

ある概均質ベクトル空間のHOLONOMY DIAGRAMについて

東京教育大学付属盲学校 尾関 育三

まえがき

概均質ベクトル空間の b -多項式 (b -関数) $b(s)$ を求めるためには、その空間の *orbital decomposition* を行ない、得られた *orbits* の中から b -多項式の因子に対応すると考えられる、いわゆる “good orbit”^註 を見いだして行なうという方法がとられていた。この方法は木村達雄氏によって有限個の *orbits* に分解する可能性をもつ空間が確定されてからは、その範囲に属する空間に適用されて、かなりの成果を上げることができた。しかし、作用する群と表現空間とが複雑さを増すにつれて、*orbital decomposition* が完成しても、“good orbit”であることが確認できる *orbits* が十分に得られなかったり、ある因子のべきで割れることの証明ができなかったりして、 b -多項式の決定に困難をきたす例が現われるようになってきた。表1は筆者が *orbital decomposition* を完成し、昨年春の学会で報告した「GL(8)

が3次の skew Tensor の空間に induce する表現」の orbits と、その代表点および、それらに対応することが確定、もしくは推定された b -多項式の因子等を示したものであるが、これでは b -多項式を決定することは困難であった。ところが、その直後から “holonomy system” に関する理論が急速に進歩し、概均質ベクトル空間の相対不変式の holonomy diagram を決定することによって、 b -多項式が確定できることがあることが明らかにされた。^{註2} 図1は先に述べた $GL(8)$ の holonomy diagram であり、表1の結果から予想された b -多項式がそのまま事実として確定された。

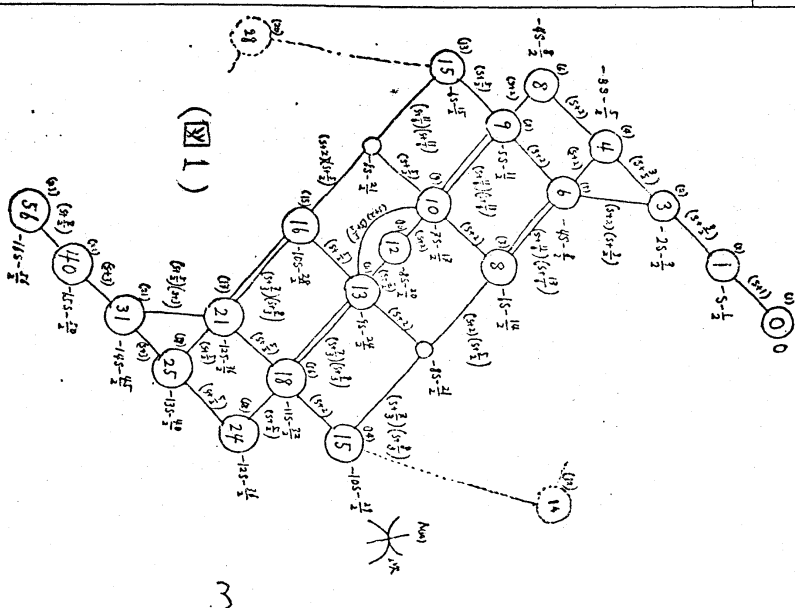
図2は木村氏によって決定された $SL(5) \times GL(3)$ の holonomy diagram で各 holonomy manifold が G_0 prehomogeneous な交わりで、次々につながっており、 b -多項式を決定するのに極めて好都合な例である。

さて、以上のような成功に促されて筆者は「有限個の orbits をもつと考えられる最後の既約概均質ベクトル空間」で orbital decomposition が極めて困難な $SL(5) \times GL(4)$ に、この方法を用い、 b -多項式を決定してみようと試みた。その結果 holonomy diagram の主要な部分を決定することができたが、この空間の場合、従来例に見られない種々の困難にも遭遇している。以下これについて述べることにする。

表 1.

代表点	column	$\text{tr}_{\mathbb{A}} A$	$\text{bc}(S)$ の因子	$G_{\mathbb{R}}^i$ の構造	dual
1	$\mathbb{R}_0$	0		$SL(3)$	23
2	$\mathbb{R}_1$	$-\frac{5}{7}$	$s+1$	$(GL(1) \times SL(2)) \cdot (Ga)^5$	22
3	$\mathbb{R}_3$	$-\frac{4}{7}$	$s+\frac{5}{2}$	$(GL(1)^2 \times SL(2)) \cdot U(6)$	21
4	$\mathbb{R}_4$	$-\frac{4}{7}$	$s+\frac{5}{2}$	$GL(1)^3 \cdot U(9)$	19
5	$\mathbb{R}_5$	$-\frac{2}{7}$	$s+2$	$(GL(1)^2 \times SL(2)) \cdot U(9)$	17
6	$\mathbb{R}_8$	$-\frac{2}{7}$	$s+2$	$(GL(1) \times SL(2)) \cdot U(12)$	18
7	$\mathbb{R}_8$	$-\frac{16}{21}$	$s+\frac{16}{6}$	$(GL(1) \times SL(2)^3) \cdot (Ga)^6$	15
8	$\mathbb{R}_9$	$-\frac{2}{7}$	$s+2$	$(GL(1)^2 \times SL(2)^2) \cdot U(9)$	16
9	$\mathbb{R}_{10}$	$-\frac{2}{7}$	$s+2$	$(GL(1)^2 \times SL(2)) \cdot U(13)$	11
10	$\mathbb{R}_{12}$	$-\frac{2}{7}$	$s+2$	$(GL(1)^3 \times SL(2)^2) \cdot (Ga)^{12}$	10
11	$\mathbb{R}_{13}$	$-\frac{2}{7}$	$s+2$	$(GL(1) \times SL(2)) \cdot U(17)$	9
12	$\mathbb{R}_{14}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1) \times Ga) \cdot (Ga)^7$	20
13	$\mathbb{R}_{15}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1) \times Sp(2) \times SL(3)) \cdot (Ga)^4$	14
14	$\mathbb{R}_{15}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)^2 \times SL(2)^2) \cdot U(15)$	13
15	$\mathbb{R}_{16}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)^2 \times SL(2)^2) \cdot U(16)$	7
16	$\mathbb{R}_{18}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)^3 \times SL(2)^2) \cdot U(17)$	8
17	$\mathbb{R}_{21}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)^2 \times SL(3)) \cdot U(19)$	5
18	$\mathbb{R}_{24}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(SL(3)^2 \times SL(2) \times GL(1)) \cdot (Ga)^{12}$	6
19	$\mathbb{R}_{25}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)^2 \times SL(3) \times SL(2)) \cdot U(22)$	4
20	$\mathbb{R}_{28}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)^2 \times Sp(3)) \cdot U(13)$	12
21	$\mathbb{R}_{31}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)^2 \times Sp(2) \times SL(3)) \cdot U(19)$	3
22	$\mathbb{R}_{40}$	$-\frac{3}{7}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1) \times SL(3) \times SL(5)) \cdot (Ga)^5$	2
23	$\mathbb{R}_{56}$	0	$s+\frac{7}{2}$	$GL(8)$	1

