとりあつかわれている. $\mathbb{R}^d$ に標準化されたものを規準にとり, C^∞ における擬微分作用素というときは, それのみを考へる. 更に, $\rho=1, \delta=0$ とする.

$\rho-\delta < 1$ のときは $-\infty$ 次の作用素の値域が表象の滑らかさを保たない等より複雑となる.

実体は今から定義する³ のであるが, 記号として次のものを導入する. $\mathcal{B}\{M_n\}$ 上の擬微分作用素の全体を $\mathcal{S}\{M_n\}$, その表象の全体を $\mathcal{S}[M_n]$, 表象の漸近展開の形式和の全体を $\mathcal{S}_{\text{form}}[M_n]$, 形式和のうち特に $\mathbb{N}$ について $\mathbb{N}$ 斉次のものの全体を $\mathcal{S}_{\text{hom}}[M_n]$ とかく. $\mathcal{S}[M_n]$ の元 $p(x, \xi)$ が $[M_n]$ の意味で $\mathcal{S}[M_n]$ の元 $\sum_{\xi} p_i(x, \xi)$

を漸近展開にもつて $p(x, \xi) \sim_{[M_n]} \sum p_i(x, \xi)$ とかく。このとき $p(x, \xi)$ を true symbol, $\sum p_i(x, \xi)$ を formal symbol と呼ぶ。
 なお、 C^∞ (又は $\mathcal{D}$) 上の ps.d. op's に関する記号としては上記のものから $[M_n]$ をとったものを用いる。

天下りではあない

(次の七つを $\mathcal{S}[M_n], \mathcal{D}[M_n], \mathcal{E}[M_n]$ に要請しよう。)

- I. $\mathcal{S}[M_n], \mathcal{D}[M_n], \mathcal{E}[M_n]$ は $\mathcal{S}(=\mathcal{S}_{1,0}), \mathcal{D}(=\mathcal{D}_{1,0}), \mathcal{E}$ のそれぞれ subset である。又、 $p \sim_{[M_n]} \sum p_i$ は $p \sim \sum p_i$ を内包する。
- II. $\mathcal{S}[M_n]$ は $\mathcal{B}[M_n]$ 係数の微分作用素をすべて含む。
- III. $\mathcal{S}[M_n]$ の元は $\mathcal{D}_{L^2}[M_n]$ 上、又 $\mathcal{D}[M_n]$ から $\mathcal{E}[M_n]$ へ有界である。
 (III' $\mathcal{D}_{L^2}[M_n]$ から $\mathcal{D}_{L^2}[M_n + \ell_0]$ へ、又、 $\mathcal{D}[M_n]$ から $\mathcal{E}[M_n + \ell_0]$ へ有界である。 ℓ_0 は op. の order と次元 ℓ の n によって決まる定数である。)
- IV. $\mathcal{S}[M_n]$ は star algebra を成す。
 (必要ならば $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ を modulo として。)
- V. $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の元は $\mathcal{D}'[M_n]$ から $\mathcal{D}_{L^2}[M_n]$ へ、又 $\mathcal{E}'[M_n]$ から $\mathcal{E}[M_n]$ へ有界である。
 (V' $\mathcal{D}'$ から $\mathcal{D}_{L^2}[M_n]$ へ、 $\mathcal{D}_{L^2}[M_n]$ から $\mathcal{D}_{L^2}^\infty$ へ、又 $\mathcal{E}'$ から $\mathcal{E}[M_n]$ へ、 $\mathcal{E}'[M_n]$ から $\mathcal{E}$ へ有界である。)
- VI. $\mathcal{S}[M_n]$ は operator product 及び formal adjoint $\sharp$ と $\flat$ に関して閉である。すなわち $\mathcal{S}[M_n]$ の元 $\sum p_i(x, \xi), \sum q_i(x, \xi)$ の operator product とは $(\sum p_i) \circ (\sum q_i) = \sum r_i$, $r_i(x, \xi) = \sum_{j+k+|\alpha| \leq n} \frac{1}{j!k!} p_i^{(j)} q_k^{(\alpha)} \partial_k^\alpha$,

formal adjoint とは $\sum p_i(x, \bar{y}) \in S[M_n]$ に対して $\sum s_i(x, \bar{y})$,

$$s_i(x, \bar{y}) = \sum_{j+|H|=i} (-1)^{|H|} \frac{1}{j!} \bar{p}_j^{(H)}(x, \bar{y}) \quad \text{のことである。}$$

