

乱流エネルギー散逸率の規格化について¹

気象研究所 毛利英明 (Hideaki Mouri)
Meteorological Research Institute

1. はじめに

乱流では運動エネルギーが大スケールから小スケールに伝達し熱として散逸している. よって単位質量あたりの平均エネルギー散逸率 $\langle \varepsilon \rangle = \nu \langle (\partial_{x_i} v_j + \partial_{x_j} v_i)^2 \rangle / 2$ は動粘性係数 ν の値と無関係で, むしろ大スケールを特徴づけるパラメータで決まる筈である:

$$\langle \varepsilon \rangle = C \frac{\langle u^2 \rangle^{3/2}}{L}. \quad (1)$$

ここで C は無次元の係数, $\langle u^2 \rangle^{1/2}$ は縦速度変動 u の標準偏差, L は大スケールあるいはエネルギー保有渦を代表する直径. こうした渦のエネルギーが $\langle u^2 \rangle$ 程度なのに対し, 時間スケールは $L/\langle u^2 \rangle^{1/2}$ 程度である. エネルギー保有渦から小スケール側へのエネルギー伝達率は $\langle u^2 \rangle^{3/2}/L$ 程度となり, 平均エネルギー散逸率 $\langle \varepsilon \rangle$ に等しい筈である. 式 (1) は Taylor [1] や Batchelor [2] をはじめ乱流の様々な研究に用いられている [3].

長さスケール L としては伝統的に積分長つまり縦速度変動 u の相関長 L_u が採用されてきた. 定義は 2 点相関 $\langle u(x+r)u(x) \rangle$ を用い

$$L_u = \frac{\int_0^\infty \langle u(x+r)u(x) \rangle dr}{\langle u^2 \rangle}. \quad (2a)$$

しかし Sreenivasan [4, 5] は, 数多くの実験や数値計算を比較した結果, 係数 $C_u = \langle \varepsilon \rangle L_u / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ が境界条件や外力など流れ場の構造を決めるパラメータに依存することを見出した. 同じ流れ場では, Reynolds 数が高くてエネルギーを保有する大スケールと散逸が起こる小スケールが分離している限り, 係数 C_u を 10^0 程度の定数と看做することが出来た. これらは後の実験 [6, 7] や数値計算 [8, 9] でも確認されている.

係数 C_u が流れ場に依存することは $\langle u^2 \rangle^{3/2}/L_u$ がエネルギー保有渦から小スケール側へのエネルギー伝達率を正確には反映しないことを意味する. 相関長 L_u はエネルギー保有渦を代表する直径 L に比例していない. そこで相関長 L_u に替わる L の定義を見出すことが重要となる. 本稿では L として縦速度エネルギー u^2 の相関長 L_{u^2} を考える:

$$L_{u^2} = \frac{\int_0^\infty \langle [u^2(x+r) - \langle u^2 \rangle][u^2(x) - \langle u^2 \rangle] \rangle dr}{\langle (u^2 - \langle u^2 \rangle)^2 \rangle}. \quad (2b)$$

風洞実験データを用いて $C_{u^2} = \langle \varepsilon \rangle L_{u^2} / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ が流れ場に依存するか依存しないか調べることにしよう.

¹Résumé of our manuscript available at <http://arxiv.org/abs/1202.1048>.

