

斜め平板から流れる渦

東大・工 桑原 邦郎

§1. いとぐら

高い Reynolds 数の流れを解析的に研究することは、基礎方程式である Navier-Stokes 方程式の非線型のため、きわめておどかしい。また、差分法を用いて数値的に解を求めるとも、格子点の数を、Reynolds 数が高くなるにしたがって多くとらねばならないという制約があり、簡単なことではない。2次之外部流では、現在の超大型計算機とよばれるものを用いて、Reynolds 数が1000程度の計算がごく最近までなわれたにすぎない。

ところが、われわれが日常しばしば経験する流れは、Reynolds 数が数万から数千万程度のものが多く、このような、高 Reynolds 数の流れに関しては、現在ある高速計算機の能力をもってしても従来の差分法を用いた数値計算で、物理的に意味ある結果を得ることは、ほとんど不可能に近い。

しかしながら、高 Reynolds 数の流れでは、粘性の影響がきわめて小さな領域、あるいは薄い層に限られている、他の領域は粘性のない、完全流体とみなすことができる場合が多い。また渦は、粘性が意味をもつ領域でしか発生せず、このような流れでは、いちど発生した渦は、ほとんど消滅しない。このような場合、渦の領域を、適当に配置した渦系群で置換え、渦系間の運動学的な相互作用により、流れを時間的に追跡する近似法がある。(本論文では、この方法を渦系近似、あるいは *discrete-vortex approximation* とする。) この近似法は、Reynolds 数無限大の極限をみつかることに相当し、かつ数値計算に非常に適している。

Rosenhead が渦層の安定性を論ずる目的で 1931 年¹⁾に最初の渦系近似による計算をこなしてから以来いくつかの研究が、この方法を用いるなされてきたが、物体を過ぎる流れに關して渦系近似を用いたものは、ほとんど円柱を過ぎる流れに限られて、定性的には、甚く実験とある結果が得られているが、生成される渦系の強さと発生位置の決定に、どうしてもあいまいが残る、定量的な研究はあまりなされていない。

本論文では、渦系群と物体との相互作用の例として、平らな板を下げる流れを研究し、板が急に一定速度で動き出した時の抵抗を非定常的に計算した。また、この計算は、カル

マンの渦列が、比較的単純な、完全流体の渦の間の運動学的な相互作用だけでも形成されることを示している。この種の計算では、渦系の数が時間的に増加してしまい、非定常的な計算を進めていくことが急激にむづかしくなるという問題があるが、ある渦系の群を適当な1つの渦系で近似かえりという操作によって、十分後流が発達するまで計算可能であることが示された。

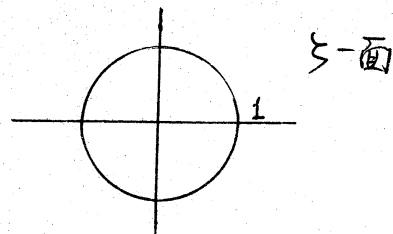
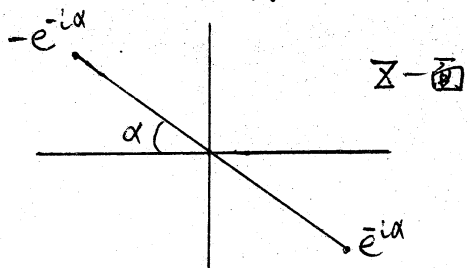
§2. 定式化

渦系近似の基本方程式は、複素表示を用いて、

$$\frac{d\bar{z}_i}{dt} = \left(\frac{df_i}{d\bar{z}} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_i} \quad (1)$$

と書ける。²⁾ ここで f_i は i 番目の渦系による項をのぞいた複素速度 potential である。速度 potential を求めるために、平板を円に写像し、この面を ζ -面とする。写像関数は、

$$\bar{z} = \frac{1}{\zeta} \exp(-i\alpha) \cdot \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (2)$$



ζ -面での速度 potential は

$$f = \frac{1}{2} \exp(-i\alpha) \cdot \left(\zeta + \frac{\exp(2i\alpha)}{\zeta} \right) - i \sum_{j=1}^{2n} K_j \log(\zeta - \zeta_j) + i \sum_{j=1}^{2n} K_j \log(\zeta - \bar{\zeta}_j). \quad \zeta_j \equiv 1/\bar{\zeta}_j \quad (3)$$