VII. $S[M_n]$ の任意の元に対して、それを $[M_n]$ の意味で漸近展開にもつ $S[M_n]$ の元が存在する。

以上の七つは $\{M_n\}$ 及び $[M_n]$ をとればすべて C^∞ (又は β) 上の ps. d. op. として成り立っている。

上の七つのうち I. は ul. d. class における ps. d. op. としては不適当にも思われる。存せなうは、ul. d. class に対しては、必ずある種の ∞ 次の operator が作用可能だからである。

しかし、もし ∞ 次の op. も含む ps. d. op. の理論がうまくゆかならば、有限次の ps. d. op.'s の全体も、その subclass として、理論がうまくゆくはずである。それゆえ、 $\equiv$ では理論の可能性をさぐるという観点から、有限次の op.'s に限ることにする。

さて、上記七つのうち、II ~ V は $S[M_n]$ で肉じつ性質、VI は $S[M_n]$ で肉じつ性質、VII が $S[M_n]$ (すなわち $S[M_n]$) と $S[M_n]$ を結ぶものである。したがって、三つのグループをそれぞれ独立に扱えよとさうのだが、なかなかうまくいかない。 $S[M_n]$ に対する要請 VI は、さうわきに独立して示せよのでまず $S[M_n]$ の定義をして、VI を示そう。 $S[M_n]$ の定義としては以下のもの (又は注意 1. にあるもの) が自然であらう。

定義 3.1. $\Sigma p_i(x, z) \in S^m(M_n)$

$\Leftrightarrow \exists r_0 > 0, \exists R > 0, \exists C > 0$ depending on $\Sigma p_i, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^l$

$$|p_i^{(\beta)}(x, z)| \leq C R^{i+|\alpha|+|\beta|} M_{i+|\alpha|} \beta! \langle z \rangle^{m-i-|\beta|}$$

for $(x, z) \in \mathbb{R}^l \times \{\langle z \rangle \geq r_0\}$.

注意 1 これは L. Boutet de Monvel and P. Kree [3] 流のものである。

他方 F. Trèves [26], S. Hashimoto, T. Matsuyama and Y.

Morimoto [6] 流は r_0 と i, β に依存させて $d \otimes (i+|\beta|)$ に

おきかえたものについても、§3 の以下の定理は成り立つ。

== ① $(n) = (M_n)^{Y_n}$, d は Σp_i に依存する正定数である。

注意 2. Σ に関する上の評価は実軸のあの錐近傍に holomorphic に拡張できることを意味している。これは一見

強すぎるように見えるが (C^∞ の場合と比較してみよ!) VI の

ためには Σ の analytic estimate が必要である。実際、 $l \geq 2$

のとき、本質的な場合をカバーする付加条件のもとに、 VI の

ためには $\beta! \leq \limsup (L_n/n!)^{1/n} = \infty$ なる $\{L_n\}$ を用いて $L_{|\beta|}$ に

置きかえられなければならないことを示せよ。 ($\limsup (L_n/n!)^{1/n} < \infty$ は、

L_n が $n!$ と同等かより"小さい"ことを示している。)

定理 3.1. (Formal Calculus) 条件 (R) が $C=1$ で成り立つ

としよう。このとき次のことが成り立つ。

i) $S(M_n)$ は operator product 及び formal adjoint をと

ることに関じた algebra である。

ii) Elliptic operator ($\exists C > 0, |p_0(x, \xi)| \geq C|\xi|^m$ ($|\xi| \gg 1$))

に対して operator product に関する逆元が存在する。

iii) $\sum_{j=0}^m a^j(t; x, \xi) D_t^{m-j} \in a^j \in \mathcal{E}(M_n)([0, T], \mathcal{S}^j(M_n))$, $a^0 = 1$

を係数とする常微分作用素とする。 $\sum_{j=0}^m a_0^j(t; x, \xi) \lambda^{m-j} = 0$ が

$\{\lambda_k^1(t; x, \xi)\}_{k=1}^{m(1)}, \{\lambda_k^2(t; x, \xi)\}_{k=1}^{m(2)}$ ($m(1) + m(2) = m$) の互いに

