

Construction of Discrete Series for Vector Bundles Over Semisimple Symmetric Spaces

東大理学部 小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)

Abstract G/H を半単純対称空間とする。Flensted-Jensen, 大島-松木の結果の一般化として, rank condition が成り立つ時, H の unitary な有限次元表現に同伴した vector 束の L^2 切片に G の既約加群 (discrete series) を構成する。これらの discrete series は, Zuckerman の定義した derived functor module を用いて表示され, 系として, 後者の unitarizability が従う。対称空間の (普通の意味の) discrete series の場合と異なり, その parameter は必ずしも canonical Weyl chamber に属さない事が, 古典型の例 ($G = Sp(p, q), U(p, q)$) でみられる。

§1 序

G : 連結線型半単純 Lie 群

$G_{\mathbb{C}}$: G の複素化

σ : G の involutive automorphism.

$H := (G^o)^\circ$ 。 $\therefore o$ の固定部分群の連結成分

G/H は半単純対称空間と呼ばれる。

G/H には、 G -不変測度 $d(gH)$ が存在する。

(τ, V) を H の unitary な既約有限次元表現とする。

$$L^2(G/H, \tau) := \left\{ f: G \rightarrow V : f(gk) = \tau(k)^{-1} f(g), \int_{G/H} \|f(gH)\|_V^2 d(gH) < \infty \right\}$$

とおけば、左正則表現 $G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ は unitary 表現となる。

$L^2(G/H, \tau)$ に実現された既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -module を discrete series

と呼ぼう。(尚、便宜上、既約表現の有限直和に対しても

discrete series と呼ぶ。)

問題A $G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ の既約分解を求めよ。

これは、 $\tau = \mathbb{1}$ (trivial 表現) の時でも、 G/H が群多様体
 或いは 複素/実形 或いは rank 1 の場合等にしか解かれて
 いない。しかし、いずれにせよ、次の問題が main step になる
 と考えられる。 $\tau = \mathbb{1}$ の時は、大島-松本が完全に解決した。

問題B $G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ に discrete series が存在するのは
 いつか? 存在するならそれを決定せよ。

本稿では、更に弱く、次の問題を扱う。

問題 C 適当な条件の下に、 $G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ の discrete series を構成せよ。

discrete series が、どの $\tau \in \hat{H}$ に対する $L^2(G/H, \tau)$ に実現されているかを explicit に書かない時は、 G/H 上の G 共変な主束 (構造群は compact 群 又は abel 群) $G/H_m (H \triangleright H_m)$ 上の L^2 関数に対し、問題 A, B, C を考えた方が自然である。§3 では、この立場で例を扱う。(即ち、対称空間ではない、ある reductive space の discrete series を扱うことになる)。

問題 C は、Schlichtkrull [1982] が最初に扱った。本稿では、彼の方法では得られない discrete series を含む形で得られる構成として §2 の Theorem を述べる。

古典型の場合、 $G = U(p, q; \mathbb{F})$, $H = U(m, \mathbb{F}) \times U(p-m, q; \mathbb{F})$ ($p \geq 2m$) ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) の例が我々の対象となる。

この場合の discrete series は、関連する Zuckerman's derived functor module (ZDF module) の vanishing theorem, nonvanishing のための必要十分条件、(適当な条件の下での) 既約性の結果と共に Theorem A, B, C で述べられる。

§ 2 Discrete Series の構成

§ 1 の notation を用いる。更にいくつかの notation を導入しよう。

θ : σ と可換な G の Cartan involution

$$K := G^\theta$$

$H^r (\equiv K^d)$: H の複素化の compact real form.

