

Equicontinuous Flow と Distal Flow との関連について

神戸大 教養部

江川治朗

§ 1. はじめに

コンパクトな minimal set に対しては、種々の概念があるが、これ等が同型写像によって不変な概念であるかどうかを確かめることは重要であるように思われる。→ 即ち、それぞれの軌道を保存するような相空間の間の位相写像が存在するとき、2つの力学系は同型であるということにする ([10] の意味で NS-同型)。よく知られたように equicontinuity と distality ([5], [6]) 等は parameter を変えない同型写像 ([10] の意味で GH(0)-同型) では不変であるが、上記の同型写像では不変な概念ではない。本講演では、上の2つの概念の関係について述べる。

§ 2. 記号, その他

π を相空間 X 上の力学系とする。すなわち、 X は位相空間で π は $X \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ は実数) から X の上への連続写像で、つぎの条件 (1), (2) を満たす。

$$(1) \quad \pi(x, 0) = x, \quad x \in X,$$

$$(2) \quad \pi(x, t+s) = \pi(\pi(x, t), s), \quad x \in X, t, s \in \mathbb{R}.$$

これから考える相空間は コンパクトな距離空間 で、 π は特異点を持たないものとする。 $x \in X$ を通る軌道を $C_\pi(x)$ と記す。 $M (\neq \emptyset, M \subset X)$ は任意の $x \in M$ に対し $\overline{C_\pi(x)} = M$ が成り立つとき、minimal set であるといわれる。

定義 1. π : minimal flow (M-flow)

$\Leftrightarrow X$ が π の minimal set.

定義 2. π : equicontinuous flow (E-flow)

$\Leftrightarrow \{\pi_t | t \in \mathbb{R}\}$ が equicontinuous な位相写像の族となす。

ここで、 π_t は $\pi_t(x) = \pi(x, t)$ ($x \in X$) で定義される X から X への写像を示し、これはよく知られているように位相写像になる。上のことは、 π が uniformly Liapunov stable であることと同値である。すなわち、

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; d_X(x, y) < \delta, t \in \mathbb{R} \Rightarrow d_X(\pi(x, t), \pi(y, t)) < \varepsilon$ が成り立つ。

定義 3. ([5]). π : distal flow (D-flow)

$\Leftrightarrow \forall x, y \in X (x \neq y), \inf_{t \in \mathbb{R}} \{d_X(\pi(x, t), \pi(y, t))\} > 0.$

定義 4.

π, ρ を相空間 X, Y 上の力学系とする。
このとき、位相同型写像 $h: X \rightarrow Y$ は任意の $x \in X$ に対し
て $h(C_\pi(x)) = C_\rho(h(x))$ が成り立つとき、 π から ρ への同型
写像といわれる。

命題 1

([2], [10]). π, ρ を X, Y 上の力学系, h を
 π から ρ への同型写像とすると、つぎの条件を満たす連続
写像 $\varphi: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

(1) $\varphi_x(t) = \varphi(x, t)$ が定義される $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は
 $\varphi_x(0) = 0$ を満たす位相写像である。

(2) $\forall (x, t) \in X \times \mathbb{R}, h(\pi(x, t)) = \rho(h(x), \varphi(x, t))$.

系 1-1

([2], [10]). 命題 1 における φ はつぎの性
質 (A) を持つ。

(A) $\forall x \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}, \varphi(x, t+s) = \varphi(\pi(x, t), s) + \varphi(x, t)$.

命題 1 が存在が保証される φ を h から誘導された
reparametrization という。

注意 1.

定義 4 における同型写像は [10] では, NS-
同型写像と呼ばれる。又 h と h より誘導される reparamet-
rization φ との pair (h, φ) は GH(3)-同型と呼ばれる。
さらに, $\varphi(x, t) = t$ ($x \in X, t \in \mathbb{R}$) のとき GH(0); $\varphi(x, t) =$
 ct ($c \neq 0, x \in X, t \in \mathbb{R}$) のとき GH(1)-同型と呼ばれる。

よく知られているように, equicontinuity は同型写像で予

変換概念ではいい。これは注意して、つぎのよう概念が
A. A. Markov によって導入された ([9])。

定義 5. π : harmonizable flow (H-flow)