分離した 2 組に分けられる根をもつとしよう。このとき、

$b^{h,j} \in \mathcal{E}(M_n)([0, T], \mathcal{S}^j(M_n))$, ($h=1, 2, 1 \leq j \leq m(h)$), $b^{h,0} = 1$

があり、 $\sum_{j=0}^{m(h)} b_0^{h,j}(t; x, \xi) \lambda^{m(h)-j} = 0$ は根 $\{\lambda_k^h(t; x, \xi)\}_{k=1}^{m(h)}$ ($h=1, 2$)

をもつ。 $\{\sum b_0^{1,j}(t; x, \xi) D_t^{m(1)-j}\} \circ \{\sum b_0^{2,j}(t; x, \xi) D_t^{m(2)-j}\} =$

$\sum a^j(t; x, \xi) D_t^{m-j}$ が成り立つ。

又これは L. Boutet de Monvel and P. Kree [3], T. Nishitani

[22] と同様にして示せる。

§4. $\mathcal{S}^m(M_n)$, $\mathcal{S}^{-\infty}(M_n)$ の定義と性質 III, IV 及び VII.

定義 3.1 から $\mathcal{S}^m(M_n)$ を次のように定義するのは自然で

ある。

定義 4.1. $p(x, \xi) \in \mathcal{S}^m(M_n)$

def $\Leftrightarrow \exists r_0 > 0, \exists R > 0, \exists C > 0$ depending on $p(x, \xi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^l, \exists C_\beta > 0$

$$|p^{(\beta)}(x, \xi)| \leq \begin{cases} C R^{|\alpha|+|\beta|} M_{|\alpha|} |\beta|! \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} & \text{in } \mathbb{R}^l \times \{\langle \xi \rangle \geq r_0\} \\ C_\beta R^{|\alpha|} M_{|\alpha|} & \text{in } \mathbb{R}^l \times \{\langle \xi \rangle \leq r_0\} \end{cases}$$

定義 4.1 の下には、残念ながら $\mathcal{S}(M_n) (= \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{S}^m(M_n))$

は modulo class としては star algebra を成すもの。その：

とは $p(z) = (1 + |z|^2)$ とある $\mathcal{B}(M_n)$ の元 $g(x)$ が

$$(p \circ g)_{(s, 0, \dots, 0)}^{(n-s, 0, \dots, 0)} \geq C 2^{-n(n-s)} M_n \langle z \rangle^{-2-(n-s)}$$

が成り立つようにとれることはよく知られている。この場合、この悪評価

値ともたいていのことは $p \circ g = 0_{S^2} - \iint e^{-\sqrt{1+y^2}} p(z+y) g(x+y) dy dy$ の

$z+y \sim 0$ の積分である。他方上の反例においても、

$$|(p \circ g)_{(x)}^{(p)}| \leq C R^{N+|p|} M_{N+|p|} \beta! \langle z \rangle^{-2}$$

は成り立っていることは注目し値である。このことは示唆

されて、modulo class としての $S^{-\infty}[M_n]$ を次のように定義

しよう。

定義 4.2. $p(x, z) \in S^{-\infty}[M_n]$

$\Leftrightarrow \exists R > 0, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^l, \exists C_\beta > 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^l,$

$$|p_{(x)}^{(\beta)}(x, z)| \leq C_\beta R^{N+|\alpha|} M_{N+|\alpha|} \langle z \rangle^{-N} \text{ for } (x, z) \in \mathbb{R}^{2l}.$$

注意 1. 弱分離条件 (W.S.1) を $\{M_n\}$ に仮定すれば上の定義は

$$|p_{(x)}^{(\beta)}(x, z)| \leq C_\beta R^{N+|\alpha|} M_{N+|\alpha|} \langle z \rangle^{-N-|\beta|} \text{ for } (x, z) \in \mathbb{R}^{2l}$$

と同値である。

注意 2. 上の定義は次の評価と同値である。

$$\exists R > 0, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^l, \exists C_\beta > 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^l$$

$$|p_{(x)}^{(\beta)}(x, z)| \leq C_\beta \langle z \rangle^{|\alpha|} T(\langle z \rangle / R)^{-1} \text{ in } \mathbb{R}^{2l}.$$

注意 3. 定義 4.1, 4.2 にあらわれる C_β は表象に依存しない

$\{L_n\}$ で $\liminf (L_n/n!)^{1/n} > 0$ を満たすものを用いて $C_\beta = C R^{|\beta|} L_{|\beta|}$