但し 一般に $U(n)$ の n 次元 $\mathbb{C}$ -ボロント群を意味す。(唯一つは $U(1)$)
 G_a は 1 次元 additive group の意味.



$GL(8)$ 相対不変式 = 56 元 16 次元
 23-orbit
 $\mathcal{O}(5) = (s+1)(s+\frac{3}{2})^2(s+\frac{11}{6})(s+2)^3(s+\frac{13}{6})$
 $\times (s+\frac{7}{3})(s+\frac{5}{2})^3(s+\frac{8}{3})(s+3)^2(s+\frac{2}{3})$
 (I. Ojeki, June 1974)

1. $X_0 = (u_1 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$
2. $X_1 = (u_1 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_2 \wedge u_4 \wedge u_6$
3. $X_3 = (u_1 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_5 \wedge u_6$
4. $X_4 = (u_1 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$
5. $X_6 = (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$
6. $X_8 = (u_1 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5) \wedge u_7$
7. $X_8' = (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_5 + u_2 \wedge u_6) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$
8. $X_9 = u_1 \wedge u_4 \wedge u_8 + (u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$
9. $X_{10} = (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_5 + u_2 \wedge u_6) \wedge u_7$
10. $X_{12} = u_1 \wedge u_4 \wedge u_8 + u_2 \wedge u_5 \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$
11. $X_{13} = u_1 \wedge u_4 \wedge u_8 + u_2 \wedge u_5 \wedge u_7 + u_1 \wedge u_3 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_2 \wedge u_4 \wedge u_6$
12. $X_{14} = (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$
13. $X_{15} = u_1 \wedge u_4 \wedge u_8 + (u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6) \wedge u_7$
14. $X_{15}' = (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$
15. $X_{16} = u_1 \wedge u_4 \wedge u_8 + u_2 \wedge u_5 \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_5 \wedge u_6$
16. $X_{18} = u_1 \wedge u_4 \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$
17. $X_{21} = u_1 \wedge u_4 \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_2 \wedge u_4 \wedge u_6$
18. $X_{24} = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$
19. $X_{25} = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_2 \wedge u_4 \wedge u_6$
20. $X_{28} = u_1 \wedge u_4 \wedge u_7 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$
21. $X_{31} = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_1 \wedge u_5 \wedge u_6$
22. $X_{40} = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$
23. $X_{56} = 0$

註1 orbit Gx_i が "good orbit" であるとは

(1) G が orbit Gx_i の conormal bundle

$\overline{\{(x, y) \in V \times V^* \mid x \in Gx_i, y \in V_x^*\}} \subset V \times V^*$ に概均質に作用すること。

(2) orbit Gx_i の conormal bundle が characteristic variety

$W = \overline{\{(x, t \cdot \text{grad } \log f(x)) \mid x \in V - S\}} \subset V \times V^*$ に含まれる。

であることをいう。ただし $f(x)$ は概均質ベクトル空間 (G, V) の既約相対不変多項式 (既約正則ならば定数倍を除いて一通りに定まる) . V^* は V の dual . S は $f(x)$ の零点集合 . V_x^* は $x \in V$ の conormal vector space $\{y \in V^* \mid \text{内積}(y, \eta x) = 0\}$ とする。

b -多項式 $b(S)$ の因子について次の定理が成り立つ。^{但し G : G のリ-環}

定理1 (佐藤)

$x_i \in V$ に対し Gx_i が good orbit でかつ

$$\frac{\text{tr}_{\mathfrak{g}_{x_i} A}}{\text{tr}_V A} \quad (A \in \mathfrak{g}_{x_i}, \text{tr} A \neq 0)$$

の値が一定ならば b -多項式 $b(S)$ は

$$(S + \frac{\dim V}{\deg f} \cdot \frac{\text{tr}_V A + \text{tr}_{\mathfrak{g}_{x_i} A}}{\text{tr}_V A}) \text{ なる因子をもつ。ただし}$$

$\mathfrak{g}_{x_i}$ は x_i における isotropy subalgebra, $\text{tr}_{\mathfrak{g}_{x_i} A}$ は $\mathfrak{g}_{x_i}$ の adjoint 表現の trace .

定理2 (佐藤)

$b(S)$ が $S + \alpha$ で割り切れるならば $S + \frac{\dim V}{\deg f} + 1 - \alpha$ でも割り切れる。

1. 準備

K を標数 0 の代数閉体.

$$G = SL(5) \times GL(4)$$

V^5 を K 上の 5 次元ベクトル空間

$\{u_1, u_2, \dots, u_5\}$ を V^5 の base.

$V_{\square}^5$ を $u_i \wedge u_j$ ($1 \leq i < j \leq 5$) の張る K 上の 10 次元ベクトル空間.

$$V = V_{\square}^5 \oplus V_{\square}^5 \oplus V_{\square}^5 \oplus V_{\square}^5 \text{ とする.}$$

このとき G が V に induce する表現が $SL(5) \times GL(4)$ であり、 $G \ni (A, B)$ ($A \in SL(5)$, $B \in GL(4)$) が V に属する点.

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ($x_i \in V_{\square}^5$) におよぼす作用は
 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (Ax_1, Ax_2, Ax_3, Ax_4)^t B$ である.

