

C^* -algebra の state の間の transition probability

北大 応電研 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

Uhlmann [14] により導入された state の間の transition probability の性質は, Alberti [1], [2], Alberti-Uhlmann [3] また Raggio [12], Araki-Raggio [6] 等で説明されて来た。これ等を概観する。

1. 定義と背景. 量子力学系の純粋状態は適当に設定された Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の unit vector x で表示される。状態 x_1 から状態 x_2 への transition probability としては $|(x_1, x_2)|^2$ を採用するのが妥当である。観測の対象となるのは適当に定められた, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の C^* - (または von Neumann) sub-algebra の元と考える。この時, 各純粋状態 x は $\mathcal{A}$ 上の positive unital な汎関数 $X \mapsto (Xx, x)$ を引き起こす。一般の positive unital な汎関数は上の形のものが或る重みつき平均になるので, これ等は混合状態に対応すると考え, 一般に positive unital な汎関数を state と呼ぶ。

以下 $\mathcal{O}$ を単位元 1 をもつ C^* -algebra とし, φ_1, φ_2 をその上の state とする. $\mathcal{O}$ の unital な $*$ -表現 π を考えよう. 即ち, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\pi$ の $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ の中への $*$ -表現である. このとき $\mathcal{H}_\pi$ の unit vector x_i ($i=1, 2$) が φ_i ($i=1, 2$) に対して条件 (#) を満たすとは次のことをとする.

$$(\#) \quad \varphi_i(X) = (\pi(X)x_i, x_i) \quad \forall X \in \mathcal{O} \quad (i=1, 2).$$

歴史的には Bures [7] は φ_1, φ_2 の距離を

$$\text{dist}_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) := \inf_{\pi} \inf_{\substack{x_1, x_2 \\ (\#)}} \|x_1 - x_2\|$$

で定義した. これとの関連で Uhlmann [14] は φ_1, φ_2 の間の transition probability を

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{\pi} \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ (\#)}} |(x_1, x_2)|^2$$

とした. すなわち $*$ -表現で φ_1, φ_2 を pure state に移し可能な限り従来 transition probability を大きくするものを採用した. 定義から明かに次が成り立つ

$$\text{dist}_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^2 = 2\{1 - P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

2. 多変量解析からの問題. 上のように対象の間の距離や重なり具合を極値で定義するのは, いろいろな分野で起る. その一例を多変量解析に見よう.

$\mathbb{R}^n$ 上の 2 つの分布関数 $\Phi_1(t_1, \dots, t_n), \Phi_2(t_1, \dots, t_n)$ に対してその距離を Fréchet [10] は次の様に定義した. X_1, X_2 をそれ

どれ Φ_1, Φ_2 を分布関数にもつ (同じ確率空間上) の random n -vector とする, すなわち次の条件を満たすものである.

$$(*) \quad P\{X_{ij} \leq t_j \mid j=1, \dots, n\} = \Phi_i(t_1, \dots, t_n) \quad \forall t_j \in \mathbb{R} \quad i=1, 2$$

ここで $X_1 = (X_{1,1}, \dots, X_{1,n})^t$, $X_2 = (X_{2,1}, \dots, X_{2,n})^t$ である.

$$\text{dist}(\Phi_1, \Phi_2) = \inf_{X_1, X_2 (*)} \{E|X_1 - X_2|^2\}^{1/2}.$$

明らかに

$$E|X_1 - X_2|^2 = E(X_1^* X_1) + E(X_2^* X_2) - 2E(X_2^* X_1)$$

で $E(X_i^* X_i)$ は分布関数 Φ_i だけで定ってしまうが $E(X_2^* X_1)$ は変りうる. 従って $\sup_{(*)} E(X_2^* X_1)$ が問題になるのだが, 一般にこれを決定するのはむずかしい. しかし, 次の様な特別の場合がある. これは Gaussian な random n -vector はその平均 vector と分散行列で決まってしまう事に由来する.

(簡単のため) Φ_1, Φ_2 を平均 vector = 0 の Gaussian 分布とする. この時 $n \times n$ 半正定値行列 $A := E(X_1 X_1^*)$, $B = E(X_2 X_2^*)$ は X_i ($i=1, 2$) が (*) を満たすときは Φ_i ($i=1, 2$) により確定する. $C := E(X_1 X_2^*)$ とすると $2n \times 2n$ 行列

$\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$ は半正定値になる. 逆に $A, B \geq 0$ を与えて, 実 C が $\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0$ を満足すると Gaussian な random $2n$ -vector Z があり $E(Z Z^*) = \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$ となる. Z の先頭の n -component を X_1 , 末尾の n -component を X_2 とするとそれ等は共に Gaussian な random n -vector で X_1 の分布関数は

が Φ_1, χ_2 の分布関数 が Φ_2 となる. 従って, 次が成り立つ.

$$\text{dist}(\Phi_1, \Phi_2)^2 = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) - 2 \sup_{\substack{C, \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0}} \text{tr}(C)$$

このことの関連で次の事が知られている.

