

フーリエ解析における複素函数論的方法

東北大 理 猪狩 惺

古典フーリエ解析は、自然に単位円盤または半平面上の解析函数の議論に結びつけられ(§1 参照)、複素函数論が効果的に用いられる。その一つの理由は、単位円周又は直線上の変数函数を単位円盤又は半平面の調和函数に延長するとき、調和函数とその共役調和函数の性質のいくつかが互いに遺伝することにあると考えられる。その典型的な例としては、 L^p -評価、函数の連続性、Stolz の路に沿った極限(n と δ とかく)の存在性等があげられる。

一方、1940年代以降は、複素函数論的手法と実函数論的手法でお互いの研究が盛んに行われるようになった。この手法により適用範囲がより広くなり種々の成果がえられた。

一変数フーリエ級数の複素函数論的手法については Koosis [12], Duren [3], Zygmund [19] に詳しい。また予測理論については Dym-McKean [4] にある。このノート

4

では解析函数の n. t. l. についての Privalov の定理と Lusin の函数について述べ (§§ 3-6). 近年これらは, 多変数の場合に拡張された. 更に Lusin の函数の評価を利用して二変数函数の実函数論的の特徴づけが可能となった. これらを Malliavin, Chang-Fefferman 等に従って解説する.

第一章 序

1. フーリエ解析と解析函数. $\mathbb{T}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円周または区間 $[-\pi, \pi]$ とする. $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対してそのフーリエ級数は

$$f \sim \sum \hat{f}_n e^{int}$$

で定義される, ここに

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt$$

である. f の共役函数 $\tilde{f}$ は

$$\tilde{f} \sim \sum -i(\operatorname{sign} n) \hat{f}_n e^{int}$$

によつて定義される.

函数 f は次のようにして, 単位円盤 $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 内の解析函数 $F(z)$ と結ぶつけられる; 以下 f は実数値函数とする.

$$u(z) = \sum \hat{f}_n z^{|n|} e^{int}, \quad z = re^{it} \in D$$

ε f の Poisson 積分

$$v(z) = \sum (-i \operatorname{sign} n) \hat{f}_n r^{|n|} e^{int}$$

ε 共役 Poisson 積分とすれば, v は調和函数 u の共役調和函数であって, f は解析函数

$$\begin{aligned} F(z) &= u(z) + i v(z) \\ &= \hat{f}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n z^n \end{aligned} \quad (1)$$

の実部の境界函数と考えることができる.

$f \in L^2(\mathbb{T})$ なる Parseval の等式と, Riesz-Fischer の定理によつて $\tilde{f} \in L^2$ である. 以下の議論に関連するので, $\tilde{f}$ についてもう少しを入れ, 述べておく.

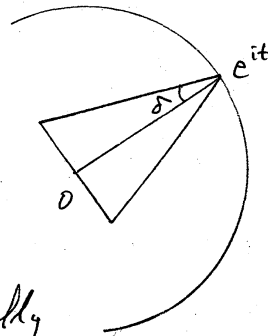
$0 < \delta < \pi/2$, $t \in \mathbb{T} = \partial D$ に対して

$$I_\delta(t) = \{ z \in D : z = e^{it}(1-r), 0 < r < 1, |\arg h| < \delta \}$$

と置く.

$f \in L^2(\mathbb{T})$ なる, $0 < \delta < \pi/2$ とするとき

$$\lim_{I_\delta(t) \ni z \rightarrow e^{it}} F(z) = f(t) + i\tilde{f}(t) \quad \text{a.e.}$$



特に, $v(z)$ は a.e. で $\tilde{f}$ に non-tangentially

に収束する. $f \in L^1(\mathbb{T})$ の場合も $\tilde{f}$ は v の non-tangential limit (n.t.l. と書く) として定義される. そのためには $f \geq 0$ としてよい. このとき, $e^{-F(z)}$ は D の有界な解析函数であるから, a.e. で n.t.l. をもち, 一方 $u(z)$ も同様である.

以上の事情はフーリエ変換についても同様である。 $f \in L^2_{\text{real}}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, に対して $\mathbb{C}$ の上半平面 $\mathbb{R}^2_+ = \{z = x + iy, y > 0\}$ に於ける解析関数 F が存在して, その境界値の実部, 虚部は夫々 f 及び f の共役関数となる。

2. 共役関数への遺伝. f に対して解析関数 F を導入する場合, f の性質が F にどのように翻訳され, f に還元されるか, すなわち, f と $\tilde{f}$ の性質の相互遺伝性が問題となる。この節ではこれに関する古典的な定理を二つあげておく。

定理 1 (M. Riesz). $1 < p < \infty$ とする。 $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\hat{f}_0 = 0$ なら
$$\|\tilde{f}\|_p \approx \|f\|_p \quad (\text{ノルム同値}).$$

この定理は A. Kolmogorov の不等式

$$m\{t \in \mathbb{T} : |\tilde{f}(t)| > a\} \leq \text{const. } a^{-1} \|f\|_1 \quad (a > 0) \quad (1)$$

から導かれる。(1) の搜索関数を利用した証明は L. Carleson による。与えられた [11]。本質的には同じであるが, その簡単な証明を記そう。 $f \geq 0$ としておこう。 $w(z) = \log$

$|1 + a^{-1} e^{F(z)}|$ は $\mathcal{D}$ で調和であるから,

$$w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(re^{it}) dt, \quad 0 < r < 1.$$

ゆえに
$$w(0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 + a^{-1} e^{f(t)} + i a^{-1} e^{\tilde{f}(t)}| dt.$$

左辺 = $\log |1 + a^{-1} e F(0)| \leq a^{-1} e |F(0)| = e a^{-1} \|f\|_1$. 一方

$E = \{t : |\tilde{f}(t)| > a\}$ とおくと, 右辺は

$$\geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |a^{-1} e \tilde{f}(t)| dt = m(E).$$

ゆえに (1) が成立した。

D 上の関数 u に対して

$$M_p(u, \lambda) = \|u(\lambda e^{it})\|_{L^p(dt)}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

$\mathbb{T}$ 上の関数 f に対して

$$\Delta_h f(t) = f(t+h) - f(t)$$

となく, $0 < p \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$\text{Lip}_\alpha^p = \{f \text{ on } \mathbb{T} : \|\Delta_h f\|_p = O(|h|^\alpha)\}$$

$$\text{Lip}_{*}^p = \{f \text{ on } \mathbb{T} : \|\Delta_h^2 f\|_p = O(|h|)\}$$

となく, $k+1 \geq \alpha > k$ のときは, $\text{Lip}_\alpha^p = \{f : f^{(k)} \in$

$\text{Lip}_{*}^{p(\alpha-k)}\}$, $\text{Lip}_{k+1*}^p = \{f : f^{(k)} \in \text{Lip}_{*}^p\}$ とある。

f に対して $F = u + iv$ を §1 のように定義する。

定理 2. $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$ とする。

$$(i) \quad f \in \text{Lip}_\alpha^p \Leftrightarrow M_p(\partial u / \partial t, \lambda) = O(1-\lambda)^{\alpha-1}$$

$$\Leftrightarrow M_p(\partial v / \partial t, \lambda) = O(1-\lambda)^{\alpha-1}$$

$$\Leftrightarrow M_p(F', \lambda) = O(1-\lambda)^{\alpha-1}$$

$$(ii) \quad f \in \text{Lip}_{*}^p \Leftrightarrow M_p(\partial^2 u / \partial t^2, \lambda) = O(1-\lambda)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M_p(\partial^2 v / \partial t^2, \lambda) = O(1-\lambda)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M_p(F'', \lambda) = O(1-\lambda)^{-1}.$$

証明は [19] 又は [3] にある.