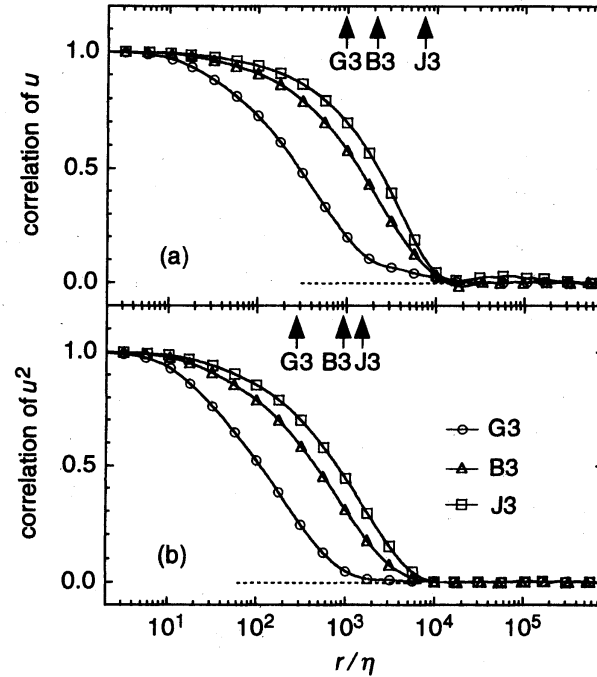


図 1: 格子乱流 G3 (○), 境界層乱流 B3 (△), 噴流 J3 (□) における速度 u とエネルギー u^2 の相関関数. 横軸は Kolmogorov 長 η で規格化したスケール r . 相関関数は $r = 0$ の値で規格化. 矢印は L_u あるいは L_{u^2} .

2. 風洞実験

本稿では気象研究所の風洞において取得した格子乱流 G1–G5 ($Re_\lambda = 153$ –436), 境界層乱流 B1–B6 ($Re_\lambda = 455$ –2097), 噴流 J1–J6 ($Re_\lambda = 709$ –3315) の実験データを用いる. ここで $Re_\lambda = \langle u^2 \rangle^{1/2} \lambda / \nu$ は Taylor 微細長 $\lambda = [\langle u^2 \rangle / (\partial_x u)^2]^{1/2}$ に対する Reynolds 数. 各々の流れ場について風洞への流入風速を変えることで Re_λ を変えた. 実験データのうち G1–G5, B2, B3, B5, J2–J5 は以前の研究 [10, 11, 12] でも用いている.

図 1 に相関関数 $\langle u(x+r)u(x) \rangle$ と $\langle [u^2(x+r) - \langle u^2 \rangle][u^2(x) - \langle u^2 \rangle] \rangle$ を示す. 縦速度 u の相関に比べ縦速度エネルギー u^2 の相関は減衰が速い. その結果 L_{u^2} の値は L_u の値に比べ小さくなる.

3. 結果

図 2 に $C_u = \langle \epsilon \rangle L_u / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ と $C_{u^2} = \langle \epsilon \rangle L_{u^2} / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ を Reynolds 数 Re_λ の関数として示す. 横軸が対数表示であるため Re_λ の上昇に伴い C_u と C_{u^2} が下降する傾向が強調されている.² 同様の傾

²係数 $C = \langle \epsilon \rangle L / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ を定数と仮定する既存の議論 [2, 3] は修正を要する. 図 2b の実線のように $C \propto Re_\lambda^{-\alpha}$ と近似しよう. 大スケールに関する Reynolds 数 $\langle u^2 \rangle^{1/2} L / \nu$ は $\propto Re_\lambda^{2-\alpha}$. Kolmogorov 長 $\eta = (\nu^3 / \langle \epsilon \rangle)^{1/4}$ を用いた単位体積あたりの自由度 $(L/\eta)^3$ は $\propto Re_\lambda^{9/2-3\alpha}$. また減衰する等方乱流に例えば Loitsyansky 不変量が存在し $\propto \langle u^2 \rangle L^5$ と書けるなら $\partial_t \langle u^2 \rangle \propto -\langle \epsilon \rangle$ から減衰則 $\langle u^2 \rangle \propto t^{-(10-5\alpha)/(7-5\alpha)}$ が得られる. なお α は定数でなく高 Reynolds 数においては無視できる筈である.