$\Leftrightarrow$ π はある equicontinuous flow と同型。

注意 2. M-flow が E-flow (D-flow, H-flow)
のとき, ME-flow (MD-flow, MH-flow) とかくことにする。

§ 3. D-flow について。

D-flow に関する若干の性質を列挙しておく。

命題 2. E-flow は D-flow である。

注意 3. ME-flow である MD-flow の存在は 3次元ト
ーラス上で知られている ([3])。又一般に有限次元の manifold
上の ME-flow は T^n 上の ME-flow と同型であるが, T^n 上
の flow は同型である MD-flow の存在は知られている ([6])。

命題 3 ([5]). つぎの (1), (2) は同値である。

(1) π は D-flow

(2) $\pi^*((x, y), t) = (\pi(x, t), \pi(y, t))$ ($x, y \in X, t \in \mathbb{R}$)

で定義される $X \times X$ 上の力学系は, つぎの性質を持つ。

$\forall (x, y) \in X \times X, \overline{C_{\pi^*}(x, y)}$ は minimal set.

系 3-1 π が D-flow ならば, $\forall x \in X, \overline{C_{\pi}(x)}$
は minimal set である。

注意 4 系 3-1 の結論を満たす flow は他にもある。characteristic 0 の flow [1] はその例である。

命題 4 ([7]). π を MD-flow とする。このとき、E-flow ρ (相空間 Y とする) と $h(\pi(x, t)) = \rho(h(x), t)$ ($x \in X, t \in \mathbb{R}$) を満たす 連続写像 $h: X \rightarrow Y$ が存在する。

注意 5 [7] では MD-flow の構造がもっと詳しく調べられている。

§4. E-flow に対する reparametrization.

定理 1 π, ρ を X, Y 上の E-flow とする。 $h: \pi \rightarrow \rho$ が同型写像であるとき、 h から誘導される reparametrization φ は $X \times \mathbb{R}$ で一様連続である。

定理 2 π, ρ を X, Y 上の力学系で $h: \pi \rightarrow \rho$ を同型写像とする。このとき、 π が E-flow で h から誘導される reparametrization φ が $X \times \mathbb{R}$ 上で一様連続であるならば、 ρ も E-flow である。

定理 1 の仮定はつぎのように弱めることができる。

定理 3 π, ρ を X, Y 上の E-flow とする。 h は X から Y への 連続写像 で、 φ は命題 1 の条件を満たす。このとき、 φ は $X \times \mathbb{R}$ 上で一様連続である。

又定理 1 から、つぎの系を得る。

系 1-1 定理 1において, X, Y が連続ならば,
 任意の $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$ に対して, $\pi'(\pi(x, t)) = P(\pi'(x), t)$
 を満たす位相写像 $\pi': X \rightarrow Y$ と定数 $C (\neq 0)$ が存在する。
 ([10]のこぼを使うと, NS-同型 $\Rightarrow$ GH(1)-同型)。

注意 6 定理 3における pair (π, φ) は [8]で
 は GH(3) homomorphism と呼ばれる。

§ 5. E-flow, D-flow, H-flow の関係について。

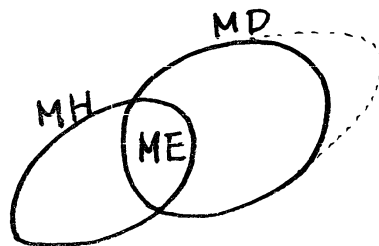
命題 4, 定理 2, 3 からつぎの定理がそれぞれ得られる。

定理 4 π を M-flow とする。 π が E-flow でない
 D-flow ならば, π は H-flow でない。

定理 4 を言い換えると,

系 4-1 π が E-flow でない H-flow ならば, π は
 D-flow でない。

上の関係を図示すると, つぎのようになる。



§ 6. 例

微分方程式 $(C^0, \text{Lipochitz})$ で定義される T^2 (2次元トーラス)

上の M -flow は MH -flow である。したがって、 T^2 上の M -flow に対しては E -flow と D -flow は同じ概念になる ([3], [4] 参照)。一般に T^n ($n \geq 3$) では上の事実は成り立たない。そのため、つぎのような skew product (加藤: 予稿集参照) を考察する。