定理 1 と 2 は, L^p ($p > 1$), Lip^p , Lip^p_* において "効果的に" 解析函数の議論に移行できることを示している. 次の章では, 局所的に境界値の存在を考える.

第二章 解析函数の境界における non-tangential limit.

3. 解析函数の境界値 (一変数の場合).

§1 では可積分函数に対して F を $(1, 1)$ で定義するとき, n. t. l. が a. e. で存在することを示した. この節では, 円盤の一般の解析函数についてその問題も考える.

定理 3 (Privalov). $E \subset \partial D = \mathbb{T}$, $m(E) > 0$ とする.

$u(z)$ は D で調和, E の各点で n. t. 有界, すなわち,

$$\forall t \in E \quad \exists 0 < \delta < \pi/2; \quad u(\Gamma_\delta(t)) \text{ は有界}$$

とみたせば, E の a. e. で n. t. l. を持つ.

$$S_\delta(u)(t) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} |\nabla u(z)|^2 dz \right)^{1/2} + |u(0)|$$

は $Lusin$ の函数又は面積を分という.

定理 4. $E \subset \partial D$, $m(E) > 0$, u は D で調和とする. :

のとき

(i) u が E に n.t.l. をもてば,

$$S_\delta(u)(t) < \infty \quad \text{a.e. in } E \quad \text{for } 0 < \delta < \pi/2.$$

(ii) 各 $t \in E$ に対して $0 < \delta = \delta_t < \pi/2$ が存在して

$$S_\delta(u)(t) < \infty \quad \text{ならば, } u \text{ は } E \text{ の a.e. に n.t.l. をもつ.}$$

v を u の共役調和函数 $u(0) = v(0) = 0$ とすれば,

$$S_\delta(u) = S_\delta(v) \quad \text{であることに注目しよう. n.t.l.}$$

をもつという性質は, 零集合を除けば相互に移行する.

定理 4 の証明は [19] で, 等角写像を用いる方法と

Poisson 核を用いる方法の二通りの仕方で行っている. 後者は

多変数の場合にも適用できる (cf [17]). 定理 5 は

Marcinkiewicz - Zygmund 及び D. Spencer による. 証明は [19]

にもある.

$0 < p \leq \infty$ とする. Hardy 空間 $H^p(D)$ は D で解析的かつ

$$\|f\|_{H^p} = \sup \{ \|f(re^{it})\|_{L^p(\partial D)}; 0 < r < 1 \} < \infty$$

をみたす函数 f の集合である.

$0 < \delta < \pi/2$ を固定するとき, f が D で解析的ならば,

$$\|f\|_{H^p} \approx \left\| \sup_{z \in \Gamma_\delta(t)} |f(z)| \right\|_{L^p(\partial D)}$$

である. 従って

$$f \in H^p(D), 0 < p, \text{ ならば } f \text{ は a.e. に n.t.l. をもつ.}$$

4. 解析函数の境界値 (多変数の場合)

§3 で述べた性質は多変数の場合にも成り立つことが近年示された。それを二変数に限って述べよう。次のように記号を用いる。

$$\mathbb{D} = D_1 \times D_2, \quad D_j = \{z_j \in \mathbb{C}, |z_j| < 1\}, \quad j = 1, 2.$$

$$\mathbb{T} = T_1 \times T_2 = \partial \mathbb{D}, \quad T_j = \{t_j : 0 \leq t_j < 2\pi\}$$

$$\Pi_\delta(t) = \Pi_\delta(t_1) \times \Pi_\delta(t_2), \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}$$

定理 5 (Calderón - Zygmund). $E \subset \partial \mathbb{D}$, $m(E) > 0$ とする. $u(z_1, z_2)$ は $\mathbb{D}$ で重調和, E の各点で n. t. 有界, すなわち, 各 $t \in E$ に対して $0 < \delta < \pi/2$ が存在して $u(\Pi_\delta(t))$ が有界ならば, E の a. e. で $u(z_1, z_2)$ は n. t. l. e. である。

証明は [19] にある。

$0 < \delta < \pi/2$ に対して Lusin の函数は

$$S_\delta(u)(t) = \left(\int_{\Pi_\delta(t)} |\nabla_1 \nabla_2 u(z)|^2 dz \right)^{1/2} \\ + \left(\int_{\Pi_\delta(t)} |\nabla_1 u(z)|^2 |\nabla_2 u(z)|^2 dz \right)^{1/2}$$

$$+ \left(\int_{\Pi_\delta(t_1)} |\nabla_1 u(z_1, 0)|^2 dz_1 \right)^{1/2} + \left(\int_{\Pi_\delta(t_2)} |\nabla_2 u(0, z_2)|^2 dz_2 \right)^{1/2} \\ + |u(0)|$$

で定義される。ここに $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\nabla_j = (\partial/\partial x_j, \partial/\partial y_j)$, $j = 1, 2$, である。

定理 6. $E \subset \partial D$, $m(E) > 0$, u は D で重調和とする。

(i) u が E で n. t. l. であるならば, $S_\delta(u)(t) < \infty$ a. e. in E .

(ii) $S_\delta(u)(t) < \infty$ in E ならば, E の a. e. で u は n. t. l. である。

(i) は M. P. Malliavin - P. Malliavin [13] にある。

(ii) は J. Brossard [1] で示されている。

重調和函数 $u(z_1, z_2)$ に対して $u^{1,2} = u$, $u^{\tilde{1},2}$, $u^{1,\tilde{2}}$, $u^{\tilde{1},\tilde{2}}$ はそれぞれ z_1 , z_2 , $\bar{z}_1$ 及び $\bar{z}_2$ に関する共役函数とすると $S_\delta(u)(t) < \infty$ ならば, この4つの重調和函数に対して $Lusin$ の函数は有限であることに注目しよう。

§3 と同様, $0 < p \leq \infty$ とするとき, f は D で解析的

$$\|f\|_{H^p} = \sup \left\{ \|f(\rho_1 e^{it_1}, \rho_2 e^{it_2})\|_{L^p(\mathbb{T})} ; 0 < \rho_j < 1 \right\}$$