ここで, K_j, ζ_j は j 番目の渦系の強さと位置である。この ϕ 1 項は初めの potential 流れとあわせ, ϕ 2 項は渦系によるもので, ϕ 3 項は境界条件を合わせるための鏡像による項である。

ζ -面における運動方程式は,

$$\frac{d\bar{\zeta}_i}{dt} = \frac{df_i}{d\zeta} \cdot \left| \frac{d\zeta}{d\bar{z}} \right|_{\zeta=\bar{\zeta}_i}^2. \quad (4)$$

となる。

渦系の強さ K_j は Kutta の条件

$$\left(\frac{df}{d\zeta} \right)_{\zeta=\pm 1} = 0 \quad (5)$$

により決定する。

平板にはたらく力は, 一般化された Blasius の公式

$$X - iY = i\rho \cdot \oint \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{1}{2} i\rho \cdot \oint \left(\frac{df}{d\bar{z}} \right)^2 d\bar{z}, \quad (6)$$

を用いて表す。ここで X, Y は抵抗と揚力である。(3)式を用いると

$$\oint \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = -2\pi \cdot \exp(-i\alpha) \cdot \sum_{j=1}^{2n} K_j \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\xi_j^2} \frac{\partial \xi_j}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$\oint \left(\frac{df}{d\bar{z}} \right)^2 d\bar{z} = -4\pi \cdot \sum_{j=1}^{2n} K_j \left(\frac{d\xi_j}{d\bar{z}} \right)_{\xi=\xi_j} \cdot \left\{ \left(\frac{df_j'}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_j'} + \frac{i K_j}{(\xi_j'^2 - 1) \xi_j'} \right\}.$$

数値計算の詳細は文献(2)に由る。

§3. 結果

特徴的な例として、迎え角 60° と 15° の場合の流れのパターンを図1, 図2に示す。この結果は, Arakaki^{3), 4), 5)} の実験結果と非常によい一致を示している。また, この結果は, 乱流中の coherent な運動が, 非常に単純な完全流体の渦の周りの運動学的相互作用だけで起こることを示唆している。

謝辞

この問題を最初にご覧いただいた今井功先生に感謝します。
また, 貴重な実験結果も教えて下された新垣義一先生に感謝します。

文献

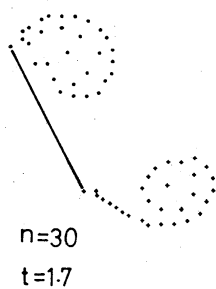
- 1) L. Rosenhead: Proc. Roy. Soc. A 134 (1931) 170.
- 2) K. Kuwahara: J. Phys. Soc. Japan 35 (1973) 1545.

- 3) G.Arakaki: J. Sci. Hiroshima Univ., A-II32 (1968) 91.
- 4) G.Arakaki: Bul. Sci. & Eng. Univ. Ryukyus, Math. & Nat. Sci. 15 (1972)
- 5) G.Arakaki: private communication.