で与えられるとしても一つの閉じた体系ができる。但し、

この場合には注意 1 のような同値性は成り立たない。

なお、定義 4.2 においては $\{L_n\}$ が条件 (C.D) を満たすとする。

定義 3.1 と 4.1 より漸近展開の定義を次のように

定義しよう。

定義 4.3. $p(x, \xi) \underset{[M_n]}{\sim} \sum p_i(x, \xi)$

$\Leftrightarrow \exists r_0 > 0, \exists R > 0, \exists C > 0$ depending on p and $\sum p_i, \forall N \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^l,$

$$| (p(x, \xi) - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x, \xi))^{(p)}_{(\alpha)} | \leq C R^{N+|\alpha|+|\beta|} M_{N+|\alpha|} \beta! \langle \xi \rangle^{m-N-|\beta|}$$

for $(x, \xi) \in \mathbb{R}^l \times \{ \langle \xi \rangle \geq r_0 \}$.

注意 定義 3.1 の注意 1 に対応して定義 4.1 及び 4.3 の

r_0 を $d \oplus (N+|\beta|)$ に変更しても §4 の結果はすべて成り立つ。

さて、 $S[M_n]$ (したがって $\delta[M_n]$) が定まったので、性質 III から調べよう。II より III が成り立つには可微分条件 (D.1) が必要である。次の定理が成り立つ。この場合、§1 に因る微分の規則性は「うな」。

定理 4.1. i) $\delta^*[M_n]$ の元は $\mathcal{D} \subset \{M_{n+2}\}$ の $\mathcal{D} \subset \{M_{n+2}\} \wedge, \mathcal{D} \subset \{M_{n+2}\}$

かつ $\mathcal{D} \subset \{M_{n+2}\} \wedge$, 又 $B[M_n]$ の $B[M_{n+l_0+m}] \wedge$ 有界である。 $\equiv \equiv \equiv$

$l_0 = 2[\frac{l}{2}] + 3$ である。

ii) $\{M_n\}$ が条件 (D.1) を満たすとしよう。このとき $\delta[M_n]$ の

元は $\mathcal{D} \subset \{M_n\}$ 及び $\mathcal{D} \subset \{M_n\}^\perp$, 又 $B[M_n]$ 上有界である。

性質IVにうつろう。これは $S[M_n]$ 内部の性質であらうが、未だ $S[M_n]$ 内部の証明は確立してゐない。われわれは性質VIIを援用してIVを得ることが出来る。そのために、次の条件を導入しよう。

$$(C) \exists R_0 \geq 1, \exists C_0 \geq 0$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \log T(rs)/(1+s^2) ds \leq \log T(R_0 r) + C_0 \quad (r \gg 1).$$

$$(C^*) \exists R_1, R_2 \text{ s.t. } R_0^2 < R_1 < R_2 \quad (R_0 \text{ is } (C) \text{ of } R_0)$$

$$T(R_1 r) T(r/R_2) / T(r)^2 \text{ が有界.}$$

注意 (C^*) は以下の (C^{**}) に置きかえてもよい。

(C^{**}) $T(r)$ に同等な $\tilde{T}(r)$ があって次の条件をみたす:

$\tilde{T}(r)$ は正, $r > 0$ の錐近傍に解析的に拡張できて $\log \tilde{T}(e^t)$ は凸かつ上の錐近傍内で

$$\exists R'_0 \geq 1, \exists C'_0 \geq 0, |\tilde{T}(z)| \leq \tilde{T}(R'_0 |z|) + C'_0$$

が成り立つ。

命題 (L. Carleson [4], L. Boutet de Monvel and P. Kree [3].)