が有限ならば $H^p(D)$ に属するといふ。 $t \in \mathbb{T}$ に対して

$$N_\delta f(t) = \sup \left\{ |f(z)| : z \in \Pi_\delta(t) \right\}$$

とあるとき

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} \approx \|N_\delta(f)\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

であるから, $f \in H^p(\mathbb{D})$ ならば n. t. l.

$$f(t_1, t_2) = \lim_{\Pi_\delta(t_1, t_2) \ni (z_1, z_2)} f(z_1, z_2)$$

は a. e. で存在する

第三章 Littlewood - Paley の函数, Lusin の函数

5. Lusin の函数と Littlewood - Paley の函数 (一変数の場合). §3 で述べた Lusin の函数と Littlewood - Paley の函数の関係を述べる. これは n. t. l. の存在とフーリエ級数の強総和法可能性の関係を示している。

$\mathbb{D}$ 上の函数 F に対して

$$g(F)(t) = \left(\int_{[0,1]} (1-|z|) |F'(z) e^{it}|^2 dz \right)^{1/2}$$

$$g^*(F)(t) = \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|}{|1-z|} \right)^{2\alpha} |F'(z e^{it})|^2 dz \right)^{1/2}$$

$$\Delta(F)(t) = \left(\sum_0^\infty |\Delta_k(t)|^2 \right)^{1/2},$$

$$\Delta_k = \sum_{2^{k-1}}^{2^k} \hat{f}_n e^{int} \quad (k \geq 1), \quad \Delta_0 = \hat{f}_0$$

$$f(t) = F = \sum_0^\infty \hat{f}_n e^{int} \quad \text{である.}$$

$$h_{\alpha}(F)(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sigma_k^{\alpha}(F)(t) - \sigma_k^{\alpha-1}(F)(t)|^2}{k} \right)^{1/2},$$

ここに σ_k^{α} は F の γ -リ工級数の k 次 Cesàro 平均である。

補題 1. $\alpha > 0$ とするとき

$$(i) \quad c h_{\alpha}(F)(t) \leq g_{\alpha}^{*}(F)(t) \leq c' h_{\alpha}(F)(t).$$

$$(ii) \quad c g(F)(t) \leq s_{\delta}(F)(t) \leq c' g_{\alpha}^{*}(F)(t).$$

分解函数 $\Delta(F)$ は次のように解釈される。 $\lambda_k = \exp(-2^{-k})$

とあるとき $\lambda_k(1-\lambda_k)F'(\lambda_k e^{it})$ の m -フーリエ係数は

$\hat{f}_k[n\lambda_k(1-\lambda_k)\lambda_k^m]$ 。従って、 $|\Delta_k|^2$ の挙動は

$\lambda_k(1-\lambda_k)|F'(\lambda_k e^{it})|^2(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ のそれに、従って

$\Delta^2(F) = \sum |\Delta_k(F)|^2$ の挙動は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(1-\lambda_k)|F'(\lambda_k e^{it})|^2(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sim \int_0^1 (1-\lambda)|F'(\lambda e^{it})|^2 d\lambda$$

のそれに近いと考えられる(精密な議論については [19] 参照)

定理 7. (i) $F \in H^p$, $0 < p < \infty$, $\alpha > \max(1/p, 1/2)$ ならば

$$\|g_{\alpha}^{*}(F)\|_p \leq C \|F\|_{H^p}.$$

$0 < p \leq 2$, $\alpha = 1/p$ ならば, $F \mapsto g_{\alpha}^{*}(F)$ は weak

type (p, p) .

(ii) $F \in H^p$, $0 < p < \infty$, 对

$$\|F\|_{H^p} \leq c \|g(F)\|_p.$$

(iii) $1 < p < \infty$ 对

$$\|\Delta(F)\|_p \approx \|F\|_{H^p}, \quad F \in H^p.$$

従, 特, $0 < p < \infty$ 对

$$\|S_\delta(F)\|_p \approx \|F\|_{H^p}, \quad F \in H^p.$$

(i) の前半の証明は [18], 後半は [5], [10] にある. (ii) は [7], [15] を参照. (iii) の複素函数論的手法による証明は [19] を実函数論的方法による証明は [14], [9] などにある.

6 *Lusin* の函数 (= 変数の場合).

(6.1) この節の目的は, 次の定理を示すことである.

定理 8. $0 < p < 2$, $u \in \mathcal{D}$ の重調和函数とすると

$$\|S_\delta(u)\|_p \approx \|N_\delta(u)\|_p.$$

この定理は [8] による. 証明は簡単カスケッチが与えられていたためであるので, ここでは詳しく述べる.

定理 8 の証明に入る前に, この定理から導かれた重要な結果を示す.

$\mathcal{D}$ の函数 u に対して

$$S^{1/2}(u) = \left(\int_{\mathbb{R}_d^+} |D_1 D_2 u|^2 dz \right)^{1/2},$$

$$B(u) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 u|^2 dz \right)^{1/4},$$

$$S'(u) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t_1)} |\nabla_1 u(z_1, 0)|^2 dz_1 \right)^{1/2},$$

$$S^2(u) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t_2)} |\nabla_2 u(0, z_2)|^2 dz_2 \right)^{1/2}$$

とす。

補題 2. $0 < p < \infty$ とす。 $F \in H^p(\mathbb{D})$ に対して

$$\|F\|_{H^p} \approx \|S^{1/2}(F) + S'(F) + S^2(F)\|_p + |F(0)|.$$

証明. $z = (z_1, z_2) = (\lambda, e^{it_1}, \lambda_2 e^{it_2}) \in \mathbb{D}$ とす。 $H =$

$L^2(\Gamma_\delta(0), dz_2)$ とす。 F の $\mathbb{D}$ に対して $G_{t_2}(z_1) =$

$\partial F(z_1, e^{it_2} z_2) / \partial z_2$ とす。 $|G_{t_2}(z_1)|_H = \left(\int_{\Gamma_\delta(0)} |\nabla_2 F(z_1, z_2 e^{it_2})|^2 dz_2 \right)^{1/2}$

ゆえに一変数の *Carleson* の函数の性質

を H -値函数に対して適用して、

$$\int \sup_{z_1 \in \Gamma_\delta(t_1)} |G_{t_2}(z_1)|_H^p dt_1 \approx \int \left(\int_{\Gamma_\delta(t_1)} |\nabla_1 G_{t_2}(z_1)|_H^2 dz_1 \right)^{p/2} dt_1 + |G_{t_2}(0)|_H^p.$$

すなわち、

$$\int (\text{右辺}) dt_2 = \int S^{1/2}(F)^p dt_1 dt_2 + \int S^2(F)^p dt_1 dt_2,$$

$$\int (\text{左辺}) dt_2 + \int S'(F)^p dt_1 dt_2 \approx \int |G_{t_2}(e^{it_1})|_H^p dt_1 dt_2 + \int |F(e^{it_1}, 0)|^p dt_1$$

$$\approx \int |F(e^{it_1}, e^{it_2})|^p dt_1 dt_2 = \|F\|_{H^p}^p. \quad \text{q.e.d.}$$

