

(論文内容の要旨)

本論文は、種々の直交多項式と離散可積分系のもつ組合せ論的側面を明らかにしたものである。すなわち、古典直交多項式、対称直交多項式、ローラン双直交多項式という3種類の直交関数、および、それらの1パラメータ変形を記述する自励、非自励型離散可積分系を取り上げ、これらに対応する平面グラフを見出して、離散可積分系によるグラフ上の経路の重み付き数え上げを論じている。

典型的な離散可積分系である離散時間戸田方程式は、古典直交多項式の3項間漸化式を含む二つの線形方程式の両立条件として表すことができるという意味で、直交多項式に付随する力学系とみなすことができる。一方、古典直交多項式とそのスペクトル変換の両立条件は、また、J型連分数によるパデ近似の計算法であるqdアルゴリズムの漸化式として知られている。G. Viennotは、古典直交多項式に平面グラフの重み付きモズキン路を対応させるとともに、qdアルゴリズムによる重み付きディック路の重みの変形、さらには、経路の数え上げが可能であることを示した。

申請者は、本論文において、Viennotが扱った古典直交多項式のみならず、その他の直交多項式、および、それに付随する自励、非自励型離散可積分系が、グラフ上の重み付き経路の数え上げに関する組合せ論的側面をもつことを明らかにしている。

第1章は序章として、研究の背景、目的、論文の構成を述べている。また、論文中で用いる記号や基本的な概念について説明している。

第2章の前半では、Viennotが考察したqdアルゴリズムの漸化式が離散時間自励戸田方程式であることを出発点に、重み付きディック路を拡張して、離散時間非自励戸田方程式に対応するグラフを見出している。古典直交多項式のモーメントやスペクトル変換が経路の数え上げと密接に関係することがグラフの発見の基礎にある。離散時間非自励戸田方程式の変数をグラフ中の枝のラベルとして付すことで、この方程式をグラフ上の力学系とみなせること、さらには、ハンケル行列式解がグラフ上の経路の重みの総和を表すことなどを示している。

第2章の後半では、古典直交多項式のサブクラスである対称直交多項式とそれに付随する可積分系である離散時間非自励ロトカ・ボルテラ方程式について考察している。その結果、対称直交多項式のモーメントやスペクトル変換と経路の数え上げを表す関係式が記述され、離散時間非自励ロトカ・ボルテラ方程式がある種の平面グラフ上の力学系とみなせることが明らかにされている。

第3章は、ローラン双直交多項式とそれに付随する離散可積分系である離散時間非自励相対論戸田方程式のもつ組合せ論的側面を問題とし、まず、二点パデ近似の計算法であるFGアルゴリズムによる重み付きシュレーダー路の重みの変形と経路の数え上げが可能であることを示している。さらに、ローラン双直交多項式に関連するT型連分数の構造から、ローラン双直交多項式に付随するグラフを導入し、多項式の直交性が経路の有無をもって判定されることをみている。さらに、双直交多項式

の行列式表現に現れるテプリッツ行列式の非交叉経路の配置による展開公式を与えている．FGアルゴリズムの漸化式は離散時間自励相対論戸田方程式に対応するが，申請者は，その拡張である離散時間非自励相対論戸田方程式についても，対応するグラフを見出し，この方程式のテプリッツ行列式解がグラフ上のシュレーダー路の重みの総和を表すことを示している．

第4章は結論であり，本論文で得られた成果を要約し，今後の研究の方向として，より一般の直交関数や離散可積分系の組合せ論的側面について言及している．

氏 名	上岡 修平
-----	-------

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、古典直交多項式、対称直交多項式、ローラン双直交多項式という3種類の直交関数、および、付随する離散可積分系のもつグラフの経路の重み付き数え上げという組合せ論的側面を論じたものである。

先行研究として、G. Viennotによる重み付き経路を用いた古典直交多項式の組合せ論的研究がある。申請者の研究は、古典直交多項式に付随する離散可積分系を考慮することで、離散可積分系のもつ重み付き経路に関する組合せ論的側面という新たなテーマを設定している。先行研究は、qdアルゴリズムがJ型連分数の計算法を与えることに基づいているのに対して、申請者による離散時間非自励戸田方程式の組合せ論的研究は、連分数を経由せず、戸田方程式と古典直交多項式との間の直接的な関係に依るものである。この視点は自由度と発展性をもち、申請者による対称直交多項式と離散時間非自励ロトカ・ボルテラ方程式のもつ組合せ論的側面の発見に結実している。また、これらの離散可積分系とグラフ上の経路の重みの総和の満たす方程式との間の等価性を示すことにより、離散可積分系がグラフ上の力学系とみなせることを明らかにしている。申請者の研究は、離散可積分系や直交多項式の解析にグラフ上の経路の数え上げという組合せ論的手法を積極的に用いるという点で、離散可積分系研究に新たな解析手法を導入しているとみることもできよう。

申請者はまた、ローラン双直交多項式に対しても、付随する離散時間非自励相対論戸田方程式に対応するグラフを見出し、方程式の時間発展がグラフ上の経路の重みの総和の時間発展として記述されることから、相対論戸田方程式のテブリッツ行列式解がグラフ上の経路の重みの総和を表すことを証明している。同時に、ローラン双直交多項式に対する数え上げ組合せ論的解釈を与えている。この結果は、古典直交多項式、対称直交多項式に続く新たな例であり、他の直交関数、離散可積分系に関する組合せ論的研究の可能性を強く示唆している。

申請者の学位申請に係る研究は先行研究から着想を得たものであるが、離散可積分系研究にグラフの経路に関する数え上げ組合せ論的手法を導入することで、いくつかの新しい結果を系統的・組織的に与えている。力学系と離散数学の間のこれまで知られていない関係を探る研究として、今後の大きな発展が期待できる。

このように本論文は、新しい知見を豊富に含むだけでなく、直交多項式と離散可積分系のもつ組合せ論的側面という新しい研究分野を開拓する研究として高く評価されるものである。

よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。

また、平成20年10月14日実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。