π を X 上の E -flow, φ を $X \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続写像で系 1-1 の条件 (A) を満たすとする。 $S^1 = \{z = e^{2\pi i \theta} \mid 0 \leq \theta < 1\}$ とする。 $X \times S^1$ 上の flow ρ を

$\rho((x, z), t) = (\pi(x, t), ze^{2\pi i \varphi(x, t)})$, $(x, z) \in X \times S^1$, $t \in \mathbb{R}$ で定義する。この ρ に対して、つぎの定理が成り立つ。

定理 5 ρ は D -flow である。

定理 6 ρ が E -flow であるための必要十分条件は φ が $X \times \mathbb{R}$ で一様連続であることである。さらに、 X が連結で、 ρ が E -flow ならば、ある定数 C が存在して、 ρ はつぎの力学系 ρ' に同型である。

$\rho'((x, z), t) = (\pi(x, t), ze^{2\pi i C t})$, $(x, z) \in X \times S^1$, $t \in \mathbb{R}$. ここで $C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \varphi(x, t)$ と求まる。

定理 7 ρ が E -flow ではないならば、 ρ は MD -flow である。したがって MH -flow ではない。

一般に T^n ($n \geq 3$) 上で MH -flow でない MD -flow が存在する。

例 1. つぎの T^n 上の微分方程式 (E) を考える。

$$(E) \quad \begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = \phi_1(x_1) \\ \vdots \\ x_n' = \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{cases}$$

ここで, ϕ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) は連続で $\phi_i(x_1+m_1, \dots, x_i+m_i) = \phi_i(x_1, \dots, x_i)$ ($m_1, \dots, m_i \in \mathbb{Z}$: 整数). もし (E) で定義される flow φ が E-flow ならば, 定理 6 を繰返して使うことにより, つぎの (E') で定義される力学系 φ' は同型である。

$$(E') \quad \begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n' = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

$$\alpha_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \phi_i(p_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}), s) ds.$$

例 2 例 1 において, つぎの (E'') で定義される力学系を φ'' とする。

$$(E'') \quad \begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = \phi_1(x_1) \\ \vdots \\ x_{n-1}' = \phi_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) \end{cases}$$

もし p'' が ME-flow, p が E-flow でなければ, p は MH-flow でない MD-flow である。

例 3 例 2 において $\phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) > 0$ と仮定する。このとき, つぎの (E'') で定義される力学系を p'' とする。

$$(E'') \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \frac{1}{\phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} \\ x'_2 = \frac{\phi_1(x_1)}{\phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} \\ \vdots \\ x'_{n-1} = \frac{\phi_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})}{\phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} \\ x'_n = 1 \end{array} \right.$$

このとき, p''' は MH-でも MD-flow でもない M-flow である。

注意 7 上の例を考察した微分方程式は [3] で議論されている。[3] では例 1 の (E) において, ある実数の pair $(r_1, \dots, r_n)$ が存在して, つぎの $(\bar{E})$ の定める力学系が MD-flow になることが示されている。

$$(\bar{E}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = 1 + r_1 \\ \vdots \\ x'_n = \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + r_n \end{array} \right.$$

REFERENCES

- [1] S.Ahamad, Dynamical Systems of Characteristic 0^+ , Pacific. J. Math., 32 (1970), 561-574.
- [2] M.Bebutov et V.V.Stepanov, Sur la mesure invariante dans les systèmes dynamiques qui ne different qui par le temps, Mat. Sbornik (1949), 143-166.
- [3] I.U.Bronstein, A contribution to the theory of distal minimal sets and distal functions, Soviet Math. Dokl., 8 (1967), 59-61.
- [4] J.Egawa, Isomorphisms and Local Dynamical Systems Admitting Invariant Positive Measures (to appear).
- [5] R.Ellis, Distal Transformation Groups, Pacific J. Math., 8 (1958), 401-405.
- [6] R.Ellis, Lectures on Topological Dynamics, W.A. Benjamin, 1969.
- [7] H.Furstenberg, The structure of distal flows, Amer. J. Math., 85 (1963), 477-515.
- [8] I.Kimura, Categories of Local Dynamical Systems, Funkcial. Ekvac., 16 (1973), 29-52.
- [9] V.V.Nemytskii and V.V.Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [10] T.Ura, Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkcial Ekvac., 12 (1969), 99-122.