$F \in H^p(D)$ に対して $u = \mathcal{O}_e F$ とおくと, u は重調和である.
 さて,

$$\|N_\delta u\|_p \leq \|N_\delta F\|_p \leq C \|F\|_{H^p}.$$

一方, $u \in D$ の実数値重調和函数とすると, $F = (1/4) \{u^{1,2} - u^{\bar{1},\bar{2}} + i u^{\bar{1},2} + i u^{1,\bar{2}}\}$ とおくと, F は D で解析的, $\mathcal{O}_e F = u$. ゆえに §4 定理 6 の注意によつて
 $\|S_\delta(F)\|_p \leq \|S_\delta(u)\|_p$. 最後の式は定理 8 より $\leq C \|N_\delta(u)\|_p$ によつて補題 2 によつて,

$$\|F\|_{H^p} \leq C \|N_\delta(u)\|_p.$$

$u \in \mathcal{D}'(\partial D)$ が与えられたとき, $u \in D$ の重調和函数として延長しておく.

定理 9. $0 < p < \infty$ とする. $u \in \mathcal{D}'(\partial D)$ とすると, 次の命題は同値

- (i) $F \in H^p(D)$ が存在して $\mathcal{O}_e F = u$,
- (ii) $N_\delta u \in L^p(\partial D)$ for all $0 < \delta < \pi/2$,
- (iii) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\int \varphi dx \neq 0$ が存在して
 $\sup_{\varepsilon > 0} \|u * \varphi_\varepsilon\| \in L^p,$
- (iv) $\sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \sup_{\varepsilon > 0} \|u * \varphi_\varepsilon\| \in L^p$, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{S}$ のある有界集合.
- (v), (iv) について [6] を参照.

この定理によつて $H^p(D)$ は, 実数値重調和函数で $N_\delta u \in L^p$ なる u のなす空間としてよい. 重調和函数 u に対して

$$\|u\|_{H^p} = \|N_\delta u\|_{L^p}$$

と分る, ここで $0 < \delta < \pi/2$ は固定してある. 異なる δ に対しては同値な距離が定義される.

(6.2) S^1, S^2 の評価

一変数の場合の評価を適用して

$$\|S^1 u\|_p \leq c \|N_\delta u\|_p = c \|u\|_{H^p}.$$

$S^2 u$ に対しては同様の評価が与えられる.

(6.3) B の評価.

補題 3 ([16]). $u, v \in \mathcal{D}$ の重調和函数とする.

$$B(u, v) = \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 dz, dz_2 \right)^{1/4}$$

とあるとき

$$\|B(u, v)\|_4^2 \leq c \|u\|_{H^4} \|v\|_{H^4}.$$

証明. Δ_j は $\mathbb{R}_j$ に関する Laplacian, ∇_j は $\mathbb{R}_j$ に関する gradient とする.

$$\begin{aligned} (1/2) \Delta_1 (|u|^2 |\nabla_2 v|^2) &= |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 + |u|^2 |\nabla_1 \nabla_2 v|^2 \\ &\quad + O(|u| |\nabla_1 u| |\nabla_2 v| |\nabla_1 \nabla_2 v|), \end{aligned}$$

ゆえに

$$\Delta_1 (|u|^2 |\nabla_2 v|^2) + c |u|^2 |\nabla_1 \nabla_2 v|^2 \geq c' (|\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2). \quad (1)$$

Green の公式に於て τ , τ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_D (1-|z_1|)(1-|z_2|) \Delta_1 (|u|^2 |\nabla_2 v|^2) dz_1 dz_2 \\
 & \leq \int (1-|z_2|) \log \frac{1}{|z_1|} \Delta_1 (|u|^2 |\nabla_2 v|^2) dz_1 dz_2 \\
 & = \int_D (1-|z_2|) dz_2 \int_{t_1 \in T} \left\{ |u(e^{it_1}, z_2)|^2 |\nabla_2 v(e^{it_1}, z_2)|^2 - |u(0, z_2)|^2 |\nabla_2 v(0, z_2)|^2 \right\} \frac{dt_1}{2\pi} \\
 & \leq \int_D (1-|z_2|) dz_2 \int_T |u(e^{it_1}, z_2)|^2 |\nabla_2 v(e^{it_1}, z_2)|^2 \frac{dt_1}{2\pi} \\
 & \leq C_\delta \int_{\partial D} \left\{ \int_{\Gamma_\delta(t_2)} |u(e^{it_1}, z_2)|^2 |\nabla_2 v(e^{it_1}, z_2)|^2 dz_2 \right\} dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

$|u(e^{it_1}, z_2)| \leq N_\delta u(t_1, t_2)$ for $z_2 \in \Gamma_\delta(t_2)$ であるから, 上式は

$$\begin{aligned}
 & \leq \int [N_\delta u(t_1, t_2)]^2 [S_\delta(v(e^{it_1}, \cdot))(t_2)]^2 dt_1 dt_2 \\
 & \leq \|N_\delta u\|_4^2 \|S_\delta(v(e^{it_1}, \cdot))(t_2)\|_4^2.
 \end{aligned}$$

最後の項に於て, 一変数の Leusin の函数の評価を用いると,

$$C \|v\|_{L^2(\partial D)}^2 \leq C \|N_\delta v\|_4^2 \quad \text{であることがわかる。ゆえに}$$

$$\int_D (1-|z_1|)(1-|z_2|) \Delta_1 (|u|^2 |\nabla_2 v|^2) dz_1 dz_2 \leq C \|u\|_{H^4}^2 \|v\|_{H^4}^2, \quad (2)$$

次に, $|u| \leq N_\delta u$ in $\Gamma_\delta(t)$ であるから,

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|) |u|^2 |\nabla_1 \nabla_2 v|^2 dz_1 dz_2$$

$$\leq c \int_{\partial \mathbb{D}} \left\{ \int_{\pi_\delta(t)} |u|^2 |\nabla_1 \nabla_2 v|^2 dz \right\} dt, \quad t = (t_1, t_2)$$

$$\leq c \|N_\delta u\|_4^2 \|S^{12}(v)\|_4^2.$$

$v = \Re F$ かつ $F \in H^4(\mathbb{D})$ とし、補題 2 に F を z

$$\|S^{12}(v)\|_4 \leq \|S^{12}(F)\|_4 \leq c \|F\|_4 \leq c \|v\|_4$$

$$\leq c \|v\|_{H^4}$$

より、

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|) |u|^2 |\nabla_1 \nabla_2 v|^2 dz_1 dz_2 \leq c \|u\|_{H^4}^2 \|v\|_{H^4}^2. \quad (3)$$

最後に、

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|) |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 dz, \quad z = (z_1, z_2)$$

$$\geq c \int_{\partial \mathbb{D}} \left\{ \int_{\pi_\delta(t)} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 dz \right\} dt, \quad t = (t_1, t_2)$$

$$= c \|B(u, v)\|_4^4.$$

(1), (2), (3), と最後の式を合せると求める式を得る。

補題 4. $0 < p < 2$, u は重調和, $A > 0$ とすると *

$$\|Bu\|_p \leq c (A \|u\|_{H^p} + A^{-1} \|S^{12}u\|_p), \quad c \text{ は } A, u \text{ に無関係.}$$

証明. 第1段階. 一変数の Lusin の函数 s_δ を考へ

$$C_2 u(t) = C_2 u(t, t_2) = s_\delta(u(e^{it_1}, \cdot))(t_2)$$

とある. $C_1 u$ の定義の中一変数に s_δ を作用させて定義する.