定理 1. A, B を半正定値 (複素) $n \times n$ 行列とする.

(1) (Olkin-Pukelsheim [11], Dowson-Landau [8])

$$\max_{\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0} |\text{tr}(C)|^2 = \text{tr}((B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2$$

(2) (Flanders [9], Anderson-Olkin [4], Olkin-Pukelsheim [11])

$$\begin{aligned} \inf_{S > 0} \text{tr}(AS) \cdot \text{tr}(BS^{-1}) &= \inf_{S > 0} \left\{ \frac{\text{tr}(AS) + \text{tr}(BS^{-1})}{2} \right\}^2 \\ &= \text{tr}((B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}$$

3. transition probability の表示. 定理 1 と関連して, C^* -algebra $\mathcal{A}$ の 2 つの state φ_1, φ_2 の transition probability の $*$ -表現をおもてく出さない intrinsic な表示を考えよう.

定理 2. (Alberti [1], [2])

$$(1) \quad P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \sup \left\{ |\psi(1)|^2 : \psi \in \mathcal{A}^* \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \varphi_1(A^*A) & \psi(A^*B) \\ \psi(B^*A) & \varphi_2(B^*B) \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \\ \forall A, B \in \mathcal{A}$$

$$(2) \quad P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \inf \{ \varphi_1(S) \varphi_2(S^{-1}) : 0 < S \in \mathcal{A} \}$$

証明の概略を示す前に、この定理から導かれる幾つかの結果について述べよう。まず(1)より

系1. 写像 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \mapsto P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^{\frac{1}{2}}$ は state の集合の直積の上で jointly concave, すなわち $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき

$$P_\alpha(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi'_1, \lambda\varphi_2 + (1-\lambda)\varphi'_2)^{\frac{1}{2}} \geq \lambda P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2)^{\frac{1}{2}} + (1-\lambda)P_\alpha(\varphi'_1, \varphi'_2)^{\frac{1}{2}}.$$

C^* -algebra の second dual $\mathcal{O}^{**}$ は von Neumann algebra であり φ_1, φ_2 は $\mathcal{O}^{**}$ 上の normal な state に拡大出来るが、

系2. $P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = P_{\alpha^{**}}(\varphi_1, \varphi_2).$

次に、もう一つの C^* -algebra $\mathcal{B}$ から $\mathcal{O}$ への unital な positive linear map Φ が与えられた場合を考える。 $\varphi_i \circ \Phi$ ($i=1, 2$) は $\mathcal{B}$ の state となる。 Φ に対する Kadison 型不等式の1つ $\Phi(S^{-1}) \geq \Phi(S)^{-1}$ を使うと、定理2の(2)より次が出る。

系3. $\mathcal{B} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}$ が unital positive のとき

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \leq P_\beta(\varphi_1 \circ \Phi, \varphi_2 \circ \Phi).$$

4. 定理2の(1)の証明の概略. 不等式 $\leq$ は容易である。

すなわち、(1)を満たす π, x_1, x_2 を考え $\psi(X) := (\pi(X)x_1, x_2)$ とすると、 $(x_1, x_2) = \psi(1)$ で、また Schwarz の不等式から

$$|\psi(B^*A)|^2 \leq \|\pi(A)x_1\|^2 \|\pi(B)x_2\|^2 = \varphi_1(A^*A) \cdot \varphi_2(B^*B).$$

不等式 $\geq$ を見るため、(1)を満たす π, x_1, x_2 を固定する。

φ_1, φ_2 に対し問題の条件を満足する $\psi \in \mathcal{O}^*$ は必ず $\exists K$ s.t.

$\|K\| \leq 1$, $K \in \pi(\mathcal{O})'$ commutant in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ を使って

$$\psi(X) = (K \pi(X) x_1, x_2) \quad \forall X \in \mathcal{O}$$

とかける. 逆も真である. $\pi(\mathcal{O})'$ で $\|K\| \leq 1$ のものは unitary の加重平均とかけるから, 結局局次がわかる

$$\sup \{ |(U x_1, x_2)|^2 : U \in \pi(\mathcal{O})' \}_{\text{unitary}} = (1) \text{の右辺}.$$

明かに $\pi, U x_1, x_2$ も (#) を満たすから, $P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \geq (1) \text{の右辺}$ となる. ■

この証明から明かなように.