(仮定2はもろくであるとして) 可微分条件(D.1), 及び

(C) と (C^*) (又は (C^{**})) を仮定す。数列 $(C_n)_{n=0}^\infty$ が $R > 0$,

$C > 0$ に対して $|C_n| \leq CR^n M_n \quad (n \geq 0)$ をみたすとしよう。

このとき $(\frac{1}{z})^n g(0) = C_n$ をみたす $B(M_n)(\mathbb{R})$ の元 $g(t)$ が存在

す。更に $g(t)$ は実軸のあまの近傍に解析的に拡張され、あま $R_1 > 0, C_1 > 0$ により $|D_t^n g(t)| \leq C_1 R_1^n M_n$ を満足する。

この命題の系として次の定理をいう。

定理 4.2. (Formal symbol $\hat{a}$ の true symbol の構成) $\{n! M_n\}$ に $(C), (C^*)$ (又は (C^*)) を仮定する。

- i) 分離条件 (S.1) を $\{M_n\}$ に仮定しよう。 $S^m[M_n]$ の任意の元 $\sum p_i(x, \xi)$ に対して $p \sim_{[M_n]} \sum p_i$ となる $S^m[M_n]$ の元 $p(x, \xi)$ があふ。
- ii) 弱分離条件 (W.S.1) を $\{M_n\}$ に仮定しよう。 $S^m[M_n]$ の任意の元 $\sum p_i(x, \xi)$ に対して $p^1(x, \xi), p^2(x, \xi)$ が S^m に存在して次の評価とみたす。

- $\{L_n\}$ を (C, D) とみたすようにとると、これに応じて $p^1(x, \xi) \in S^m$ があふ、
 $\exists R > 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+, \exists C_N, \exists r_N > 0$

$$|(p^1(x, \xi) - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x, \xi))^{(p)}_{(\alpha)}| \leq C_N R^{|\alpha|} M_{N+1} L_{|\beta|} |\xi|^{-N-|\beta|}$$

for $(x, \xi) \in \mathbb{R}^l \times \{|\xi| \geq r_N\}$.

- $\exists R > 0, \exists r_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^l, \exists C_\alpha > 0$

$$|(p^2(x, \xi) - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x, \xi))^{(p)}_{(\alpha)}| \leq C_\alpha R^N M_N \beta! |\xi|^{-N-|\beta|}$$

for $(x, \xi) \in \mathbb{R}^l \times \{|\xi| \geq r_0\}$.

注意 ii) の p^2 は命題にさうず、cutoff function を用いてつく。

さて、上の定理において、 $\{n! M_n\}$ が $(C), (C^*)$ (又は (C^*)) を満たすと仮定したが、実はこの条件はなかなか検証しにくい。(やはりたゞ $\{M_n\}$ に対して成り立っていると思われぬのだ)

そこで、定義 3.1 及び 4.3⁹あこで注意したように、定義中の $\gamma_0 \in d \otimes (i+1|1)$, $d \otimes (N+1|1)$ にあてかえたもの (これを γ に関して pseudo-analytic である" という) を採用すれば、定理 4.2 の i) と ii) の $p(x, \gamma)$ の存在は条件 (C), (C*) 等なしに pseudo-analytic な cutoff functions を用いて示せる。もちろん i) における $p(x, \gamma)$ も γ に関して pseudo-analytic になるのはいうまでもない。定理 4.2 の ii) はつまりな"とも見えだが、分離条件 (5.1) は強く、これをみたす $\{M_n\}$ からつくられる ul.d. spaces は ^{ある order の} Gevrey class の subclass となつて"から、どの order の Gevrey class よりも広い class を考えた"とこにはいへども十分でありである。

なお定理 4.2 の証明は L. Boutet de Monvel and P. Kree [3], L. Boutet de Monvel [2] と同様にしてできる。 γ に関して pseudo-analytic の場合には F. Trèves [26], S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto [6] と同様にしてできる。

定理 4.2 を使って 性質 IV を示そう。まず $S^{-\infty}[M_n]$ について。

定理 4.3. (Algebra of $S^{-\infty}[M_n]$.) $\{M_n\}$ は (D.1) を仮定する。

- i) $S^{-\infty}[M_n]$ は star algebra を成す。
- ii) $S[M_n]$ と $S^{-\infty}[M_n]$ の元の積及び $S^{-\infty}[M_n]$ と $S[M_n]$ の元の積は $S^{-\infty}[M_n]$ に属する。

注意. この定理は定理 4.2 と無関係に $S^{-\infty}[M_n]$ と $S[M_n]$ 内部で

同じで証明ができる。

注意 2. $\{M_n\}$ が (D.1) をみたすならば、i) において積や formal adjoint は $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n+2l_0]$ に属し、ii) において積は $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n+2l_0+m_0]$ に属す。 $l_0 = 2(\lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1)$, $m_0 = \max\{m, 0\}$.