$\lambda > 0$ とする. $a, b > 0$ を固定し

$$E = \{t \in \partial D; N_\delta u(t) < a\lambda, S^{1/2} u(t) \leq b\lambda, C_1 u(t) \leq \lambda, C_2 u(t) \leq \lambda\}$$

$P_\lambda(\chi_E)(z) = P\chi_E(z)$ は χ_E の double Poisson 積分, 且し

$\mathbf{z} = (\lambda_1 e^{is_1}, \lambda_2 e^{is_2})$ とする. $\varepsilon > 0$ は十分に小さいと固定する.

$$E^* = \{t \in \partial D; P\chi_E(z) > 1 - \varepsilon, \text{ for all } z \in \Pi_\delta(t)\}$$

とある. そのとき

$$E^* \subset E, \quad m(E^{*c}) \leq C_\varepsilon m(E^c).$$

何と云へば, $P\chi_E = 1 - P\chi_{E^c}$ であるから,

$$E^{*c} \subset \{t \in \partial D; P\chi_{E^c}(z) > \varepsilon \\ \text{for some } z \in \Pi_\delta(t)\}.$$

ゆへに, M_δ は Hardy-Littlewood の強最大函数とすると,

$$m(E^{*c}) \leq m\{t \in \partial D; M_\delta \chi_{E^c}(t) > \varepsilon\}$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int (\chi_{E^c})^2 d\alpha = C_\varepsilon m(E^c).$$

従つて, $\varphi \in C^0(-\infty, \infty)$, $\varphi(t) = 0$ ($0 \leq t \leq 1 - 2\varepsilon$), $= 1$

($t \geq 1 - \varepsilon$) とすると,

$$\begin{aligned}
& \int_{E^*} B^+ u(t) dt \\
&= \iint \chi_{E^*}(t) \chi_{\Pi_\delta(t)}(z) |\nabla_1 u(z)|^2 |\nabla_2 u(z)|^2 dz dt \\
&\leq c \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \varphi(P(\chi_E)(z)) |\nabla_1 u(z)|^2 |\nabla_2 u(z)|^2 dz \\
&= c M, \text{ say.} \tag{4}
\end{aligned}$$

※ 2 段階

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|) \Delta_1 \left(\varphi(P\chi_E(z)) |u|^2 |\nabla_2 u|^2 \right) dz \\
&\leq c \lambda^2 \int_E [C_2 u]^2 dt. \tag{5}
\end{aligned}$$

実際, z_1 について Green の公式を用いると, $(1-|z_1|) \leq \log |z_1|^{-1}$ であるから, (5) の左辺は

$$\leq c \int \left[\int_{\mathbb{D}} (1-|z_2|) \left(\varphi(P\chi_E(z)) |u|^2 |\nabla_2 u|^2 \right) dz_2 \right] ds_1,$$

$$\mathbb{D} = (e^{is_1}, z_2)$$

$$\leq c \int_{\partial \mathbb{D}} ds_1 ds_2 \int_{\Gamma_\delta(s_2)} \varphi(P\chi_E(z)) |u|^2 |\nabla_2 u|^2 dz_2.$$

所で $\varphi(P\chi_E(z)) \neq 0$ ならば $P\chi_E(z) > 1 - 2\varepsilon$. 従って E の定義から $|u(z)| \leq a\pi$ かつ z は上界

$$\begin{aligned}
&\leq ca^2\lambda^2 \int_E ds_1 ds_2 \int_{\Gamma_\delta(s_2)} \varphi(P\chi_E) \cdot |D_2 u|^2 dZ_2 \\
&= ca^2\lambda^2 \int_E [C_2 u(s_1, s_2)]^2 ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

次の段階. 積分

$$\int_D (1-|z_1|)(1-|z_2|) \Delta_1 \left(\varphi(P\chi_E(z)) |u|^2 |D_2 u|^2 \right) dz \quad (6)$$

を考へる. (6) で

Δ_1 が $|u|^2$ に作用するに ε なる δ , ε 得る. 以下の積分は

$2M$.

Δ_1 が $|D_2 u|^2$ に作用するに ε なる δ , ε 得る. 以下の積分

$$\leq 2a^2\lambda^2 \int_E [S^{1/2} u]^2 dt$$

Δ_1 が一部 $|u|^2$ に, 一部 $|D_2 u|^2$ に作用するに ε なる δ , ε 得る. 以下の積分

$$\leq caM^{1/2}\lambda \left(\int_E [S^{1/2} u]^2 dt \right)^{1/2}$$

Δ_1 が $\varphi(P\chi_E)$ に作用する項;

$$\Delta_1(\varphi(P\chi_E)) = \varphi''(P\chi_E) |D_1 w|^2$$

但し $w = P\chi_E^c$. $\tilde{\varphi} \in C^\infty(-\infty, \infty)$, $\tilde{\varphi}(t) = 0$ ($0 \leq t \leq$

$1-2\varepsilon'$), > 0 ($t > 1-2\varepsilon'$) とする, $\varepsilon' > \varepsilon$ とす

3. そのとき,

$$|\varphi^{(j)}(t)| \leq c \tilde{\varphi}(t), \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

更に $|\tilde{\varphi}^{(j)}(t)|^2 \leq c \tilde{\varphi}(t) \quad (j=1, 2)$

と仮定してある。そのときこの場合の積分は

$$\leq a\lambda^2 L,$$

但し

$$L = \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(2\chi_E) |\nabla_1 w|^2 |\nabla_2 u|^2 dz_1 dz_2.$$

Δ_1 が一部 $|u|^2$, 一部 $\varphi(2\chi_E)$ に作用する項は

$$\leq a\lambda L^{1/2} M^{1/2}.$$

Δ_1 が一部 $|\nabla_2 u|^2$, 一部 $\varphi(2\chi_E)$ に作用する項は

$$\leq a\lambda^2 \left(\int_E [C_2 u]^2 dt \right)^{1/2} L^{1/2}.$$

従って、この評価の場合に

$$\begin{aligned} M \leq & c \left\{ a\lambda^2 \int_E [C_2 u]^2 dt + a\lambda^2 \int_E [S^{12} u]^2 dt \right. \\ & + a\lambda M^{1/2} \left(\int_E [S^{12} u]^2 dt \right)^{1/2} + a\lambda^2 L + a\lambda L^{1/2} M^{1/2} \\ & \left. + a\lambda^2 \left(\int_E [C_2 u]^2 dt \right)^{1/2} L^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