以上によって $SL(5) \times GL(4)$ は $GL(9)$ の部分群.

$$\left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \end{matrix} \end{array} \right\} \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = 1$$

$$\det \begin{bmatrix} a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{---(1)}$$

が $GL(9)$ の部分空間で $u_i \wedge u_j \wedge u_k$ ($1 \leq i < j \leq 5$, $k = 6, 7, 8, 9$) で張られる空間に induce する表現と同値であるので、以下では口述の便宜上、 G は (1) の形で、また V の元は

$\sum_{k=6}^9 \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq 5} a_{ijk} (u_i \wedge u_j) \right\} \wedge u_k$ の形で表わすことにする。

2. $SL_{\square}(5) \times GL_{\square}(4)$ の holonomy diagram

$SL_{\square}(5) \times GL_{\square}(4)$ の orbital decomposition は全く未解決であるので、その holonomy diagram を既知の orbits の conormal bundle を用いて構成することはできない。そこで、まず、codim 1 の orbit の dual と考えられる orbit の generic point x_i をとり、その conormal vector space $V_{x_i}^*$ の generic point y_i を求めて、これが codim 1 の orbit に属するかどうかを調べる。

codim 1 の orbit の dual の generic point と考えられる点としては、 $GL_{\square}(8)$ や $SL_{\square}(5) \times GL_{\square}(3)$ の場合から類推して $u_1 \wedge u_2 \wedge u_6$ とった。この点の isotropy subalgebra は式 (2) に示す通りである。

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & & & & \\ & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & & & & \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} & & & & \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} & & & & \\ \hline & & & & & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ & & & & & 0 & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ & & & & & & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ & & & & & & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_6 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{--- (2)}$$

これによって $u_1 \wedge u_2 \wedge u_6$ の属する orbit の codim は 30 であることが知られる。よって、この点を以下 x_{30} 、また orbit Gx_{30} に対応する holonomy manifold を ③①、isotropy subgroup を $G_{x_{30}}$ 、isotropy subalgebra を $\mathfrak{g}_{x_{30}}$ 、conormal vector space

3.

[illegible]

V_{x30}^* の base

$$\begin{aligned}
 w_1 &= -e_3 + e_9 - 4\alpha + \beta \\
 w_2 &= -e_4 + e_9 - 4\alpha + \beta \\
 w_3 &= e_3 + e_4 + e_9 - 4\alpha + \beta \\
 w_4 &= -e_3 + e_8 - 4\alpha + \beta \\
 w_5 &= -e_4 + e_8 - 4\alpha + \beta \\
 w_6 &= e_3 + e_4 + e_8 - 4\alpha + \beta \\
 w_7 &= -e_3 - e_8 - e_9 - 4\alpha + \beta \\
 w_8 &= -e_4 - e_8 - e_9 - 4\alpha + \beta \\
 w_9 &= e_3 + e_4 - e_8 - e_9 - 4\alpha + \beta \\
 w_{10} &= -e_3 - 10\alpha \\
 w_{11} &= -e_4 - 10\alpha \\
 w_{12} &= e_3 + e_4 - 10\alpha \\
 w_{13} &= e_1 + e_3 - e_8 - e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{14} &= e_1 + e_4 - e_8 - e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{15} &= e_1 - e_3 - e_4 - e_8 - e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{16} &= e_1 + e_3 + e_8 + \alpha + \beta \\
 w_{17} &= e_1 + e_4 + e_8 + \alpha + \beta \\
 w_{18} &= e_1 - e_3 - e_4 + e_8 + \alpha + \beta \\
 w_{19} &= e_1 + e_3 + e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{20} &= e_1 + e_4 + e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{21} &= e_1 - e_3 - e_4 + e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{22} &= -e_1 + e_3 - e_8 - e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{23} &= -e_1 + e_4 - e_8 - e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{24} &= -e_1 - e_3 - e_4 - e_8 - e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{25} &= -e_1 + e_3 + e_8 + \alpha + \beta \\
 w_{26} &= -e_1 + e_4 + e_8 + \alpha + \beta \\
 w_{27} &= -e_1 - e_3 - e_4 + e_8 + \alpha + \beta \\
 w_{28} &= -e_1 + e_3 + e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{29} &= -e_1 + e_4 + e_9 + \alpha + \beta \\
 w_{30} &= -e_1 - e_3 - e_4 + e_9 + \alpha + \beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_4 \wedge u_5 \wedge u_9 \\
 u_3 \wedge u_5 \wedge u_9 \\
 u_3 \wedge u_4 \wedge u_9 \\
 u_4 \wedge u_5 \wedge u_8 \\
 u_3 \wedge u_5 \wedge u_8 \\
 u_8 \wedge u_4 \wedge u_8 \\
 u_4 \wedge u_5 \wedge u_7 \\
 u_3 \wedge u_5 \wedge u_7 \\
 u_3 \wedge u_4 \wedge u_7 \\
 u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 \\
 u_3 \wedge u_5 \wedge u_6 \\
 u_3 \wedge u_4 \wedge u_6 \\
 u_1 \wedge u_3 \wedge u_7 \\
 u_1 \wedge u_4 \wedge u_7 \\
 u_1 \wedge u_5 \wedge u_7 \\
 u_1 \wedge u_3 \wedge u_8 \\
 u_1 \wedge u_4 \wedge u_8 \\
 u_1 \wedge u_5 \wedge u_8 \\
 u_1 \wedge u_3 \wedge u_9 \\
 u_1 \wedge u_4 \wedge u_9 \\
 u_1 \wedge u_5 \wedge u_9 \\
 u_2 \wedge u_3 \wedge u_7 \\
 u_2 \wedge u_4 \wedge u_7 \\
 u_2 \wedge u_5 \wedge u_7 \\
 u_2 \wedge u_3 \wedge u_8 \\
 u_2 \wedge u_4 \wedge u_8 \\
 u_2 \wedge u_5 \wedge u_8 \\
 u_2 \wedge u_3 \wedge u_9 \\
 u_2 \wedge u_4 \wedge u_9 \\
 u_2 \wedge u_5 \wedge u_9
 \end{aligned}$$

を $V_{x_{30}}^*$ と記す。他の orbit に属する点についても同様とする。(codim の等しい互いに異なる orbit については、' をつけて区別する。)