$G^r (\equiv G^d)$: H^r を maximal compact subgroup とする $G_{\mathbb{C}}$ の real form.

$$K^r (\equiv H^d) := (K_{\mathbb{C}} \cap G^r)_0.$$

H が次の形に分解されているとする :

$$(1) \quad H = H_c H_m ; \quad \begin{cases} H_c, H_m \text{ は } H \text{ の連結な正規部分群, } H_c \subset K, \\ H_c \cap H_m \text{ は有限集合.} \end{cases}$$

$H_c = \{e\}$, $H_m = H$ なら (1) は自明で、この時も定理 1 は成り立つが、我々の興味があるのは、 $H_c \neq \{e\}$ の場合である。実際、 H が nontrivial な unitary 有限次元表現を持つのは、(1) で $H_c \neq \{e\}$ なる分解を持つか、又は G^d/K^d が Hermitian symmetric space となる場合に限られる。

以下、我々は (G, H) に次の仮定をおく :

$$(2) \quad \text{rank } G/H = \text{rank } K/H \cap K$$

(2) は、 $L^2(G/H, \mathbb{1})$ に discrete series が存在するための必要十分条件である事が知られている。

例、 $(G, H) = (SO_0(p, q), SO(m) \times SO(p-m, q)), (SU(p, q), S(U(m) \times U(p-m, q))), (Sp(p, q), Sp(m) \times Sp(p-m, q))$ は、

$p \geq 2m$ の時 (但し SO なら更に $m \geq 2$)、上の (1) で $H_c \neq \{e\}$, (2) を共に満たす

$\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_{c0} + \mathfrak{f}_{m0}$ を $G, K, H = H_c \cdot H_m$ の Lie algebra とし.

その複素化を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{f} = \mathfrak{f}_c + \mathfrak{f}_m$ 等と表す.

$\sqrt{-1}\mathfrak{a}_0$ を $\{X \in \mathfrak{k}_0 : \sigma X = -X\}$ の maximal abelian subspace とおく.

$\mathfrak{m} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_0) \equiv \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{a}_0] = 0\} = \mathfrak{a} \oplus Z_{\mathfrak{f}_c}(\mathfrak{a}) \oplus Z_{\mathfrak{f}_m}(\mathfrak{a}) \quad (=(2)-(3))$

t_r : $Z_{\mathfrak{f}_c}(\mathfrak{a})$ の Cartan subalgebra

t^c : $t := \mathfrak{a} \oplus t_r$ を含む $\mathfrak{k}$ の Cartan subalgebra

$\mathfrak{f}^c$: t^c を含む $\mathfrak{g}$ の (fundamental) Cartan subalgebra としよう.

($\mathfrak{f}^c$ と $\mathfrak{f}_c$ に注意)

ルート系の (rough な) 図式:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}) & \hookrightarrow & \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Delta(Z_{\mathfrak{f}_c}(\mathfrak{a}), t_r) & \hookrightarrow & \Delta(\mathfrak{k}, t^c) & \hookrightarrow & \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}^c) \end{array}$$

が compatible になる様に. それぞれの positive system を fix する.

これは (3) より可能. (後に述べる G^r/p^r の K^r -closed orbit を fix した事に対応している).

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(t)$ とおく.

$\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{a}, t$ の generic element を用いて.

$\mathfrak{p} := \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ (Levi 分解)

で定義する. 但し $\mathfrak{f}^c$ stable な nilradical $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{u}$ は.

$\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{f}^c) \subset \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{f}^c) \subset \Delta^+(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}^c)$ をみたすものとする.

$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{l}$, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{u}$ である事に注意しよう.

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{g}$ の θ -stable parabolic subalgebra ($\mathfrak{q}_0$ の imaginary polarization) である。また、 $\mathfrak{p}$ は G^r のある minimal parabolic subgroup P^r の Lie algebra の複素化となっている。

$P(m)$, $P(m \cap k)$, $P_m \equiv P(\Delta^+(m))$ を対応する root の和の半分として定義する。

$M := Z_G(\alpha) = N_G(\mathfrak{p})$, $L := Z_G(t) = N_G(\mathfrak{q})$ とおく。

これらは G の θ -stable な連結 reductive subgroup である。

$\mathcal{M}(\mathfrak{q}, K)$, $\mathcal{M}(m, M \cap K)$ etc を $(\mathfrak{q}, K)$ (resp. $(m, M \cap K)$)-module のある Category とし、 j -th cohomological parabolic induction を、 $R_{\mathfrak{p}}^j : \mathcal{M}(m, M \cap K) \rightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{q}, K)$ と書く。但し、'P-shift' は、 $\mathcal{M}(\alpha, \mathfrak{g})$ の trivial 表現と同じ infinitesimal character をもつ表現を $R_{\mathfrak{p}}^j$ が保つ様に定義する (see Vogan [1981])。