よって、 $M < \infty$ である。

$$M \leq c a^2 \lambda^2 \left\{ \int_E [C_2 u]^2 dt + \int_E [S^{1/2} u]^2 dt + L^2 \right\} \quad (7)$$

が 4 段階 L の評価

$$K = \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \Delta_2 \left(\tilde{\varphi}(P\chi_E) | \nabla_1 w|^2 u^2 \right) dz_1 dz_2 \quad (8)$$

を考えよう. z_2 変数に対して Green の公式を用いると,

$$\begin{aligned} K &\leq c \int_T ds_2 \int_D (1-|z_1|) \left(\tilde{\varphi}(P\chi_E) u^2 | \nabla_1 w|^2 dz_1 \right) \\ &\leq c a^2 \lambda^2 \int_{\partial D} ds \int_{\Gamma_D(s_1)} | \nabla_1 w|^2 dz_1, \quad s = (s_1, s_2) \\ &\leq c a^2 \lambda^2 \int w ds = c a^2 \lambda^2 m(E^c). \end{aligned}$$

K で Δ_2 が作用して u^2 に作用する項は,

$$= 2L.$$

K で Δ_2 が作用して $| \nabla_2 w|^2$ に作用する項は,

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int [S^{1/2} w]^2 ds \leq c a^2 \lambda^2 \int w^2 ds = c a^2 \lambda^2 m(E^c)$$

K で Δ_2 が作用して $\tilde{\varphi}(P\chi_E)$ に作用する項は,

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int [Bw]^4 ds \leq c a^2 \lambda^2 \int w^4 ds = c a^2 \lambda^2 m(E^c)$$

K で Δ_2 が一部 $\tilde{\varphi}(P\chi_E)$, 一部 u^2 に作用する項

$$\leq c a \lambda \left(\int [B w]^+ ds \right)^{1/2} L^{1/2} \leq c a \lambda (m(E^c))^{1/2} L^{1/2}.$$

K の Δ_2 は一部 $\tilde{\varphi}(P\chi_E)$, 一部 $|D_1 w|^2$ に作用する項

$$\leq c a^2 \lambda^2 \left(\int [B w]^+ ds \right)^{1/2} \left(\int [C_1 w]^2 ds \right)^{1/2} \leq c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

ゆえに, $L < \infty$ ならば,

$$L \leq c a^2 \lambda^2 m(E^c). \quad (9)$$

第5段階 (7) と (9) より, $\tau, M, L < \infty$ ならば

$$M \leq c a^2 \lambda^2 \left\{ \int_E [C_2 u]^2 dt + \int_E [S^{12} u]^2 dt \right\} + c a^4 \lambda^4 m(E^c).$$

Čebyšev の不等式より,

$$m\{t: Bu(t) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^4} \int_{E^+} [B u]^4 dt + m(E^+ c).$$

右辺の積分は M であるから, 第2項に対して τ の第1段の評価を用いると

$$m\{Bu > \lambda\} \leq \frac{c a^2}{\lambda^2} \left\{ \int_E [C_2 u]^2 dt + \int_E [S^{12} u]^2 dt \right\} + c(a^4 + 1) m(E^c)$$

E の定義から右辺に $a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c a^2}{\lambda^2} \left\{ \int_{\{C_2 u < \lambda\}} [C_2 u]^2 dt + \int_{\{S^{12} u < b\lambda\}} [S^{12} u]^2 dt \right\} \\ &\quad + c m(N_\delta u > a\lambda) + c m(S^{12} u > b\lambda) + c m(C_2 u > \lambda) \end{aligned}$$

ゆえに $L, M < \infty$ かつ (この仮定から, τ -一般性は失われる)

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \int [Bu]^p dt &= \tau \int_0^\infty m\{Bu > \lambda\} \lambda^{p-1} d\lambda \\ &\leq c(a^2 + a^{-2}) \|N_\delta u\|_p^p + c(a^2 b^{2-p} + b^{-p}) \|S^{1/2} u\|_p^p + c \|Gu\|_p^p. \end{aligned}$$

$\|Gu\|_p^p \leq c \|N_\delta u\|_p^p$ であることに注目. b を十分大にとり, 次は a を十分小に取れば求める式が得られる.

(6.3) $S^{1/2} u$ の評価.

補題 5. $u \in \mathcal{D}$ の重調和函数, $0 < p < 2$ とすると,

$$\|S^{1/2} u\|_p \leq c \|N_\delta u\|_p.$$

証明. 証明の方針はほぼ補題 4 と同様である.

第 1 段階. $a, b > 0$ を固定する. $\lambda > 0$ に対して

$$E = \{t : N_\delta u(t) < a\lambda, S^{1/2} u(t) < b\lambda, Bu(t) < \lambda\}$$

と置く. $\varepsilon > 0$ を小さくして固定する.

$$E^* = \{t : \mathbb{P}\chi_E(z) > 1 - \varepsilon \text{ for all } z \in \Gamma_\delta(t)\}$$

と置く. 補題 4, 第 1 段階によつて

$$E^* \subset E, \quad m(E^{*c}) \leq c m(E^c).$$

φ を補題 4 と与えられた函数とする.

$$I = \int (1 - |z_1|)(1 - |z_2|) \Delta_1 \Delta_2 [\varphi(\mathbb{P}\chi_E) u^2] dz_1 dz_2$$

の評価を考へる.

Green の公式を 2 回用いて

$$I \leq C \int_E u^2 dt \leq C \int_{\{N_\delta u < a\lambda\}} [N_\delta u]^2 dt \quad (10)$$

の 2 段階.

I にあって Δ_1, Δ_2 が作用する u^2 に作用する項は,

$$\begin{aligned} & 4 \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \varphi(P\chi_E) |\nabla_1 \nabla_2 u(z)|^2 dz_1 dz_2 \\ & \geq C \int_{\partial D} \int_D \chi_{E^*}(t) \chi_{\Pi_\delta(t)}(z) |\nabla_1 \nabla_2 u(z)|^2 dz dt \\ & = C \int_{E^*} [S^1 u(t)]^2 dt, \end{aligned} \quad (11)$$

であることが補題 4 のようにして示される.

I にあって Δ_1, Δ_2 が作用する $\varphi(P\chi_E)$ に作用する項を I_1 とする.