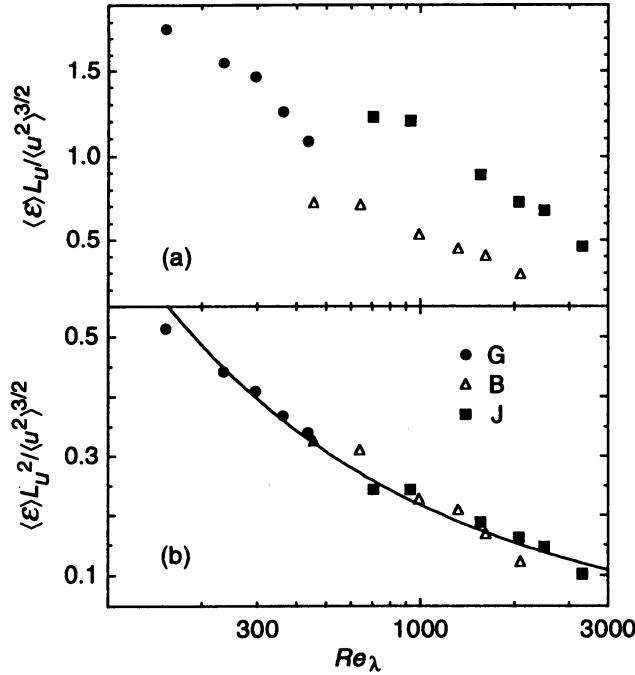


図 2: 格子乱流 G1-G5 (●), 境界層乱流 B1-B6 (△), 噴流 J1-J6 (■) における $C_u = \langle \epsilon \rangle L_u / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ と $C_{u^2} = \langle \epsilon \rangle L_{u^2} / \langle u^2 \rangle^{3/2}$. 横軸は Reynolds 数 Re_λ . 実線は $C_{u^2} \propto Re_\lambda^{-1/2}$.

向が先行研究の結果にも見てとれる [6, 7, 8, 9]. 図 2 における Re_λ が大小スケールを完全に分離するほど高くないため [13], エネルギー保有渦でも小スケール側へのエネルギー伝達に加えエネルギー散逸が起きているのだ. さらに格子乱流・境界層乱流・噴流について C_u の系列が互いに整列しないのに対し C_{u^2} の系列は整列する. 係数 C_{u^2} が流れ場に依存せず普遍的である可能性が存在するのである.

4. 議論

相関長 L_{u^2} がエネルギー保有渦を代表する直径 L となり得る理由を議論しよう. 速度場 $u(x)$ を長さ R の区間に分割する. 各区間の中心座標を仮に x_0 として縦速度エネルギー u^2 を粗視化してみる:

$$u_R^2(x_0) = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{+R/2} u^2(x_0 + x) dx. \quad (3)$$

速度場 $u(x)$ が一様な場合に u_R^2 の分散は [14]

$$\langle (u_R^2 - \langle u_R^2 \rangle)^2 \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R (R-r) \langle [u^2(x+r) - \langle u^2 \rangle] [u^2(x) - \langle u^2 \rangle] \rangle dr. \quad (4a)$$

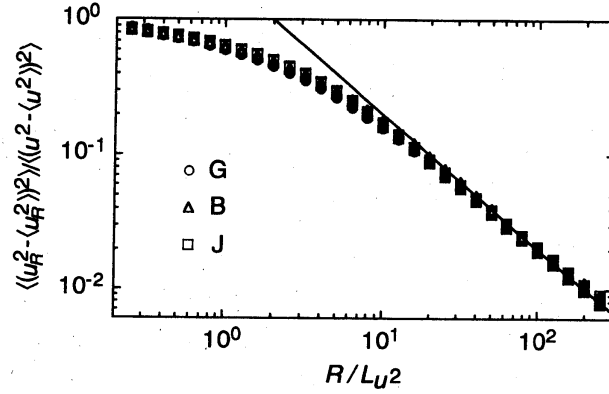


図 3: 格子乱流 G1-G5 (○), 境界層乱流 B1-B6 (△), 噴流 J1-J6 (□) における $\langle (u_R^2 - \langle u_R^2 \rangle)^2 \rangle / \langle (u^2 - \langle u^2 \rangle)^2 \rangle$. 横軸は R/L_{u^2} . 実線は関係式 (4b).