$V_{x_{30}}^*$ の base と、これにおける $\mathfrak{g}_{x_{30}}$ の image は (3) に示す通りである。これによれば $G_{x_{30}}^*$ と $V_{x_{30}}^*$ は概均質で、その generic point は

$u_4 \wedge u_5 \wedge u_6 + (u_1 \wedge u_3 + u_2 \wedge u_5) \wedge u_7 + (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_3) \wedge u_8 + (u_1 \wedge u_5 + u_2 \wedge u_4) \wedge u_9$ である。この isotropy subalgebra は

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 3t & & & & & & \\ & 3t & & & & & \\ & & -2t & & & & 0 \\ & & & -2t & & & \\ 0 & & & & 2t & & \\ & & & & & 4t & \\ & & & & & & t \\ & & & & & & & -t \\ & & & & & & & & -t \end{array} \right] \quad \text{--- (4)}$$

(4) であり、従ってこの点は codim 1 の orbit に属する。

これによって、holonomy diagram の最上位には ①、次に ①、また最下位には ④①

。その上に ③① が位置することが確定した。

$(G_{x_{30}}^*, V_{x_{30}}^*)$ の codim 1 の点としては、互いに異なる orbit に属する点として、 $(u_4 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_4) \wedge u_6 + u_1 \wedge u_3 \wedge u_7 + (u_1 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_3) \wedge u_8 + u_2 \wedge u_5 \wedge u_9$ および $(u_4 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_5) \wedge u_6 + (u_1 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_3) \wedge u_7 + u_1 \wedge u_4 \wedge u_8 + (u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_4) \wedge u_9$ がとれる。これらの属する orbits の codim はいずれも 2 である。よって、前者を x_2 、後者を x_2' と記すことにする。これらの dual は $V_{x_2}^*$ および $V_{x_2'}^*$ の generic points で、codim 24 と 21 であ

HOLONOMY DIAGRAM

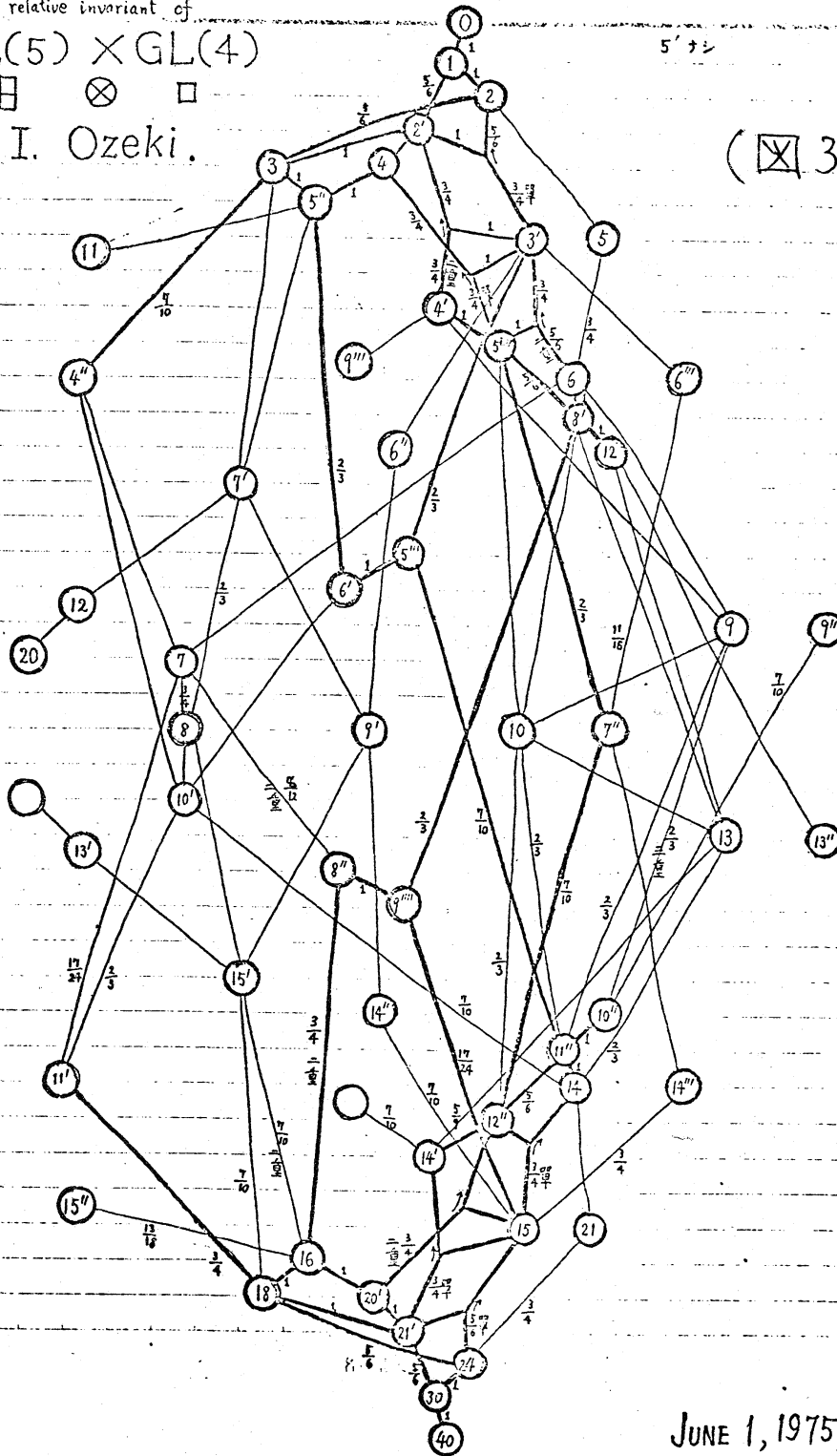
for the relative invariant of

$$SL(5) \times GL(4)$$

 $\square \otimes \square$

by I. Ozeki.