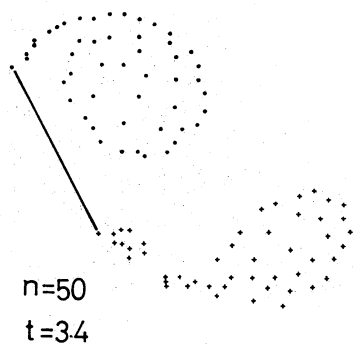
図 1



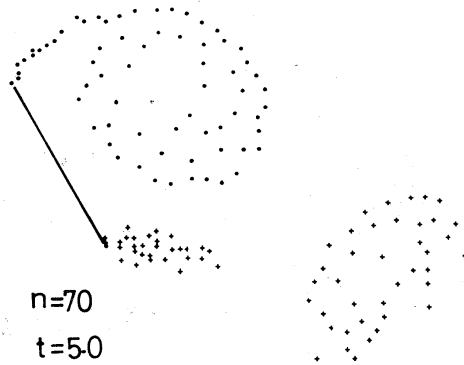
(a) 平板の両
端から渦が
はがれる。



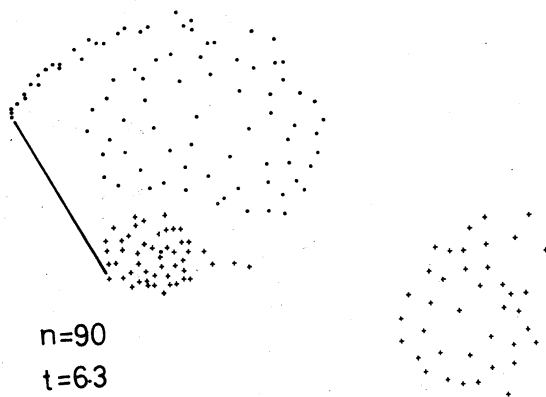
(b) はがれた
渦が成長す
る。



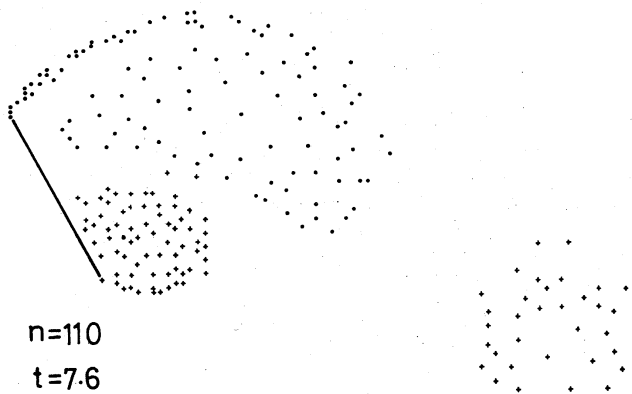
(c) 上端から
はがれた渦
が下端から
の渦の間に
入っていく。



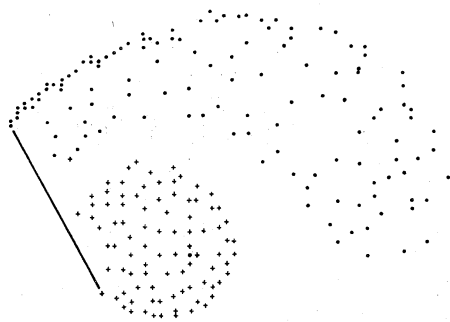
(d) 下端の
はがれた渦
は独立した
渦として
下端に流
れる。



(e) 下端に2
目、2番目
の渦の下の
まわりが成長
する。上端
の渦は成長
を続ける。

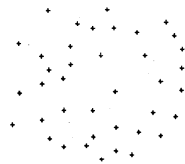


(f) 成長が進
む。

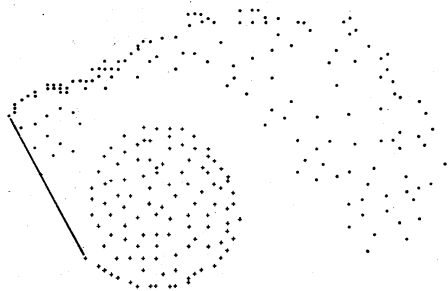


n=130

t=8.9



(8) 下端の渦
の中心まわり
が上端の渦
の周に入り
はじめる。

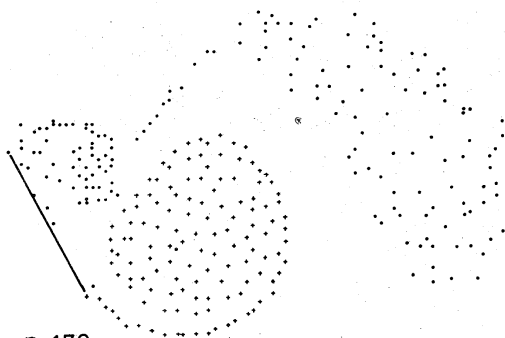


n=150

t=10.3

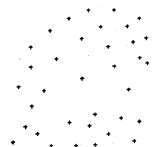


(9) 下端の渦
が上端の渦
を切りはな
しはじめる。

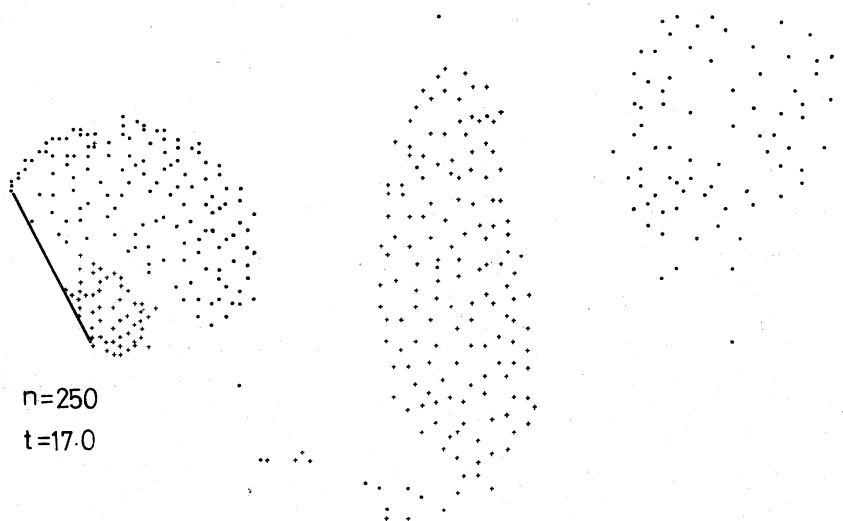