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_2 \varphi(P\chi_E) &= \varphi^{(iv)}(P\chi_E) |\nabla_1 w|^2 |\nabla_2 w|^2 \\ &+ O(\varphi'''(P\chi_E) |\nabla_1 w| |\nabla_2 w| |\nabla_1 \nabla_2 w| + \varphi''(P\chi_E) |\nabla_1 \nabla_2 w|^2), \end{aligned}$$

ここで $w = P\chi_E$ である.

$$\begin{aligned} & \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) |\varphi^{(iv)}(P\chi_E)| |\nabla_1 w|^2 |\nabla_2 w|^2 u^2 dz_1 dz_2 \\ & \leq C \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \overline{\varphi}(P\chi_E) |\nabla_1 w|^2 |\nabla_2 w|^2 u^2 dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int [B w]^4 dt \leq c a^2 \lambda^2 \int w^4 dt = c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

他の 2 項についても同様の評価がなされる。ゆえに

$$|I_1| \leq c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

I にあって Δ_1 が $\varphi(P\chi_E)$ に Δ_2 が u^2 に作用する項を I_2 とする。

$$\Delta_1 \varphi(P\chi_E) \Delta_2 u^2 = 2 \varphi''(P\chi_E) |\nabla_1 w|^2 |\nabla_2 u|^2.$$

ゆえに、補題 4 の L の評価から

$$|I_2| \leq c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

I にあって Δ_2 が $\varphi(P\chi_E)$ に Δ_1 が u^2 に作用する項も同様に評価される。

I にあって $\varphi(P\chi_E)$ と u^2 にそれぞれ z_1, z_2 に関する微分が 1 つずつ作用する項を I_3 とする。

$$|I_3| \leq c \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(P\chi_E) \left[|\nabla_1 w| |\nabla_2 w| + |\nabla_1 \nabla_2 w| \right. \\ \left. \times [|u| |\nabla_1 \nabla_2 u| + |\nabla_1 u| |\nabla_2 u|] dz_1 dz_2 \right]$$

Schwarz の不等式によつて

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(P\chi_E) |\nabla_1 w| |\nabla_2 w| |\nabla_1 u| |\nabla_2 u| dz_1 dz_2 \\ \leq [L \cdot L']^{1/2},$$

但し L は補題 4 で与えた積分 (集合 E の定義に要する), L'

は L で u と w の立場を交換して定義される。ゆえに上式は

$$\leq C a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(P\chi_E) |\nabla_1 w| |\nabla_2 w| |\nabla_1 \nabla_2 u| |u| dz_1 dz_2$$

$$\leq C a \lambda \left(\int_E [S^{12} u]^2 dt \right)^{1/2} \left(\int [Bw]^4 dt \right)^{1/2}.$$

補題 3 から, $\int [Bw]^4 dt \leq C m(E^c)$ であるから, 上式

$$\leq C \lambda^2 m(E^c) + C a^2 \int_{S^{12} u < b\lambda} [S^{12} u]^2 dt$$

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(P\chi_E) |\nabla_1 \nabla_2 w| |\nabla_1 u| |\nabla_2 u| dz_1 dz_2$$

について u と同様にして, $\int [S^{12} w]^2 dt \leq C m(E^c)$ を用いる

$$\leq C \lambda^2 m(E^c) + C a^2 \int_{S^{12} u < b\lambda} [S^{12} u]^2 dt.$$

がえられる。最後に

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(P\chi_E) |\nabla_1 \nabla_2 w| |\nabla_1 u| |\nabla_2 u| dz_1 dz_2$$

$$\leq C \left(\int [S^{12} w]^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_E [Bu]^4 dt \right)^{1/2}.$$

$\int [S^{12} w]^2 dt \leq C m(E^c)$ であるから, 上式

$$\leq C \lambda^2 m(E^c) + C \lambda^{-2} \int_{Bu < \lambda} [Bu]^4 dt.$$

ゆえに, $0 < a < 1$ ならば,

$$|I_3| \leq C a^2 \int_{S^2 u < b\lambda} [S^2 u]^2 dt + C \int_{Bu < \lambda} [Bu]^4 dt + C \lambda^2 m(E^c)$$

I にあって u^2 に z_1 に関する微分が 1, 他の 3, の微分は $\varphi(PX_E)$ に作用する項を I_4 とする.

$$|I_4| \leq C \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(PX_E) \left[|\nabla_1 w| |\nabla_2 w|^2 + |\nabla_1 \nabla_2 w| |\nabla_2 w| \right] |\nabla_1 u| |u| dz_1 dz_2$$

$$\leq C a \lambda \left(\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(PX_E) |\nabla_2 w|^2 |\nabla_1 u|^2 dz_1 dz_2 \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(PX_E) |\nabla_1 w|^2 |\nabla_2 w|^2 dz_1 dz_2 \right)^{1/2}$$

$$+ C a \lambda \left(\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(PX_E) |\nabla_1 \nabla_2 w|^2 dz_1 dz_2 \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \tilde{\varphi}(PX_E) |\nabla_2 w|^2 |\nabla_1 u|^2 dz_1 dz_2 \right)^{1/2}$$

右辺の $\varphi 1$, $\varphi 4$ 積分は補題 4. $\varphi 4$ 段階によ, τ

$$\leq C a^2 \lambda^2 m(E^c)$$

$\varphi 2$ の積分は補題 3 によ, τ

$$\leq C \|Bw\|_4^4 \leq C m(E^c).$$

第3項の積分は

$$\leq c \|S^{12} w\|_2^2 \leq c \|w\|_2^2 = c m(E^c).$$

以上をまとめると

$$|I_4| \leq c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

I において, u^2 に z_2 に関する微分が1, 他の3, の微分は $\varphi(PX_E)$ に作用する項を I_5 とすれば, 同様にして

$$|I_5| \leq c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

I において, $\varphi(PX_E)$ に z_1 に関する微分が1, 他の3, の微分は u^2 に作用する項を I_6 とする.

$$|I_6| \leq c \int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \widetilde{\varphi}(PX_E) |\nabla_1 w| |\nabla_2 u| |\nabla_1 \nabla_2 u| dz_1 dz_2.$$

L を補題4, 第3段で与えられた積分とする (集合 E の定義は要する) ならば

$$|I_6| \leq c \left(\int (1-|z_1|)(1-|z_2|) \widetilde{\varphi}(PX_E) |\nabla_1 \nabla_2 u|^2 dz_1 dz_2 \right)^{1/2} L^{1/2}$$

ゆえに $|I_6| \leq c a^2 \int_{S^{12} u < b\lambda} [S^{12} u]^2 dt + c \lambda^2 m(E^c).$

I において, $\varphi(PX_E)$ に z_2 に関する微分が1, 他の3, の微分は u^2 に作用する項も上と同様にして評価される.

