

私有経済系のワルラス価格均衡点について

早大 数学科 野口 広

沢田 賢

G. Debreu, Y. Balasko は、純粋交換経済系におけるワルラス価格均衡点について研究している。([1], [2])。

ここでは、S. Smale の論文[6]にもとづいて、私有経済系におけるワルラス価格均衡点の古典的条件の下でのいくつかの結果を述べる。

l, m, n を、それぞれ財の個数、消費者の人数、生産者の人数とする。次の(1)~(5)を仮定する。

(1) 各消費者の消費集合は、 $R_i^l = \{(x^1, \dots, x^l) \in R^l \mid x^j \geq 0, j=1, \dots, l\}$ である。

(2) 全資源は一定であり、 R^l の元である。

(3) 消費者 i の効用関数 $u_i: R^l \rightarrow R$ は、 C^r -写像で、可微分単調、可微分凸（定義については[5]参照のこと）である。

さらに Debreu の境界条件([1])みたす。

(4) 生産者 α の技術 $Y_\alpha \subset R^l$ に於いて、

(a) Y_α は、境界を有しない R^l の C^r -部分集合の標体で、

その閉包 $\bar{Y}_\alpha$ はコンパクト集合である。

(b) Y_α は可微分凸である ([5] 参照)。

(c) 各財 j に対して, 財 j を input する様な生産
 $(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^j, \dots, y_\alpha^l) \in Y_\alpha$ のとき $y_\alpha^j < 0$ を持つ生産者 α に対し
 $\sum_\alpha y_\alpha^j < 0$ 。

(d) 各消費者 i は生産者 α の利益配分 $\theta_{i\alpha}$ が与えられる。

$$\text{ここで } \theta_{i\alpha} \geq 0, \sum_{i=1}^m \theta_{i\alpha} = 1.$$

この様に財の所有者の概念を導入した経済系と私有経済系という。また集合

$$\Sigma = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^l)^m \times \prod_{\alpha} Y_\alpha \mid \sum_{i=1}^m x_i = \sum y_\alpha + d\}$$

をこの経済系の状態空間とする。

補題。 Σ は $(\mathbb{R}^l)^m \times \mathbb{R}^L$ の $(lm + \sum_{\alpha} \dim Y_\alpha - l)$ 次元部分多様体である。
 $(\dim Y_\alpha$ は Y_α の次元)

$S_+ = \{(p^1, \dots, p^l) \in \mathbb{R}^l \mid (p^1)^2 + \dots + (p^l)^2 = 1\} \cap \mathbb{R}_+^l$ と示し, S_+ と価格系という。仮定(3)によつて各消費者 i に対して需要関数と呼ばれる C^{n-1} 写像 $f_i: S_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^l$ が存在して次の (A), (B) を満足する, ([3])

(A) $f_i(p, w)$ は集合 $B_i = \{x_i \in \mathbb{R}_+^l \mid p \cdot x_i \leq w\}$ 上での u_i の最大値を与える ($p \cdot x_i$ は p と x_i の内積)。

(B) $S_+ \times \mathbb{R}_+^\alpha$ 中の点列 (p^0, w_i^0) が $(\bar{S}-S) \times \mathbb{R}_+^\alpha$ 中の点 (p^0, w_i^0) に収束するとき, $|f_i(p^0, w_i^0)| \rightarrow +\infty$.

また (4) の (b) によ, 2 各生産者 α の技術 Y_α に対し, 価格 $P \in S_+$ に対し利益 $P \cdot y_\alpha$ が最大となるような生産 $y_\alpha \in Y_\alpha$ と対応させるような生産関数と呼ばれる C^r -写像 $g_\alpha: S_+ \rightarrow Y_\alpha$ が存在する ([5]).

$Q_0 = \{ r = (r_1, \dots, r_m) \in (\mathbb{R}_+^k)^m \mid \sum_{i=1}^m r_i = 1 \}$ とする. r の元 r を賦存配分 (endowment allocation) といい. 以下 $Q_0 \neq \emptyset$ であると仮定する. Q_0 は $(\mathbb{R}_+^k)^m$ の $l(m-1)$ 次元部分多様体.