$V^L(\mu)$ を $\mu \in (\mathfrak{f}^c)^*$ を extremal weight とする L の有限次元既約表現とする。但し $V^L(\mu)$ が一次元の時は、 $\mathbb{C}\mu$ と書く。

L の代わりに、 G , M と書く時も同様の意味とする。

$Z(\mathfrak{q})$ を $\mathfrak{q}$ の展開環 $U(\mathfrak{q})$ の中心、 $\mathcal{D}(G/H)$ を G/H 上の G 不変微分作用素全体とする。 $W(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}^c)$, $W(\mathfrak{q}, \alpha)$ を root 系 $\Delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}^c)$, $\Sigma(\mathfrak{q}, \alpha)$ の Weyl 群とすれば、Harish-Chandra isomorphism より、

$$Z(\mathfrak{q}) \cong S(\mathfrak{f}^c)^{W(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}^c)}, \quad \mathcal{D}(G/H) \cong S(\alpha)^{W(\mathfrak{q}, \alpha)}.$$

また、 $V \in \mathcal{M}(\mathfrak{q}, K)$ に対し、その $(\mathfrak{q}, K)$ -module としての dual を $V^\vee$ と書く事にする。 V が有限次元の時は、 V^* と表す。

さて、大島-松木理論は、 $L^2(G/H, \mathbb{1})$ の discrete series が
 $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{D}(G/H), \mathbb{C}) \simeq \mathcal{O}^*/W(q, \alpha)$ と、 G^r/p^r の K^r -closed orbit (有限個)
 によって分類される事を主張している。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathcal{O}^* \text{ such that } \langle \lambda, \alpha \rangle > 0 \text{ for } \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \alpha) \\ \text{closed orbit } K^r p^r \subset G^r/p^r \end{array} \right.$$

に対応する discrete series を $V_\lambda \in \mathcal{M}(q, K)$ と表す。

$$V_\lambda \simeq R_p^{-\lambda} (\mathbb{C}_{\lambda - \rho(\mathfrak{m})})^\vee \quad (\lambda := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}))$$

なる (q, K) 同型が、 $\mathbb{Q}$ -module construction との duality theorem
 ([HMSW] (preprint)) から従う。(但し $\lambda \in \mathcal{O}^*$ はある lattice の元)

$V_\lambda \neq 0$ のための十分条件として、ここでは Flensted-Jensen type
 を用いよう。即ち、 λ は、ある lattice に属し、かつ $\lambda + \rho(\mathfrak{m} - 2\rho(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}))$
 が $\Delta^+(\mathfrak{k})$ dominant。この様な λ を fix する。(但し Theorem は $V_\lambda \neq 0$ が成立)

G^r/p^r の各 K^r -open orbit V_i (有限個), $w \in W(q, \alpha)$, $s \in G^r/p^r$
 に対し、 $w[S] := S \overline{p^r w^{-1} p^r} \subset G^r/p^r$,

$$\tilde{W}(s) := \{ w \in W(q, \alpha) : w[S] \cap V_i \neq \emptyset \}$$

$W'(s) := \tilde{W}(s)$ の中で Bruhat order が minimal な元全体

$$W(s) := \bigcup W'(s) \quad (\subset W(q, \alpha)) \quad \text{とあけは}$$

$W(s) \neq \emptyset$ (if $s \neq \emptyset$) である。

$w \in W(K^r p^r)$ を fix する。 $\tilde{w} \in W(q, f^c)$ を

$\tilde{w}\sigma = \sigma\tilde{w}$, $\tilde{w}|_{\alpha} = w$, $\tilde{w}p_m = p_m$ なる unique 元として

定義する。

(π, F) を $G_{\mathbb{C}}$ の holomorphic な有限次元既約表現で, H_n fixed vector を持つものとす. その highest weight for $\Delta^+(g, f)$ を $b \in (f^{\vee})^*$ とする.