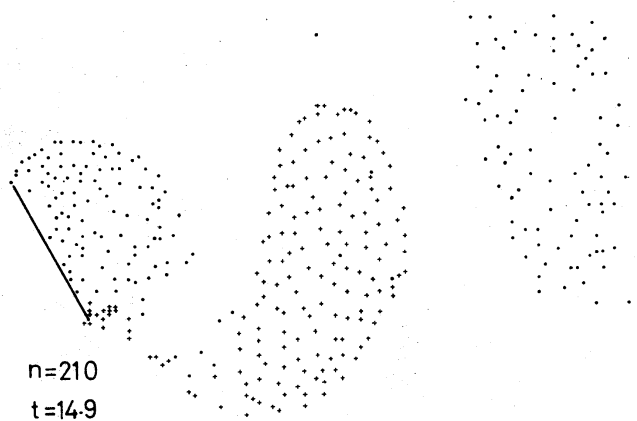
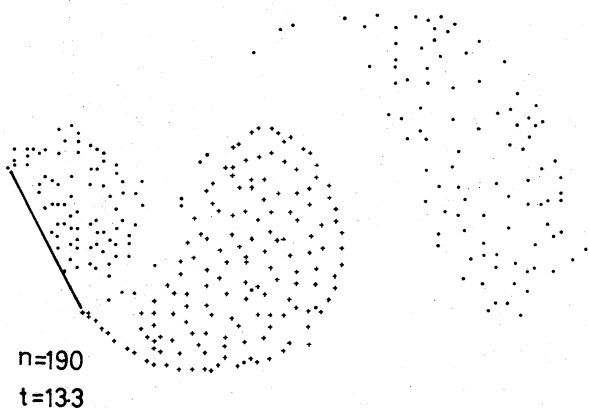


n=170

t=11.8



(10) 下端の渦
は成長を
づけ、上端
の渦を切り
はなす。



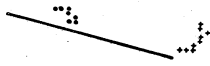
(f) 上端の2
番目の渦が
成長し、下
端の2番目
の渦を切り
はくそうと
下る。

(g) 以下同様
な上端、下
端の渦の相
互作用によ
り渦列が形
成されてい
く。

(h)

$n=10$ $t=0.41$

図 2



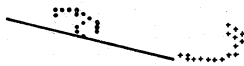
(a) 板の両端

から渦がは

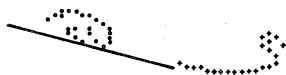
かれる。

$n=20$ $t=0.87$

(b)



$n=30$ $t=1.34$



(c) 下端から

はかれた渦

は流れて、

上端から

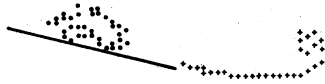
はかれた渦は

板の上にと

どまる。

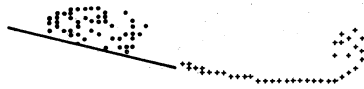
n=40 t=1.82

(d) 渦が成長する。



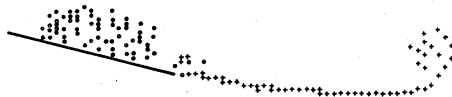
n=50 t=2.32

(e)