" $\mathcal{S}$ " $\mathcal{S}$ $\mathcal{S}[M_n]$ が star algebra を成すことを示す。

定理 4.4. $\{M_n\}$ は条件 (R) と (S.1) を仮定する。

1) $P(x, D)$ は $\mathcal{S}^{m_1}[M_n]$ に、 $Q(x, D)$ は $\mathcal{S}^{m_2}[M_n]$ に属すとしよう。このとき $P(x, D)Q(x, D)$ は $\text{mod } \mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ で $\mathcal{S}^{m_1+m_2}[M_n]$ に属し、この表象から $\mathcal{S}^{-\infty}$ の表象を引いた $r(x, D)$ は次の漸近展開をもつ。

$$(*) \quad r \sim \sum_{[M_n]} r_i, \quad r_i = \sum_{|H|=i} \frac{1}{i!} p^{(H)} g_{(H)}.$$

更に $p \sim \sum_{[M_n]} p_i$, $g \sim \sum_{[M_n]} g_i$ であれば、次も成り立つ。

$$(**) \quad r \sim \sum_{[M_n]} \tilde{r}_i, \quad \tilde{r}_i = \sum_{j+k+|H|=i} \frac{1}{i!} p_j^{(H)} g_{k(H)}.$$

2) $P(x, D)$ が $\mathcal{S}^m[M_n]$ に属すとしよう。このとき P の formal adjoint $P^*(x, D)$ も $\mathcal{S}^m[M_n]$ に $\text{mod } \mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ で属し、

この表象から mod の $\mathcal{S}^{-\infty}$ の表象を引いた表象 $S(x, D)$ は次の漸近展開をもつ。

$$(*)' \quad S \sim \sum_{[M_n]} S_i, \quad S_i = \sum_{|H|=i} \frac{(-1)^{|H|}}{i!} \bar{p}^{(H)}.$$

更に $p \sim \sum_{[M_n]} p_i$ であれば、次も成り立つ。

$$(**)' \quad S \sim \sum_{[M_n]} \tilde{S}_i, \quad \tilde{S}_i = \sum_{j+|H|=i} \frac{(-1)^{|H|}}{i!} \bar{p}_j^{(H)}.$$

定理 4.4 の証明は ^{i) に ついて} ~~(*)~~ あれは ~~(**)~~ が成り立つことを
見込して 定理 4.2 により 先に ~~(*)~~ が成り立つ $S(\alpha, \beta)$ をつく
しょう。あとは $S(\alpha, \beta)$ と $\sigma(PQ)$ の差が $S[M_n]$ に属す
ことを示せばよい。なお ~~(*)~~ あれは ~~(**)~~ の右辺が $S[M_n]$
に入るのは 定理 3.1 による。なお、定理 3.1 i) においては
条件 (R) 中 $C=1$ であることは必要な。ii) についても同様
である。証明の詳細は L. Boutet de Monvel and P. Kree [3],
K. Taniguchi [24] あれは F. Trèves [26], S. Hashimoto,
T. Matsuzawa and Y. Morimoto [6] と同様である。

§5. 性質 IV 再考. §4 での 性質 IV の考察では、性質
VII にあてて 定理 4.2 を経由したので、分離条件を必要とした。
もちろん、今のところ分離条件の導入はラク＝カンな要請で
あって本質的かどうか不明だが、少なくとも今までに知られて
いる true symbol の構成法においては系統上それは避けられ
ない。他方、 $S[M_n]$ 内部の性質 IV は VII と用いるのはもう一
つ納得できない。もっとも、性質 IV といっても、われわれは
漸近展開と両立する symbol を目指してゐるから（具体的
には 定理 4.4 の ~~(*)~~ ~~(**)~~ あれは ~~(*)~~ ~~(**)~~）純粋に性質
IV が作用素固有の性質とも言えるかもしれない。実際、
~~(*)~~ ~~(**)~~ ~~(*)~~ ~~(**)~~ と放棄すれば、表象の $\mathfrak{L}$ に関する analyticity

は一考に C^∞ でよくなり star algebra を成すことは容易に示せよ。この際定理 4.1, 4.3 はやはり成り立つ。(K. Taniguchi [24] を見ればよい。)