系 4. (#) を満たす π, x_1, x_2 をどのようにえらんでも

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = \max \{ |(U x_1, x_2)|^2 : U \in \pi(\mathcal{O})', \text{unitary} \}.$$

5. transition probability の具体的な計算. 定理 1 に対して次の様なことがわかる.

(a) $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のとき. φ_i は trace class operator $0 \leq A_i$ を使って $\varphi_i(X) = \text{tr}(A_i X)$ ($i=1,2$) とかける. $\mathcal{H}_\pi$ を Hilbert-Schmidt class π を左か右の multiplication x_i として $A_i^{\frac{1}{2}}$ をとると (#) がみたされる. この時 $\pi(\mathcal{O})'$ は右か右の multiplication の全体となり, 系 4 より

$$P_\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{U: \text{unitary}} |\text{tr}(A_2^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} U)|^2 = \text{tr}((A_2^{\frac{1}{2}} A_1 A_2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2.$$

(b) $\exists$ state φ $\exists A_i \in \mathcal{O}$ で $\varphi_i(X) = \varphi(A_i^* X A_i)$ ($i=1,2$)

と書け, 更に $A_2^* A_1 \geq 0$ ならば, φ に関して GNS-表現 π を作り, $\varphi(X) = (\pi(X)x, x) \quad \forall X \in \mathcal{O}$ とすると, $x_i = \pi(A_i)x$ として π, x_1, x_2 は (#) を満す. 以下系 4 を使って

$$P_\sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi(A_2^* A_1)^2$$

がでる. この特別な場合として

(c) $\sigma \leq \tau \in \mathcal{O}$ s.t. $\varphi_2(X) = \varphi_1(\tau X \tau) \quad \forall X \in \mathcal{O}$ なる

$$P_\sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1(\tau)^2.$$

(d) $\mathcal{O}$ が可換な von Neumann algebra で $L^\infty(\Omega, \mu)$ $\mu(\Omega)=1$ と同一視されるとき, φ_1, φ_2 が $\mathcal{O}$ の normal な state なら $L^\infty(\Omega, \mu)$ の上では $0 \leq f_i \in L^1(\Omega, \mu)$ で表現される, i.e. $\varphi_i(g) = \int g f_i d\mu \quad \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu)$. この時 $\sigma = L^\infty(\Omega, \mu)$ の $L^2(\Omega, \mu)$ の上の multiplication での表現 π を考えたと x_i として $f_i^{1/2}$ をとると π, x_1, x_2 は (#) を満す. L^∞ が maximal Abelian により $\pi(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O})'$ となり, 系 4 より

$$\begin{aligned} P_\sigma(\varphi_1, \varphi_2) &= \sup \left\{ \left| \int g f_1^{1/2} f_2^{1/2} d\mu \right|^2 : g \in L^\infty(\Omega, \mu) \text{ unimodular} \right\} \\ &= \left\{ \int f_1^{1/2} f_2^{1/2} d\mu \right\}^2. \end{aligned}$$

6. 定理 2 の (2) の証明の概略. 不等式 $\leq$ は (1) で

$$A = S^{1/2}, B = S^{-1/2} \text{ ととって } |\psi(\mathbb{1})|^2 = |\psi(S^{1/2} S^{-1/2})|^2 \leq \varphi_1(S) \varphi_2(S^{-1/2}).$$

逆の不等式を出すには 系 2 を使って, density theorem を考

度する、 $\mathcal{A}$ は von Neumann algebra, φ_1, φ_2 は normal な state としてよい。また必要なら $0 < \varepsilon < 1$ を parameter として $\frac{\varphi_1 + \varepsilon \varphi_2}{1 + \varepsilon}$ を φ_1 の代りに考えることにより, φ_1 は最初から, $\exists \lambda > 0$ $\lambda \varphi_1(X) \geq \varphi_2(X) \quad \forall 0 \leq X \in \mathcal{A}$ と仮定してよい。

Sakai [13] の non-linear Radon-Nikodym theorem によれば $\exists 0 \leq T \in \mathcal{A}$ s.t. $\varphi_2(X) = \varphi_1(TXT) \quad \forall X \in \mathcal{A}$.