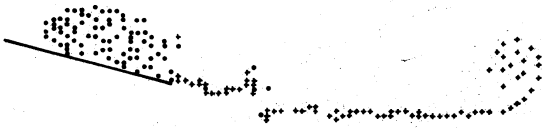


n=70 t=3.39

(f) 上端からはがれた渦が成長し、下端からのはがれる渦に影響を及ぼしはじめる。

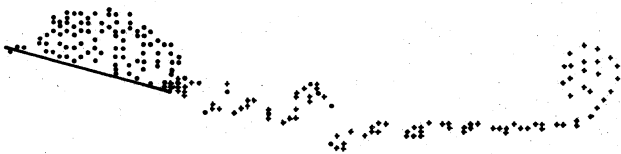


n=90 t=4.55



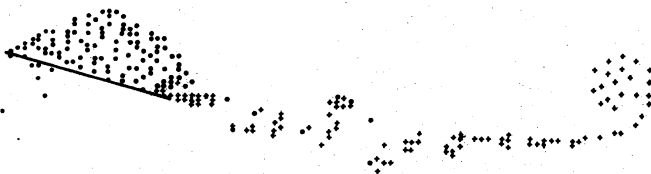
(8) 下端から
はがれた渦
層がみだれ
はじめる。

n=110 t=5.42



(9) 渦層のみ
だれが小さ
くなる。

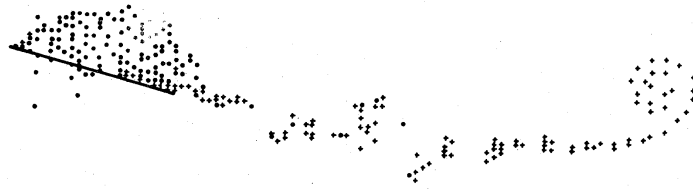
n=130 t=5.90



(10) 下端から
はがれた渦
が上端から
の渦の間に
わってはい
はじめる。

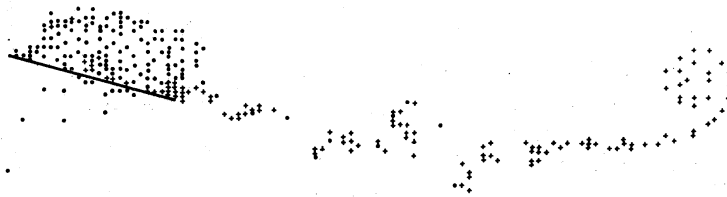
n=150 t=6.29

(f)以下渦の
成長がすす
む。



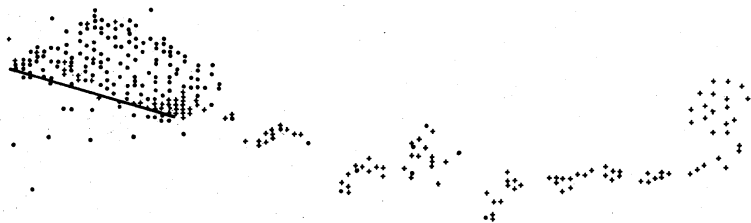
n=170 t=6.75

(g)



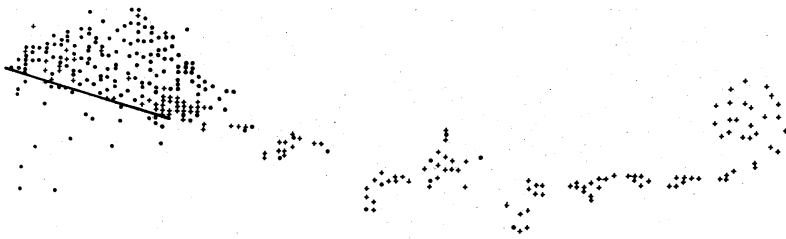
n=190 t=7.09

(h)

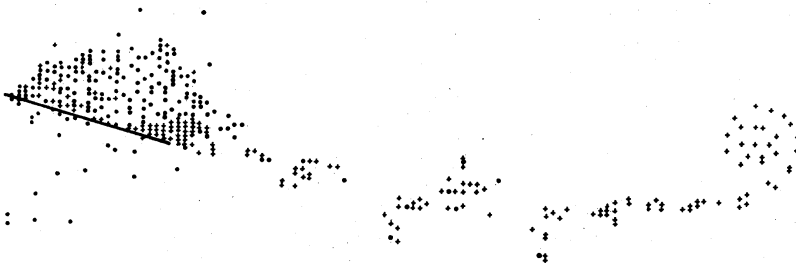


$n=210$ $t=7.46$

(m)

 $n=230$ $t=7.66$

(n)

 $n=270$ $t=8.22$

(o)