さらに相関関数 $\langle [u^2(x+r) - \langle u^2 \rangle][u^2(x) - \langle u^2 \rangle] \rangle$ が $r \gg L_{u^2}$ で無視できる場合は式 (2b) と (4a) から³

$$\langle (u_R^2 - \langle u_R^2 \rangle)^2 \rangle = \frac{2L_{u^2}}{R} \langle (u^2 - \langle u^2 \rangle)^2 \rangle \quad \text{at } R \gg L_{u^2}. \quad (4b)$$

分散 $\langle (u_R^2 - \langle u_R^2 \rangle)^2 \rangle$ を用いてエネルギー保有渦を代表する直径 L を決めよう. こうした渦の平均エネルギーを $\langle u^2 \rangle$ と定義していた. 長さ R の区間を長さ $nL \ll R$ の部分区間に分割する:

$$u_R^2 = \frac{nL}{R} \sum_{m=1}^{R/nL} u_{nL}^2(x_m). \quad (5a)$$

但し x_m は m 番目の部分区間の中心座標. $n = 1$ で部分区間はエネルギー保有渦に対応する. 平均エネルギーは $\langle u_L^2 \rangle = \langle u^2 \rangle$. 隣接するエネルギー保有渦は相関するが, こうした相関は十分な数の渦の集団で無視できる. よって $n = N \gg 1$ なら $\sum_{m=1}^{R/NL} u_{NL}^2(x_m)$ の分散は $(R/NL) \langle (u_{NL}^2 - \langle u_{NL}^2 \rangle)^2 \rangle$ となり式 (5a) から

$$\langle (u_R^2 - \langle u_R^2 \rangle)^2 \rangle = \frac{NL}{R} \langle (u_{NL}^2 - \langle u_{NL}^2 \rangle)^2 \rangle \quad \text{at } R \gg NL \gg L. \quad (5b)$$

関係式 (4b) と (5b) をまとめると

$$L_{u^2} = \gamma L \quad \text{for } \gamma = \frac{N \langle (u_{NL}^2 - \langle u_{NL}^2 \rangle)^2 \rangle}{2 \langle (u^2 - \langle u^2 \rangle)^2 \rangle}. \quad (5c)$$

結局 N と γ の値を固定して L を決めれば $L \propto L_{u^2}$ が成立する. 仮定なしに N と γ の値は決められないが実験結果を用いて議論しよう. 図 3 に $\langle (u_R^2 - \langle u_R^2 \rangle)^2 \rangle$ を示す.⁴ 関係式 (4b) は $R \gtrsim 10^2 L_{u^2}$ で

³ 相関長 L_{u^2} は u_R^2 の分散だけでなく分布の全体を記述することが実は可能である [12]. つまり L_{u^2} はエネルギー保有域を記述する重要な長さスケールなのである.

⁴ 区間長 R が風洞の全長を超えても矛盾は生じない. 関係式 (4b) は直径 R を持つ単一の運動が対象なのではなく, 直径 L_{u^2} を持つ複数の運動から成る集団が対象であり, 個々の運動は風洞内に実在した筈である [12].

成立している. 同式は $R = NL$ と考えれば式 (5c) における $\gamma = 1$ の場合に対応するから, $N \simeq 10^2$ なら $\gamma \simeq 10^0$ に対し比例関係 $L_{u^2} = \gamma L$ が流れ場と無関係に成立することが解る.