5' ナシ

($\boxtimes$ 3)

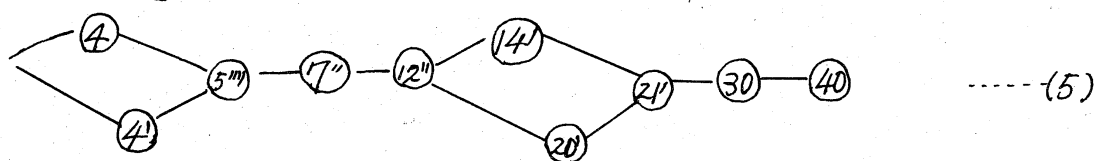
JUNE 1, 1975, NAGOYA

とくに2を参照せよ

ることが上と同様の方法で知られる。これによって holonomy diagram の ①の下に② および ②'、③④の上に②④ ②' (図3の中では②④とした) が位置づけられる。以上の操作を反復して得られたのが図3である。

3. holonomy diagram の考察

$SL_{\square}(5) \times_{\otimes} GL_{\square}(4)$ の holonomy diagram は ①—①—②



という経路で①と⑤が結ばれている。この経路は通過する holonomy manifold とそれらの交わりが全て G prehomogeneous になっている唯一の経路である。従って b -多項式の因子が、この経路から求められるのではないかと期待されるが、

⑤''—⑦''の間と、⑦''—⑫''の間には従来の b -多項式の因子を求める公式は全く適用できない。もっとも、⑫''を見ると $G_{x_{12}}$ が $SL(3) \times GL(2)$ になっており、 $(G_{x_{12}}^*, V_{x_{12}}^*)$ は $SL_{\square}(3) \times_{\otimes} GL_{\square}(2)$ と、正則概均質になっている。

「一般に holonomy diagram 中に正則概均質な conormal vector space をもつ manifold があるとき、それより上に現われる subdiagram は、その正則概均質ベクトル空間の holonomy diagram に一致する」という事実が知られているが実際、今回も①と⑫''の間の subdiagram は $SL_{\square}(3) \times_{\otimes} GL_{\square}(2)$ の

holonomy diagram に一致している。従ってこの部分には
図3に記した因子が対応する。よって(5)の経路のうち、

①—①—②—④—⑤^{'''} および、その dual の部分に対応
する b-多項式の 因子はそれぞれ $(S+1)^3(S+\frac{3}{4})^2$
 $(S+\frac{5}{4})^2(S+\frac{5}{6})(S+\frac{7}{6})$ である。

従って b-多項式の因子を全て決定することは、⑤^{'''}—⑦^{''}
および、その dual の間のそれぞれ11個の因子を決定すること
に帰着する。もっとも⑤^{'''}—⑧['] および、その dual の部分に
それぞれ $(S+\frac{5}{6})(S+\frac{7}{6})$ が対応しているので、⑤^{'''}—⑦^{''} お
よび、その dual の部分にそれぞれこの2個の因子が含まれて
いなければならない。また更に④^{''}, ⑤^{'''}, ⑧['] は それから上に
のびる線がいずれも一本ずつになっており、このことは、ま
えがき註1に記した定理1の $\frac{\text{tr}_{\text{adg}_{\mathbb{F}_2} A}}{\text{tr}_V A}$ の値が一定であるこ
とを示しているので、これから $(S+\frac{7}{10})$, $(S+\frac{2}{3})$ などの因
子の存在が期待される。そこで③—④^{''}, ③[']—⑤^{'''} および⑦—⑧[']
の間の因子を調べる必要があるが、現在ではこれに好都合な
簡単な方法は見つかっていない。ただ、相対不変式 $f(x)$ の
④^{''}, ⑤^{'''} などにおける localization をそれぞれ計算し、それ
に対応する b-多項式の因子を算出することが考えられる。
さいわい④^{''} の localization は $\mathfrak{o}_{x_{4''}}^*$ の $V_{x_{4''}}^*$ における image か
ら、 Γ 2元5次式 $\sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} x_i u^{5-i} v^i$ の判別式において $x_0=1$

$x_1 = 0$ とおいたものに等しい」という事実が 最近の
佐藤先生と矢野氏の研究によって明らかになった。このあた
りに問題解決の糸口が得られることが期待されている。

$\mathcal{O}_{X_{4''}}$ の $V_{X_{4''}}^*$ における image

$$\left\{ - \begin{bmatrix} 5t & 5a_{31} & \frac{5}{2}a_{21} & -5a_{41} \\ & 4t & -4a_{31} & -2a_{21} \\ & 0 & 3t & -3a_{31} \\ & & & 2t \end{bmatrix} \right\} \quad \text{---- (6)}$$

$\mathcal{O}_{X_{5'''}}$ の $V_{X_{5'''}}^*$ における image

$$\left\{ - \begin{bmatrix} 6a_4 & a_{53} & 3a_{51} & -2a_{32} & -3a_{52} \\ & 5a_4 & a_{53} & a_{51} & -a_{32} \\ & & 4a_4 & 3a_{53} & 2a_{51} \\ & 0 & & 3a_4 & 4a_{53} \\ & & & & 2a_4 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{--- (7)}$$

holonomy diagramによる b -多項式の求め方

1. holonomy diagram のつくり方

概均値ベクトル空間 (G, V) の各 orbit Gx_i に対し、その conormal bundle $T_{Gx_i}^* V \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in Gx_i, y \in V_x^*\} \subset V \times V^*$ (V^* は V の dual space, V_x^* は orbit Gx_i の点 x における conormal vector space) をとり、それぞれに次のように conormal bundles を対応させる。すなわち orbit Gx_i に conormal bundle $T_{Gx_i}^* V$ で対応する V^* の orbit G^*y_i をとり、これを V の orbit $Gx_{i'}$ と同一視する。そして、 $Gx_{i'}$ の conormal vector space $V_{x_{i'}}^*$ をとり、 $(Gx_{i'}, V_{x_{i'}}^*)$ の codim. 1 の各 singular set S_j (の既約成分) の generic point y_j を求める。各 y_j について、それが属する (G^*, V^*) の orbit を求め、それを (G, V) の orbit と見なし、 $T_{Gx_i}^* V$ の下にその conormal bundle $T_{Gy_j}^* V$ を置き、 $T_{Gx_i}^* V$ と線でつなぐ。

以上の操作によって得られる diagram を holonomy diagram といい、各 conormal bundle を holonomy manifold とよぶ。

2. holonomy diagram による b -多項式の求め方.