定義. 与えられた賦存配分 $r \in Q_0$ に対し, $(\mathbb{R}_+^k)^m \times \prod Y_\alpha \times S_+$ の元 (x, y, p) がワルラス価格均衡点 (Walras price equilibrium) であるとは, 次の条件がみたさぬことである.

$$(1) \quad (x, y) \in \mathcal{L}, \quad \text{つまり} \quad \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha + 1$$

(2) 各 x_i は, i の予算集合

$$B_i(y, p) = \{ x_i \in \mathbb{R}_+^k \mid p \cdot x_i = p \cdot r_i + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p \cdot y_\alpha \}$$

上で効用関数 u_i の最大値を与える. つまり,

$$x_i = f_i(p, p r_i + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p \cdot y_\alpha).$$

(3) 各 y_α は Y_α 上で p に関する利益 $P \cdot y_\alpha$ を最大する. すなわ

ち. $f_\alpha(p) = f_\alpha$.

Q_0 の任意の z, r と z に対応するワルラス価格均衡点 (x, y, p) との対 (r, x, y, p) のつく集合を $\Sigma \subset Q_0 \times (\mathbb{R}^l)^m \times \prod \gamma_\alpha \times S_+$ で示す。

補題. Σ は $Q_0 \times (\mathbb{R}^l)^m \times \prod \gamma_\alpha \times S_+$ の $m(l-1)$ 次元部分多様体である。

定義. 正射影 $\pi_0: Q_0 \times (\mathbb{R}^l)^m \times \prod \gamma_\alpha \times S_+ \rightarrow Q_0$

$$(r, x, y, p) \longrightarrow r$$

の多様体 Σ 上への制限写像 $\pi = \pi_0|_\Sigma: \Sigma \rightarrow Q_0$ をデブール写像 (Debreu map) または、カタストロフ写像 (Catastroph map) といふ。

π の特異点 (r, x, y, p) , 特異値 $\pi(r, x, y, p)$ とそれぞれ, カタストロフ点, カタストロフ値といふ。カタストロフ値の集合をカタストロフ集合といふと示す。 $R = Q_0 -$ とは, 正則値の集合である。

補題. $\pi: \Sigma \rightarrow Q_0$ は proper map である。すなわち K が Q_0 のコンパクトな部分集合であるとき、 $\pi^{-1}(K)$ は Σ のコンパクトな部分集合である。

証明. $\Sigma' = \{(r, p) \in Q_0 \times S_+ \mid \sum_{i=1}^m f_i(p, p, r) + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p \cdot \eta_{\alpha}(p) = \sum_{\alpha=1}^n \eta_{\alpha}(p) + 1\}$

とする。いま点列 $\{e^k\} = \{(r^k, p^k)\} \subset K \times S_+ \cap \Sigma'$ と与える。

このとき、 Σ' のある点 (r^0, p^0) に収束する部分列 $\{e^{k_j}\}$ が存在することとを示す。 K がコンパクトであるからその消費者 i の財空間 $\mathbb{R}^n$ への正射影 k_i もコンパクト。また $\bar{Y}_{\alpha}$, S_+ はコンパクト集合 $\bar{Y}_{\alpha}$, S_+ に含まれる集合である。したがって、 $(r^0, p^0) \in K \times S_+$ に収束し、 $p^k \cdot r^k + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p^k \cdot \eta_{\alpha}(p^k)$ がある値に収束する部分列 $\{(r^{k_j}, p^{k_j})\}$ が存在する。いま $p^0 \in S_+$ を示す。もし $p^0 \in \bar{S}_+ - S_+$ であるならば需要関数の条件 (B) に反し $|f_i(p^k, p^k, r^k + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p^k \cdot \eta_{\alpha}(p^k))| \rightarrow +\infty$ となる。したがって、 $(r^k, p^k) \in \Sigma'$ より

$$\sum_{i=1}^m f_i(p^k, p^k, r^k + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p^k \cdot \eta_{\alpha}(p^k)) = \sum_{\alpha=1}^n \eta_{\alpha}(p^k) + 1$$