H_n -fixed vector $u (\neq 0)$ を用いて, F^* は $G_{\mathbb{C}}$ の正則関数全体のなす $G_{\mathbb{C}}$ 左加群に次の様に $G_{\mathbb{C}}$ 共変に埋めこまれる.

$$\begin{array}{ccc} L_u : F^* & \hookrightarrow & \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v & \longmapsto & L_u(v) \quad (g \mapsto \langle \pi(g)u, v \rangle) \end{array}$$

$V_{\lambda} F^* \subset C^{\infty}(G)$ を, $\{v f : v \in V_{\lambda}, f \in L_u(F^*)\}$ が $\mathbb{C}$ -加群として生成する部分空間とする. (我々は,

$$V_{\lambda} \subset L^2(G/H) \cap A_k(G/H, m_{\lambda}) \hookrightarrow C^{\infty}(G) \quad \text{と見做している})$$

$V_{\lambda} F^*$ は, $(g, k) \mapsto C^{\infty}(G)$ (左正則表現) の admissible な (g, k) -submodule である.

$$V(\lambda, \Lambda) := P_{-(\lambda + \Lambda + \rho_m)}(V_{\lambda} F^*) \quad \text{とおく.}$$

$\lambda = \tau, \Lambda := \tilde{\omega}^{-1}b \in (f^{\vee})^*, P_{-(\lambda + \Lambda + \rho_m)}$ は, generalized $Z(g)$ -infinitesimal character $-(\lambda + \Lambda + \rho_m) \in (f^{\vee})^*$ の射影作用素.

即ち, $V(\lambda, \Lambda)$ は, Flomsted-Jensen type の discrete series を, H_n -fixed vector を持つ G の有限次元表現によって, orbit structure が定めるある方向に、関数空間上で Zuckerman tensoring を施して得られたものである.

$\Lambda_j \in (\mathfrak{f}^c)^*$ ($j=0, 1, \dots, k$) を.

$$\begin{cases} \Lambda_j \in \Delta(F: \mathfrak{f}^c) & (F \text{ の } \mathfrak{f}^c\text{-weight}) \\ \Lambda_j \text{ は dominant for } \Delta^+(m, \mathfrak{f}^c) \\ \lambda + \Lambda_j + \rho_m \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}^c) \ (\lambda + \Lambda + \rho_m) \end{cases}$$

を満たす元全体とする。但し $\Lambda_0 := \Lambda$ とおく。

この時、次の定理が成り立つ。

Theorem i) $V(\lambda, \Lambda)$ は、0 でない admissible $(\mathfrak{g}, K)$ -module.

ii) $T|_{H_m} = \text{id}$ & $[F^*|_H : T] \neq 0$ なる任意の $T \in \hat{H}$ に対し.

(この様な T は必ず存在し、 H の有限次元 unitary 表現と見做せる)

$$V(\lambda, \Lambda) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{G}_H, T) \text{ なる } (\mathfrak{g}, K) \text{ homomorphism}$$

が存在する。

iii) $\langle \lambda + \Lambda_j, \alpha \rangle > 0$ for $\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{g}, \mathcal{O})$ ならば、ii) における任意の T に対し.

$$V(\lambda, \Lambda) \hookrightarrow L^2(\mathbb{G}_H, T) \text{ なる } (\mathfrak{g}, K)\text{-hom が存在する。}$$

iv) $k=0$ ならば、 $S := \dim(u \cap \mathfrak{k})$ とおく。

$$R_p^S(V^L(\lambda + \Lambda - \rho(m)))^\vee \simeq R_{\mathfrak{g}}^S(C_{\lambda + \Lambda - \rho(m)})^\vee \longrightarrow V(\lambda, \Lambda)$$

なる $(\mathfrak{g}, K)$ homomorphism が存在する。

v) $k=0$ かつ $\lambda + \Lambda + \rho_m$ が $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}^c)$ dominant ならば.

iv) の写像は同型で、 $V(\lambda, \Lambda)$ は既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -module.