(1) holonomy manifold の order

各 holonomy manifold に $-\delta X(A)S - \text{tr}_{V_{x_i}^*} A_0 + \frac{1}{2} \dim V_{x_i}^*$

(但し. $A_i \in \mathcal{O}_{x_i}$, ${}^t A_i y_i = y_i$, y_i は $V_{x_i}^*$ の generic point, $\delta\chi$ は (G, V) の既約な相対不変多項式の character) なる量を対応させる。これを、その holonomy manifold の order といふ。

(2) $m:n$ なる比。

$(G_{x_i}, V_{x_i}^*)$ の codim. 1 の各 singular set S_j から、その generic point y_j をとり、 $A_i \in \mathcal{O}_{x_i}$ で ${}^t A_i y_j = y_j$ となる A_i をとる。 $\mathcal{O}_{x_i} y_j$ に属さない元 y をとり、 $A_i y$ を mod. $\mathcal{O}_{x_i} y_j$ で考えると、スカラー倍となるから、そのスカラーを a とする。

$$A_i y \equiv a y \text{ mod. } \mathcal{O}_{x_i} y_j$$

ここで $a = \frac{m}{m+n}$ なる等式をみたす互いに素なる自然数 m, n が存在するとき、その比 $m:n$ を考える。holonomy manifold $T_{G_{x_i}}^* V$ のすぐ上に、 y_j を $(G_{x_j}, V_{x_j}^*)$ の generic point とする holonomy manifold $T_{G_{x_j}}^* V$ が存在する。 $m:n$ なる比をこの二つの holonomy manifold を結ぶ線に対応させる。

(3) order と m, n による b -多項式の因子の決定。

holonomy diagram の線は、これによって結ばれる二つの holonomy manifolds の間に codim. 1 の交わりがあることを意味する。1 の方法では、二つの holonomy manifolds

の間の交わりしか見いだせないが、三つ以上の holonomy manifolds が交わることもある。holonomy manifolds の交わり方が 次の場合について、その交わりに対応する b -多項式の因子を order と $m:n$ を用いて決定することが出来る。

(i) エッただけが交わる場合

holonomy manifold Λ_0 の上に Λ_1 があり、線でつながれているものとする。 Λ_0 の一つの相対不変式の character を $\delta\rho_1$, order を $-m_0s - \frac{\mu_0}{2}$, Λ_1 の order を $-m_1s - \frac{\mu_1}{2}$. Λ_0 と Λ_1 の間の線に $m:n$ なる比に対応しているものとする。

Λ_0 に関する相対不変式の character が

$$-\delta\chi = C_1 \delta\rho_1 + \dots \quad (C_1 \text{ は整数})$$

$$\text{tr}_{V_{\Lambda_0}}^* = a_1 \delta\rho_1 + \dots \quad (a_1 \text{ は半整数}) \text{ となっているとき、}$$

(a) 交わりが transversal な場合

(2) における a が不定のとき、交わりは transversal となる。

$$C_1 = m_0 - m_1, \quad a_1 = \frac{\mu_0 - \mu_1 + 1}{2} \text{ なる関係が成り立つ。このとき}$$

$\Lambda_0 - \Lambda_1$ の間の b -多項式の因子 $b_{\Lambda_0}(s)$ は

$$b_{\Lambda_0}(s) = \left[(m_0 - m_1)s + \frac{\mu_0 - \mu_1 + 1}{2} \right]^{(m_0 - m_1)} \quad [\alpha]^m = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha)} \\ (m \text{ は整数})$$

(b) 交わりが transversal でない場合

$$C_1 = \frac{(m_0 - m_1)(n + m)}{n + 1}, \quad a_1 = \frac{1}{2} \left\{ m + \frac{(\mu_0 - \mu_1)(n + m)}{n + 1} \right\}$$

なる関係が成り立つ。このとき、 $\Delta_0 - \Delta_1$ の間に

$$b_{\Delta_0}(s) = \prod_{k=0}^n \left[l s + \frac{a_1 + k}{m+n} \right]^l, \text{ 但し } l = \frac{m_0 - m_1}{n+1} = \frac{c_1}{n+m} \in \mathbb{Z}$$

(ii) 三つが交わる場合.

holonomy manifolds $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ が  のように交わる ($\Delta_0 - \Delta_1$ の交わりは transversal, Δ_2 が $\Delta_0 - \Delta_1$ と交わりに接する) 場合.

Δ_j の order を $-m_j s - \frac{\mu_j}{2}$, $j = 0, 1, 2$.

$\Delta_0 - \Delta_1$ の交わりに $m:n$ の比が対応する。このとき.

$$l_0 = \frac{(1+m)m_0 - m_1 - m m_2}{m n + m + n} \in \mathbb{Z}$$

$$l_1 = \frac{m_0 + n m_2 - (1+n)m_1}{m n + m + n} \in \mathbb{Z}$$

$$l_2 = \frac{(m+n)m_2 - m m_0 - n m_1}{m n + m + n} \in \mathbb{Z} \quad \text{とする。このとき}$$

$\Delta_1 - \emptyset$ の間に

$$\prod_{v=0}^{m-1} \left[l_1 s + \frac{\mu_0 + n \mu_2 - (1+n)\mu_1}{2(m n + m + n)} + \frac{1+n+2v}{2(m+n)} \right]^{l_1}$$

$\emptyset - \Delta_0$ の間に

$$\prod_{v=0}^{n-1} \left[l_0 s + \frac{(1+m)\mu_0 - \mu_1 - m \mu_2}{2(m n + m + n)} + \frac{1+m+2v}{2(m+n)} \right]^{l_0}$$

$\Delta_2 - \emptyset$ の間に

$$\left[l_2 s + \frac{(m+n)\mu_2 - \mu_0 - n \mu_1}{2(m n + m + n)} + \frac{1}{2} \right]^{l_2}$$

が対応する。

(4) 以上のように、 b -多項式の因子が対応した holonomy diagram の線を最上位から最下位まで通り、対応する因子の積をつくれば、道筋に因循なく、その積が b -多項式となる。

1975. 8. 15

 $SL(5) \times GL(4)$ の orbits の generic point.