であり、 $\eta_{\alpha}(p^k) \in \bar{Y}_{\alpha}$ であるから、 $\sum_{i=1}^m f_i(p^k, p^k, r^k + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p^k \cdot \eta_{\alpha}(p^k))$ は有界である。 $f_i(p, p, r + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p \cdot \eta_{\alpha}(p)) \in \mathbb{R}_+^m$ であるから $\sum_{i=1}^m f_i(p, p, r + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{i\alpha} p \cdot \eta_{\alpha}(p))$ は有界となりこれは矛盾。よって $p^0 \in S_+$ である。したがって、 f_i と η_{α} の連続性より $(r^0, p^0) \in \Sigma'$ 。いま $\{(r^k, y^k, y^k, p^k)\} \subset \pi^{-1}(K)$ の点列とする。このとき、 $\{(r^k, p^k)\}$ は Σ' の点列であるから前の議論によりある点 $(r^0, p^0) \in \Sigma'$ に収束する部分列

(r^0, p^0) が存在する。よって部分列 $\{(r^k, x^k, y^k, p^k)\}$ が $(r^0, x^0, y^0, p^0) \in \Sigma$ に収束するとは明らか。 ($y^0 = \eta_\alpha(p^0)$, $x^0 = f_1(p^0, p^0, r^0 + \sum_{\alpha=1}^k p^0 \eta_\alpha(p^0))$). また $r_0 \in K$ であるから $(r^0, x^0, y^0, p^0) \in \pi^{-1}(K)$ 。したがって $\pi^{-1}(K)$ はコンパクト。

定理。デブラー写像 $\pi: \Sigma \rightarrow Q_\alpha$ の各正則値 $r \in Q_\alpha$ に対するワイルス価格均衡点 (r, x, y, p) の集合は有限集合であり、それは r に対して連続的に変化する。すなわち、 r に対するワイルス価格均衡点の集合を $\alpha_1(r), \dots, \alpha_k(r)$ とすると、 r の Q_α における近傍 N と連続写像 $\alpha_q: N \rightarrow \Sigma$, $q=1, \dots, k$, $r \mapsto \alpha_q(r)$ が存在し、 N の任意の点 r' に対して $\alpha_q(r')$ は r' に対するワイルス価格均衡点となる。

よって π の正則値の集合 R は Q_α の閉集合であり、またカトーロフスキー集合 C は Q_α の測度 0 の閉集合である。

証明。 Σ と Q_α は次元 $l(m-1)$ の多様体である。よって $r \in Q_\alpha$ が正則値であると $\pi^{-1}(r)$ は Σ の 0 次元部分多様体である。また補題によれば、 $\pi^{-1}(K)$ はコンパクト集合であるから、 $\pi^{-1}(r)$ は有限個の点の集合である。また、 π は、局所微分同相写像であるから、それは、連続的に変化する。さらにサードの定理 ([4]) により $C = Q_\alpha - R$ は測度 0 の閉集合である。

また与えられた財分配 $r \in Q_0$ に対するワルラス価格均衡点の存在性については次の定理が成り立つ。

定理 (Debreu). 各生産関数 $f_\alpha: S_+ \rightarrow R_+^L$ は, $\bar{f}_\alpha: S_+ \rightarrow F_\alpha \cap R_+^L$ の連続拡大であるものと仮定する。すると, 任意の $r \in Q_0$ に対して $\pi(r) \neq \emptyset$ 。

文 献

- [1] Y. Balasko, Economic Equilibrium and Catastroph Theory. An Introduction, *Econometrica* vol 46 Nov 557-567
- [2] G. Debreu, Economics with a finite set of equilibria, *Econometrica* vol 38, No 3, 387-392
- [3] G. Debreu, Smooth preference, *Econometrica* vol 40 603-616.
- [4] 野口 広, 福田拓生, 初等カテゴリー論, 共立全書, 1976
- [5] 折下 功, 野口広, 厚生経済学の基本定理について, セミナーノート, 日本交通政策研究会, 1978
- [6] S. Smale, Global Analysis and Economics II, *Journal of Mathematical Economics* 3, 1976, 1-14.