以上の議論は L_u には適用できない. 相関長 L_u を用いても各区間で u を粗視化した速度 U_R の分散を式 (4b) と同様に計算することは可能である:

$$\langle U_R^2 \rangle = \frac{2L_u}{R} \langle u^2 \rangle \quad \text{at } R \gg L_u. \quad (6)$$

しかし任意の R について $\langle U_R^2 \rangle < \langle u^2 \rangle$ だから式 (6) は平均エネルギー $\langle u^2 \rangle$ を持つ渦とは関係ない. 相関長 L_u がエネルギー保有渦を代表する直径 L であると保証する理論は存在しないのである. むしろ相関長 L_u は過大なスケールの影響を受けている可能性がある (図 1). とくに等方乱流については Batchelor [2] が相関長 $L_u \propto \int_0^\infty k^{-1} E(k) dk$ と平均エネルギー $\langle u^2 \rangle \propto \int_0^\infty E(k) dk$ で寄与する 3 次元エネルギー・スペクトル $E(k)$ の波数 k の範囲が違うことを指摘している.

5. おわりに

本稿では格子乱流, 境界層乱流, 噴流の実験データを用い, 縦速度エネルギー u^2 の相関長 L_{u^2} に基づく平均エネルギー散逸率の表現 $\langle \varepsilon \rangle = C_{u^2} \langle u^2 \rangle^{3/2} / L_{u^2}$ が普遍的である可能性を指摘した. より多様な流れ場とくに高 Reynolds 数の場合について実験あるいは数値計算に基づく確認がなされない限り, この可能性を確認することは不可能だが, 現在まで伝統的に使われてきた縦速度 u の相関長 L_u がエネルギー保有渦の典型的な直径 L として最適かどうか繰り返し検証する必要性は間違いなく存在している.

謝辞

研究会で有益な議論やコメントをいただいた皆様に感謝いたします. 本研究は科研費 22540402 の助成を受けて, 堀晃浩氏, 橋本孔佑氏, 川島儀英氏と共同で実施しました.

参考文献

- [1] G.I. Taylor, *Statistical theory of turbulence*, Proc. R. Soc. Lond. A **151**, 421 (1935).
- [2] G.K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1953). 和訳は 乱流理論 (吉岡書店, 1960).
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, London, 1959). 和訳は 流体力学 (東京図書, 1970).
- [4] K.R. Sreenivasan, *On the scaling of the turbulence energy dissipation rate*, Phys. Fluids **27**, 1048 (1984).

- [5] K. R. Sreenivasan, *The energy dissipation in turbulent shear flows*, in *Developments in Fluid Dynamics and Aerospace Engineering*, edited by S. M. Deshpande, A. Prabhu, K. R. Sreenivasan, and P. R. Viswanath (Interline, Bangalore, 1995), p. 159.
- [6] R. A. Antonia and B. R. Pearson, *Effect of initial conditions on the mean energy dissipation rate and the scaling exponent*, Phys. Rev. E **62**, 8086 (2000).
- [7] N. Mazellier and J. C. Vassilicos, *The turbulence dissipation constant is not universal because of its universal dependence on large-scale flow topology*, Phys. Fluids **20**, 015101 (2008).
- [8] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura, and A. Uno, *Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box*, Phys. Fluids **15**, L21 (2003).
- [9] S. Goto and J. C. Vassilicos, *The dissipation rate coefficient of turbulence is not universal and depends on the internal stagnation point structure*, Phys. Fluids **21**, 035104 (2009).
- [10] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka, *Large-scale lognormal fluctuations in turbulence velocity fields*, Phys. Fluids **21**, 065107 (2009).
- [11] H. Mouri and A. Hori, *Two-point velocity average of turbulence: Statistics and their implications*, Phys. Fluids **22**, 115110 (2010).
- [12] H. Mouri, A. Hori, Y. Kawashima, and K. Hashimoto, *Statistical mechanics and large-scale velocity fluctuations of turbulence*, Phys. Fluids **23**, 125110 (2011).
- [13] R. A. Antonia and P. Burattini, *Approach to the 4/5 law in homogeneous isotropic turbulence*, J. Fluid Mech. **550**, 175 (2006).
- [14] S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, edited by N. Wax (Dover, New York, 1954), p. 133.