 $U_i \wedge U_j \wedge U_k$ を以下 $\langle i, j, k \rangle$ と記す。 $\sim$ は G -equivalent
 $n.ph$ is not prehomogeneous

- ① $\langle 2, 4, 6 \rangle + \langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$
 $\sim \langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 3, 4, 6 \rangle + \langle 2, 3, 7 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 1, 3, 8 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 2, 4, 9 \rangle$
 $+ \langle 3, 5, 9 \rangle$ 40 次元.
- ② $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 2, 5, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 3, 8 \rangle + \langle 1, 5, 9 \rangle + \langle 2, 4, 9 \rangle$ 39 次元
- ③ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 3, 4, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 3, 8 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle$ 38 次元
- ④ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 2, 3, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle + \langle 3, 4, 9 \rangle$
 $\sim \langle 2, 3, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle - \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle - \langle 3, 5, 9 \rangle$ 38 次元
- ⑤ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 5, 7 \rangle + \langle 3, 4, 7 \rangle + \langle 2, 3, 8 \rangle + \langle 2, 4, 9 \rangle - \langle 1, 3, 9 \rangle$ 37 次元
- ⑥ $\langle 1, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 37 次元
- ⑦ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 5, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 3, 8 \rangle + \langle 2, 4, 9 \rangle - \langle 1, 3, 9 \rangle$ 36 次元
- ⑧ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 5, 7 \rangle + \langle 3, 4, 7 \rangle + \langle 2, 3, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle$ 36 次元
- ⑨ $\langle 2, 5, 6 \rangle + \langle 2, 4, 7 \rangle + \langle 3, 5, 7 \rangle - \langle 1, 5, 8 \rangle - \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle - \langle 2, 3, 9 \rangle$ 36 次元
- ⑩ $\langle 1, 5, 6 \rangle + \langle 3, 4, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 3, 5, 8 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle$ 35 次元 $n.ph$
- ⑪ $\langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 1, 5, 9 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 35 次元, 最初 (5) といふ
- ⑫ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 35 次元
- ⑬ $\langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle - \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 35 次元
- ⑭ $\langle 1, 5, 6 \rangle + \langle 3, 5, 7 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 34 次元
- ⑮ $\langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 1, 5, 8 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 34 次元
- ⑯ $\langle 1, 5, 6 \rangle + \langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle$ 34 次元 $n.ph$
- ⑰ $\langle 1, 3, 6 \rangle - \langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 5, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle - \langle 3, 4, 8 \rangle - \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 34 次元 $n.ph$
- ⑱ $\langle 2, 5, 6 \rangle + \langle 2, 4, 7 \rangle + \langle 3, 5, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle - \langle 2, 3, 9 \rangle$ 33 次元 $n.ph$
- ⑲ $\langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 5, 7 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle$ 33 次元 $n.ph$
- ⑳ $\langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 5, 9 \rangle + \langle 2, 4, 9 \rangle$
 $\sim \langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 1, 2, 8 \rangle + \langle 4, 5, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 33 次元
- ㉑ $\langle 1, 3, 7 \rangle - \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 2, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 33 次元 $n.ph$
- ㉒ $\langle 2, 5, 6 \rangle + \langle 3, 4, 7 \rangle - \langle 1, 5, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle \sim \langle 2, 5, 6 \rangle + \langle 3, 4, 7 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 1, 5, 9 \rangle$
- ㉓ $\langle 2, 3, 6 \rangle + \langle 2, 5, 7 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 3, 5, 8 \rangle + \langle 1, 4, 9 \rangle$ 32 次元

- ⑨ $\langle 3,5,7 \rangle + \langle 2,4,8 \rangle + \langle 1,4,9 \rangle + \langle 1,5,9 \rangle + \langle 2,3,9 \rangle$ 31次元 n.ph
 ⑨' $\langle 2,5,6 \rangle + \langle 1,3,7 \rangle + \langle 1,2,8 \rangle + \langle 2,4,9 \rangle + \langle 3,5,9 \rangle$ 31次元 n.ph
 ⑨'' $\langle 1,2,6 \rangle + \langle 3,5,6 \rangle + \langle 1,3,7 \rangle + \langle 1,4,8 \rangle + \langle 2,3,8 \rangle + \langle 1,5,9 \rangle + \langle 3,4,9 \rangle$ 31次元 n.ph
 ⑨''' $\langle 4,5,6 \rangle + \langle 1,4,7 \rangle + \langle 2,5,8 \rangle + \langle 3,4,9 \rangle + \langle 3,5,9 \rangle$ 31次元 n.ph
 ⑩ $\langle 2,5,7 \rangle + \langle 2,4,8 \rangle + \langle 3,5,8 \rangle + \langle 1,4,9 \rangle + \langle 2,3,9 \rangle$ 30次元 n.ph
 ⑪ $\langle 3,5,6 \rangle + \langle 2,5,7 \rangle + \langle 4,5,8 \rangle + \langle 1,4,9 \rangle + \langle 2,3,9 \rangle$ 29次元 n.ph
 ⑫ $\langle 2,3,6 \rangle + \langle 2,5,7 \rangle + \langle 3,5,8 \rangle + \langle 1,4,9 \rangle$ 28次元
 ⑫' $\langle 2,3,6 \rangle + \langle 2,4,7 \rangle - \langle 1,5,8 \rangle + \langle 1,2,9 \rangle$ 28次元 n.ph
 ⑫'' $\langle 1,2,6 \rangle + \langle 1,3,7 \rangle + \langle 1,4,8 \rangle + \langle 1,5,9 \rangle$ 20次元 n.ph

Nov. 4 現在, 下記の orbits が追加された. 又, 上記 ⑨' と ⑨'' が
 同一 orbit であることがわかった.