以上をまとめると, $0 < a < 1$ ならば,

$$m\{S^{12}u > \lambda\} \leq m\{t \in E^*; S^{12}u(t) > \lambda\} + m(E^{*c})$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^2} \int_{E^*} [S^{12}u]^2 dt + c m(E^c)$$

$$\leq \frac{ca^2}{\lambda^2} \int_{S^{12}u < b\lambda} [S^{12}u]^2 dt + \frac{c}{\lambda^4} \int_{Bu < \lambda} [Bu]^4 dt$$

$$+ \frac{c}{\lambda^2} \int_{N_\delta u < a\lambda} [N_\delta u]^2 dt + cm(N_\delta u > a\lambda)$$

$$+ cm(S^{12}u > b\lambda) + cm(Bu > \lambda).$$

ここで $0 < p < 2$ とし,

$$\int_{\partial D} [S^{12}u]^p dt = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(S^{12}u > \lambda) d\lambda$$

$$\leq ca^2 b^{2-p} \|S^{12}u\|_p^p + c \|Bu\|_p^p + ca^{2-p} \|N_\delta u\|_p^p \\ + ca^{-p} \|N_\delta u\|_p^p + cb^{-p} \|S^{12}u\|_p^p + c \|Bu\|_p^p.$$

所て補題 4 から,

$$\|Bu\|_p \leq c(A\|u\|_{H^p} + A^+ \|S^{12}u\|_p).$$

従, c, b は十分大くと, c 固定し, 又 a は十分小くと, 最後 A は大にすれば,

$$\int_{\partial D} [S^{12}u]^p dt \leq \frac{1}{2} \|S^{12}u\|_p^p + \text{const} \|u\|_{H^p}^p.$$

ゆえに

$$\|S^{12}u\|_p \leq c \|u\|_{H^p}.$$

p.e.d.

定理 8 の証明. 補題 4, 5 より直ちに示される.

第四章 Hardy 空間と atom 分解

7. Chang - Fefferman の定理. 前節の結果から, $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$, は重調和函数, または超函数のクラスとして複素函数の概念を用いて定義できることがわかる. Chang - Fefferman [2] は更に一歩進めて atom 分解による表現が可能であることを示した.

記述を簡単にするため, $H^p(\mathbb{D})$ の代りに上半平面の積 $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ 上の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$ を考えることにする, $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y); x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2), y_j > 0\}$ である. $F \in H^p(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$ または単に $F \in H^p$ であるとは, F は $z = (z_1, z_2)$, $z_j = x_j + iy_j$, $y_j > 0$, の解析函数で

$$\|F\|_{H^p} = \sup_{y_1, y_2 > 0} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |F(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p} < \infty$$

であることである. 前節の結果によつて, H^p は次のような $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ 上の実重調和函数 u の空間として表す;

$$\|Nu\|_p < \infty,$$

$$Nu(x) = \sup \{|u(t, y)|; |x_j - t_j| < y_j, j = 1, 2\}.$$

定義. $\mathbb{R}^2$ 上の函数 a が atom であるとは, 開集合 $\Omega \subset$

$\mathbb{R}^2$ が存在して

$$1) \operatorname{supp} a \subset \Omega,$$

$$2) \|a\|_{L^2} \leq 1/|\Omega|^{1/2},$$

$$3) \int_I a(x_1, y_1) dx_1 = \int_J a(x_1, y_2) dx_2 = 0, \quad (y_1, y_2) \in \Omega,$$

但し I は $\Omega_{x_2} = \Omega \cap \{(y_1, x_2) : y_1 \in \mathbb{R}\}$ の任意の成分, J は同様である. 更に a は素粒子 $\{a_R\}$ の和で表わされる; $a = \sum a_R$,
ここに a_R は次の条件を満たす.

i) $\operatorname{supp} a_R \subset R$, ことに $R \subset \Omega$ は長方形 $R = I \times J$ であって Σ の R は他の R の3倍の中に入らない.

$$ii) \int_I a_R(x_1, y_2) dx_1 = \int_J a_R(y_1, x_2) dx_2 = 0 \quad \text{for } (y_1, y_2) \in I \times J,$$

$$iii) a_R \in C^\infty, \quad \|a_R\|_\infty \leq C_R |R|^{1/2}, \quad \|(\partial/\partial x_1) a_R\|_\infty \leq C_R |I|^{-3/2} |J|^{-1/2}, \\ \|(\partial/\partial x_2) a_R\|_\infty \leq C_R |I|^{-1/2} |J|^{-3/2}, \quad \|(\partial^2/\partial x_1 \partial x_2) a_R\|_\infty \leq C_R |I|^{-3/2} |J|^{-3/2}.$$

$$\sum C_R^2 < A/|\Omega|, \quad A \text{ は絶対定数.}$$

定理 10. $u \in H^1(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$ とする. u の境界函数は

$$u = \sum \lambda_k a_k \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

と分かる, ことに a_k は原子, $\lambda_k \geq 0$, $\sum \lambda_k \leq A \|u\|_{H^1}$.

逆に $u = \sum \lambda_k a_k$, a_k は原子, $\lambda_k \geq 0$, $\sum \lambda_k < \infty$ ならば

10. $u \in H^1(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$. 且して $\|u\|_{H^1} \leq A \sum \lambda_k$.

参 考 文 献

1. J.Brossard, Comportement des fonctions biharmoniques là où l'intégrale d'aire est finie, Bull.sc.math.,103 (1979),77-95.
2. S.-Y.Chang and R.Fefferman, A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc, Ann.of Math.,112(1980),179-201.
3. P.L.Duren, Theory of H^p Spaces, Acad.Press, 1980.
4. H.Dym and H.P.McKean, Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, Acad.Press, 1976.
5. C.Fefferman, Inequalities for strongly singular convolution operators, Acta Math.,124(1970),9-36.
6. C.Fefferman and E.M.Stein, H^p -spaces of several variables, Acta Math., 129(1972),137-193.
7. T.M.Flett, On some theorems of Littlewood and Paley, J.London Math.Soc., 31(1956),336-344.
8. R.F.Gundy and E.M.Stein, H^p theory for the poly-disc, Proc.Natl Acad. Sci.,U.S.A.,76(1979),1026-9.
9. S.Igari, On the decomposition theorems of Fourier transforms with weighted norms, Tohoku Math.J.,15(1963),6-36.
10. M.Kaneko, The absolute Cesàro summability and the Littlewood-Paley function, ibid.,24(1972),223-232.
11. Y.Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Wiley, New York,1968.

12. P.Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge Univ.Press, 1980.
13. M.-P.Malliavin and P.Malliavin, Intégrales de Lusin-Calderon pour les fonctions biharmoniques, Bull.sc.math.,101(1977),357-384.
14. J.Schwartz, A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector valued functions,Comm.Pure Appl.Math.,14(1961),785-799.
15. E.M.Stein, Classe H^p , multiplicateure et fonctions de Littlewood-Paley, C.R.Acad.Sc.Paris,263(1966),716-719 : Classe H^p , multiplicateures et fonctions de Littlewood-Paley, Applications de résultats antérieurs, ibid. 780-781 : H^p et multiplicateurs ; Cas n-dimensional, ibid.264(1967), 107-108.
16. E.M.Stein, A variant of the area integral, Bull.sc.math.,103(1979),449-461.
17. E.M.Stein and G.Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ.Press, 1971.
18. G.Sunouchi, Theorems on power series of the class H^p , Tohoku Math.J., 8 (1956), 125-146.
19. A.Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Univ.Press, 1959.