少なくとも $(\star)$, $(\star')$ を期待する $\mathcal{A}$ の表象の $\mathfrak{z}$ に関する analyticity の要請は止むをえないように見える。他方、積の表象 $\sigma(PQ) = 0s - \iint e^{-i\eta y} p(x, \mathfrak{z} + \eta) g(x+y, \mathfrak{z}) dy d\eta$ において p.15 に指摘したように $\mathfrak{z} + \eta \sim 0$ のあたりが $\sigma(PQ) \in S[M_n]$ となることをまづける要素を生み出してゐる。そこで、上の積分と $\mathfrak{z} + \eta \sim \mathfrak{z}$ とそうでない部分に分けよと。後者は $S^{-\infty}[M_n]$ に属することがわかる。したがって $\sigma(PQ)$ の本質的部分は $\varepsilon > 0$ を任意にとり $\langle \eta \rangle \leq \varepsilon \langle \mathfrak{z} \rangle$ の積分領域に含まれることがわかる。われわれは当然 $\langle \eta \rangle \leq \varepsilon \langle \mathfrak{z} \rangle$ と $\langle \eta \rangle > \varepsilon \langle \mathfrak{z} \rangle$ に分けた方がいいのだが、このためには $\mathfrak{z}$ に depend してどうしても cut-off function が必要となる。しかしこれは決して analytic function ではない。あれこれとしては pseudo-analyticity に沿路を見いだすしかなるように思われる。しかしながら、それでもなお難点がある。cutoff function として用いた函数は $\mathfrak{z}$ に肉して微分するごとに $\mathfrak{z}$ の order が一つ下がってかつ analytic 評価に近くなるものがあるといける。しかし、pseudoanalytic fn による cutoff では n に応じて $\mathfrak{z}$ の位置が変わるにしても $k (\leq n)$ 階の微分が $C(Rn)^k \langle \mathfrak{z} \rangle^{-k}$ でありしか

かえらんない。具体的にこのべよう。次のような函数をつくれ。(たとえば S. Hashimoto, T. Matsugawa and Y. Morimoto [6] の true symbol の構成に用いた cutoff function を modify した)

$$\chi(\eta; \xi) = \begin{cases} 0 & |\eta| > \exists b |\xi| \\ 1 & |\eta| < \exists a |\xi| \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2\ell}) \quad (0 < b < a < 1)$$

$$\exists R > 0, \exists C > 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^{\ell}$$

$$\|D_\eta^\alpha D_\xi^\beta \chi(\eta, \xi)\| \leq C R^{|\alpha|+|\beta|} n^{|\alpha|} \Theta(n)^{-|\beta|} \begin{cases} d_1 \Theta(n) \leq |\xi| \leq d_2 \Theta(n) \\ \neq 0 & \text{otherwise} \quad (|\beta| > 0). \end{cases}$$

= = = R, C, d_1, d_2 は n のとり方によらない。

= = = で問題になるのは n^k と $R_0^k k!$ との差である。前者は n と共に増大し、後者は定数である。その比は $k = \frac{n}{R_0}$ のとき $R_0^{(1/R_0)} n$ である。これを解消するのはなかなか困難である。

思いつくのは $0s - \iint e^{-\sqrt{\eta} \cdot \eta} p(\eta, \xi + \eta) \chi(\eta; \xi) d\eta d\xi$ において η について部分積分して $|\eta|^{-2}$ をかきこんでみる。これにより $\Theta(n)^{-1}$ が生み出される。固定した k_0 で $\Theta(n)^{-k_0} \cdot R_0^{1/n} \leq C_0$ となるためには $\liminf_{n \rightarrow \infty} \log M_n / n^2 > 0$ が必要で、これは弱分離条件とみても class を排除してしまう。というわけで今のところ $(\star), (\star')$ を成り立たせよう。Gevrey class 以下の理論で、納得のいくものはできていない。

注意。あれわれは $S[M_n] = S_{2,0}[M_n]$ を考えているが、これを $\bigcap_{\varepsilon > 0} S_{2-\varepsilon,0}[M_n]$ に譲歩すれば、 $S^\infty[M_n]$ もこれに応じて変更する(= によって、この cutoff function algebra になることを示す)。

($\liminf_{n \rightarrow \infty} (\log M_n) / n \log n = \infty$ の仮定の下に)