従って (c) より $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1(T)^2$. T の spectral projection E_t は全て $\mathcal{A}$ に属するので $\mathcal{B} =$ v. Neumann alge spanned $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ として, $\mu(t) = \varphi_1(E_t)$ として $\mathcal{B}$ は $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mu)$ と考えられ。 φ_1 は $1 \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu)$ として また φ_2 は $t^2 \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu)$ として表現されるので (d) より

$$P_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} t d\mu(t) \right\}^2 = \inf_{0 < f \in L^\infty} \left\{ \int t^2 f(t)^2 d\mu \right\} \left\{ \int f(t) d\mu \right\}$$

従って

$$P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = P_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \varphi_2) \geq \inf_{0 < S \in \mathcal{A}} \varphi_1(S) \varphi_2(S^{-1})$$

が成る。■

7. transition probability と Radon-Nikodym 型定理

ここでは Sakai の Radon-Nikodym 型定理を利用して, transition probability の表示 (2) を求めたが, Araki [5] は逆に極値を与える π, α_1, α_2 に着目し, これから一般の Radon-Nikodym 型定理を導出し, それに基づいて Araki-Raggio [6]

は, $\mathcal{A}$ が von Neumann algebra, φ_1, φ_2 が normal state
 のとき, 可換な von Neumann subalgebra $\mathcal{B}$ があり $P_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \varphi_2) =$
 $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2)$ となることを示した. その基本的な考えは次のよう
 な所にある. π, x_1, x_2 で (#) を満たし実際に $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2)$ を attain
 するものとする, すなわち $P_{\mathcal{A}}(\varphi_1, \varphi_2)^{1/2} = (x_1, x_2)$. この極値性
 から容易に, $(Sx_1, x_2) \geq 0 \quad \forall 0 \leq S \in \pi(\mathcal{A})'$ が導かれる.
 (簡単のため x_1, x_2 を $\pi(\mathcal{A})$ に関し cyclic, separating
 とすると) $Sx_1 \mapsto Sx_2 \quad (\forall S \in \pi(\mathcal{A})')$ は $\mathcal{H}_{\pi}$ で densely
 defined な symmetric positive な作用素となる. また
 $\pi(\mathcal{A})'$ と可換である. この作用素の Friedrichs 拡大 T は
 (一般に unbounded) な positive selfadjoint 作用素でその
 spectral projection E_t は $\pi(\mathcal{A})$ に属する. この時作り方から
 $\varphi_2(X) = \varphi_1(TXT) \quad \forall X \in \mathcal{A}$ となる. 以下, technical に
 は少し複雑であるが, 前と同様に議論できる.

8. 文献

- [1] Alberti, P.M., Wachsende Übergangswahrscheinlichkeiten und vollstän-
 dige positive stochastische Transformationen, Wiss. Zeit. Karl Marx Univ.
 31(1982), Heft 1, 3-10.
- [2] Alberti, P.M., A note on the transition probability over C^* -algebras,
 Lett. in Math. Phys. 7(1983), 25-33.
- [3] Alberti, P.M. and A. Uhlmann, Stochastic linear maps and transition
 probability, Lett. in Math. Phys., 7(1983), 107-112.

- [4] Anderson, T.W. and I. Olkin, An extremal problem for positive definite matrices, *Linear and Multilinear Alg.*, 6(1978), 257-262.
- [5] Araki, H., Bures distance function and a generalization of Sakai's non-commutative Radon-Nikodym theorem, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 8(1972/73), 335-362.
- [6] Araki, H. and G.A. Raggio, A remark on transition probability, *Lett. Math. Phys.*, 6(1982), 237-240.
- [7] Bures, D., An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite W^* -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135(1969), 119-212.
- [8] Dowson, D.C. and B.V. Landau, The Frechet distance between multivariate normal distributions, *J. Multivariate Anal.*, 12(1982), 450-455.
- [9] Flanders, H., An extremal problem on the space of positive definite matrices, *Linear and Multilinear Alg.*, 3(1975), 33-39.
- [10] Fréchet, M., Sur la distance de deux lois de probabilité, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 244(1957), 689-692.
- [11] Olkin, I. and H. Pukelsheim, The distance between two random vectors with given dispersion matrices, *Linear Alg. Appl.*, 48(1982), 257-263.
- [12] Raggio, G.A., Comparison of Uhlmann's transition probability with the one induced by the natural positive cone of von Neumann algebras in standard form, *Lett. Math. Phys.*, 6(1982), 233-236.
- [13] Sakai, S., A Radon-Nikodym theorem in W^* -algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71(1965), 149-151.
- [14] Uhlmann, A., The 'transition probability' in the state space of a $*$ -algebra, *Rep. Math. Phys.*, 9(1976), 273-279.