(全て not prehomogeneous)

- ⑧''' $\langle 1,4,6 \rangle + \langle 2,5,6 \rangle + \langle 3,4,7 \rangle + \langle 1,5,7 \rangle + \langle 2,3,8 \rangle$ 32次元 codim 8
 ⑮'' $\langle 1,2,6 \rangle + \langle 1,3,7 \rangle + \langle 2,4,7 \rangle + \langle 3,4,8 \rangle$ 25次元 codim 15
 ⑮' $\langle 1,4,7 \rangle + \langle 2,3,6 \rangle + \langle 1,5,6 \rangle$ 22次元 codim 18
 ⑲ $\langle 1,2,6 \rangle + \langle 1,3,7 \rangle + \langle 2,3,8 \rangle$ 18次元 codim 22
 ⑲' $\langle 1,3,6 \rangle + \langle 2,4,6 \rangle$ 13次元 codim 27
 ⑮''' $\langle 1,3,6 \rangle + \langle 1,4,7 \rangle + \langle 1,5,8 \rangle + \langle 2,3,7 \rangle + \langle 2,4,8 \rangle + \langle 2,5,9 \rangle$ 34次元
 ⑮'''* = ⑮'
 ⑮'''* = ⑲

- (i^*) は (i) の dual.
- ? は generic point 不明.

- $(40) = (0^*)$ 0 40次元 codim 0
 $(30) = (1)$ $\langle 1, 2, 6 \rangle$ 10次元 codim 30
 $(24) = (2^*)$ $\langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 2, 4, 7 \rangle$ 16次元 codim 24
 $(21) = (2^*)$ $\langle 1, 3, 6 \rangle + \langle 2, 4, 6 \rangle - \langle 1, 2, 7 \rangle$ 19次元 codim 21
 $(18) = (3^*)$ $\langle 1, 4, 6 \rangle + \langle 2, 3, 6 \rangle + \langle 1, 2, 7 \rangle + \langle 1, 3, 8 \rangle$ 22次元 codim 18
 $(15) = (3^*)$ $\langle 2, 5, 6 \rangle - \langle 3, 4, 6 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle - 2\langle 1, 2, 7 \rangle$ 25次元 codim 15
 $(26) = (4^*)$ $\langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 3, 4, 7 \rangle$ 20次元 codim 20
 $(14) = (4^*)$ $\langle 2, 4, 6 \rangle - \langle 3, 5, 6 \rangle + \langle 1, 2, 7 \rangle + \langle 1, 3, 8 \rangle$ 26次元 codim 14
 $(11) = (4^*)$ $\langle 1, 4, 7 \rangle + \langle 2, 3, 7 \rangle - \langle 1, 2, 8 \rangle - \langle 1, 3, 9 \rangle - 2\langle 1, 5, 6 \rangle - 2\langle 3, 4, 6 \rangle$ 29次元 codim 11
 $(21) = (5^*)$ $\langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle$ 19次元 codim 21 n.ph
 $(12) = (5^*)$ $\langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 4, 5, 6 \rangle - \langle 1, 4, 7 \rangle + \langle 2, 3, 7 \rangle - \langle 2, 5, 9 \rangle$ 28次元 codim 12
 $(16) = (5^*)$ $\langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 3, 4, 7 \rangle + \langle 1, 3, 8 \rangle$ 24次元 codim 16
 $(9) = (5^*)$ $2\langle 1, 3, 6 \rangle + 2\langle 4, 5, 6 \rangle - \langle 1, 4, 7 \rangle + \langle 2, 3, 7 \rangle - \langle 2, 4, 9 \rangle - 3\langle 1, 2, 8 \rangle$ 21次元 codim 9
 $(14) = (6^*)$ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 2, 7 \rangle + \langle 1, 3, 8 \rangle$ 26次元 codim 14
 $(8) = (6^*)$ $\langle 2, 5, 6 \rangle + \langle 3, 4, 6 \rangle + \langle 1, 4, 7 \rangle + \langle 1, 3, 8 \rangle - \langle 2, 3, 8 \rangle + \langle 1, 2, 9 \rangle$ 32次元 codim 8
 $(14) = (6^*)$ $\langle 2, 5, 6 \rangle + \langle 3, 4, 6 \rangle + \langle 1, 2, 7 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 2, 3, 9 \rangle$ 26次元 codim 14 n.ph
 $(14) = (6^*)$ $\langle 2, 3, 6 \rangle - \langle 1, 4, 6 \rangle - \langle 1, 2, 7 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle$ 26次元 codim 14 n.ph
 $(10) = (7^*)$ $\langle 1, 5, 6 \rangle + \langle 4, 5, 7 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle - \langle 1, 4, 9 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle$ 30次元 codim 10 n.ph
 $(15) = (7^*)$ $\langle 1, 5, 6 \rangle + \langle 1, 4, 7 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 4, 5, 9 \rangle$ 25次元 codim 15 n.ph
 $(7^*) \sim (7^{**})$
 $(27) = (7^{**})$
 $(8^*) \sim (8)$
 $(11) = (8^*)$ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 2, 7 \rangle + \langle 3, 4, 7 \rangle - \langle 1, 3, 8 \rangle$ 29次元 codim 11
 $(13) = (9^*)$ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 1, 3, 7 \rangle + \langle 2, 4, 7 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle$ 27次元 codim 13 n.ph
 $(9^*) \sim (9)$
 $(13) = (9^{**})$ $\langle 1, 4, 7 \rangle + \langle 2, 3, 7 \rangle + \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 2, 5, 9 \rangle$ 27次元 codim 13 n.ph
 $(10^*) \sim (10)$, $(11^*) = (15^{**})$
 $(10) = (12^*)$ $\langle 1, 2, 6 \rangle + \langle 1, 5, 8 \rangle + \langle 3, 5, 8 \rangle + \langle 3, 4, 9 \rangle$ 30次元 codim 10
 $(13) = (12^*)$ $\langle 4, 5, 6 \rangle + \langle 3, 5, 7 \rangle + \langle 1, 4, 7 \rangle + \langle 3, 4, 8 \rangle + \langle 1, 3, 9 \rangle$ 27次元 codim 13 n.ph
 $(12) = (20^*)$ $\langle 1, 3, 6 \rangle + \langle 2, 3, 7 \rangle + \langle 1, 4, 8 \rangle + \langle 2, 4, 9 \rangle$

HOLONOMY DIAGRAM
OF THE RELATIVE INVARIANT OF
 $SL(5) \times GL(4)$, $\square \otimes \square$

I. OZEKI, MAY 1975

REVISED NOV. 4, 1975