§6. 性質 V について。

最後に性質 V が成り立つための必要十分条件を与えよう。

定理 6.1. 1) もし $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元が $\mathcal{E}'(M_n)$ に写すならば分離条件が成り立たなければならない。
 2) 逆に分離条件があれば、 $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元は、 $\mathcal{D}'(M_n)$ から $\mathcal{D}(M_n)$ へ有界である。(したがって $\mathcal{E}'(M_n)$ から $\mathcal{E}(M_n)$ へも有界である。)

注意. 定義 4.2 注意 3 におけるように $C_\beta \in C(R^{|\beta|})$ としてもなおかつ 1) が成り立つ。

特異性の伝播を研究する際にはしばしば解 u を $\mathcal{E}'$ からとってくる。その場合には性質 V' でも有効である。

定理 6.2. 1) もし $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元が $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}(M_n)$ へ写すか、 $\mathcal{D}'(M_n) \subset \mathcal{D}^\infty$ へ写すならば (M_n) は可微分条件を満たさなければならない。
 2) 可微分条件の下には $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元は $\mathcal{D}'$ から $\mathcal{D}(M_n)$ へ(したがって $\mathcal{E}'$ から $\mathcal{E}(M_n)$ へ)、 $\mathcal{D}'(M_n)$ から $\mathcal{D}^\infty$ へ(したがって $\mathcal{E}'(M_n)$ から $\mathcal{E}$ へ)有界である。

注意 今度も上の注意と同じことが成り立つ。

証明であるが、両定理とも 1) については対偶を例を構成する形で示す。2) は容易である。

文 献 表

- [1] M.S. Baouendi, C. Goulaouic and G. Métivier,
J. Diff. Eq. vol 48 (1983) 227-240.
- [2] L. Boutet de Monvel, Ann. Inst. Fourier vol 22 (1972) 229-268.
- [3] L. Boutet de Monvel and P. Kree, 同上, vol 17 (1967) 295-323.
- [4] L. Carleson, Math. Scand. vol 9 (1961) 197-206.
- [5] C.H. Ching, J. Diff. Eq. vol 11 (1972) 436-447.
- [6] S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto
Comm. P. D. E.
- [7] L. Hörmander, Amer. Math. Soc. Simp. Pure Math vol 10 (1967) 138-183.
- [8] 同上, Comm. Pure Appl. Math. vol 24 (1971) 671-704.
- [9] K. Kajitani, Publ. RIMS. Kyoto U. vol 15 (1979) 519-550.
- [10] J.J. Kohn and L. Nirenberg, Comm Pure Appl. Math. vol 18 (1965) 269-305.
- [11] H. Komatsu, J. Math. Soc. Japan vol 19 (1967) 366-383.
- [12] 同上, J. Fac. Sci. U. Tokyo, Ser. I.A., vol 20 (1973) 25-105.
- [13] 同上, Ultradistributions, IV, (to appear).
- [14] 同上, Proc. Japan Acad. vol 55, Ser. A, (1979) 69-72
- [15] 同上, 同上 vol 56, Ser A, (1980) 139-142.
- [16] H. Kumano-go, J. Fac. Sci. U. Tokyo, Ser I.A. vol 17 (1970) 31-50.
- [17] 同上, 擬微分作用素, 岩波書店 (1974). 1-3章
- [18] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, Régularisation des suites,

Applications, Gauthier-Villars (1952) I, IV, VI 章.

- [19] W. Matsumoto, Sémin. Eq. D. P. hyperb. holon. U. Paris VI (1979-1980).
- [20] 同上, C.R. Acad. Sci. Paris, vol 292 (1981) 621-623.
- [21] 同上, Characterization of the separativity of ul. d. classes,
(to appear in J. Math. Kyoto U.)
- [22] T. Nishitani, J. Math. Kyoto U. vol 18 (1978) 509-521.
- [23] W. Rudin, J. Math. Mech. vol 11 (1962) 797-809.
- [24] K. Taniguchi, Fourier integral operators in Gevrey class
in $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for a hyperbolic
operator, (to appear).
- [25] 同上, A calculus of Fourier integral operators
with analytic symbols and fundamental solution of
hyperbolic operators, I, (unpublished).
- [26] F. Trèves, Introduction to pseudodifferential and
Fourier integral operators, vol 1, Pseudodifferential
operators, Plenum Press (1980) 5 章.
- [27] L. R. Volevič, Trudy Moscow Math. Obšč. vol 24
(1971) 43-68, 英訳: Trans. Moscow Math Soc.
vol 24 (1971) 43-72.