Remark 1. $V(\lambda, \Lambda)$ の構成の基本的な idea は、大島-松本が discrete series が 0 でない条件を check する時に用いたものに基づく。

Remark 2. $z(\mathfrak{g})$ -infinitesimal character が singular な時も扱っているので、 $k \geq 1$ となる場合がありうる。しかし、 $1 + p_m$ が $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}^c)$ -strictly dominant ならば、v) の仮定の内、 $k=0$ はもう一方の仮定より従う。

尚、 $k=0$ なら、iii) の L^2 -ness の仮定は critical (cf. [OM] (1984))。一方、v) の既約性のための仮定は、一般論が直ちに使える強い仮定である。§3 では、[Vogan] (preprint) と同様に、この仮定が弱められる。

Theorem 7'. K の closed orbit on G^r/p^r , $\lambda \in \mathcal{O}^*$, $\Lambda = \omega^{-1}b \in (\mathfrak{f}^c)^*$ を動かす事によって、[Schlichtkrull] (1982) では得られていないものを含む discrete series (0 でない) を構成する事ができる。[Kobayashi] (1987) では、この立場でいくつかの例を与えた。一方、別の構成として、vector 束値の場合も、'Poisson 変換' + Flensted-Jensen 同型 によって、[Oshima-Matsuki] (1984) Theorem (ii) と同様の条件の下で、(0 になるかも知れないが) $L^2(\mathcal{G}/H, \tau)$ の discrete series が得られる。§3 の Thm A, B, C の 6) は、0 になるかどうかを別の方法で決定できるので、後者の構成を用いる。

§3 古典型の例

この節では $G = Sp(p, q), U(p, q), SO_0(p, q)$ の場合を扱う。

$G = Sp(p, q)$; $p, q \geq 1$ の場合。

$K = Sp(p) \times Sp(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする。

$\mathfrak{h}^C$ が $\mathfrak{g}$ の fundamental Cartan subalgebra とすれば $\mathfrak{h}^C \subset \mathfrak{l}$.

適当な coordinate $\{f_i; 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^C)^*$ とすれば

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^C) = \{\pm(f_i \pm f_j), 2f_1; 1 \leq i < j \leq p+q, 1 \leq l \leq p+q\}.$$

$$\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}^C) = \{\pm(f_i \pm f_j), 2f_1; 1 \leq i < j \leq p \text{ or } p+1 \leq i < j \leq q, 1 \leq l \leq p+q\}.$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^C)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^C$ とおく。

$1 \leq r \leq p$ なる自然数 r をとり、以後 r を固定する。

$$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1, \dots, H_r \rangle \subset \mathfrak{h}^C.$$

$$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}), \quad L := Z_G(\mathfrak{t}) \text{ とおく.}$$

L は G の θ stable な connected reductive subgroup である。

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を

$$\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}^C) := \{f_i \pm f_j, 2f_1; 1 \leq i \leq r, i < j \leq p+q, 1 \leq l \leq r\} \text{ で定義する.}$$

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra の Levi 分解を与える。

$$\rho := \rho(\mathfrak{u}) \in (\mathfrak{h}^C)^*$$

$$Q := p+q-r \quad (> 0)$$

$$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{l}) = r(2p-r+2)$$

$$\lambda := \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i \in \mathfrak{t}^* \hookrightarrow (\mathfrak{h}^C)^*$$

Theorem A

0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の任意の θ stable parabolic subalgebra は,

K の適当な元によって、 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ に conjugate。

1) $\lambda - \rho \in \mathfrak{l}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる $\leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{Z}, (1 \leq \forall i \leq r)$ — ①

以後 2) ~ 6) において、すべて ① を仮定する。

2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq -Q$ — ② ならば、

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \quad \text{for } \forall j \neq 0.$$

3) ② の下で、

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r \geq -Q \\ \lambda_{r-2q} \geq Q+1 \end{cases} \quad \text{--- ③}$$

但し、③の後半の条件は、 $r > 2q$ の時のみ課すものとする。

4) ③ における $\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 達は $(\mathfrak{g}, K)$ module として、pairwise inequivalent.

5) ③ かつ、 $\lambda_r > 0$ ならば、 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は irreducible as $(\mathfrak{g}, K)$ module.

6) $r = 2m$ ($1 \leq m \leq [\frac{p}{2}]$) の時、

③ かつ $\lambda_{r-1} + \lambda_r > 0$ ならば、

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(\mathrm{Sp}(p, q) / \mathrm{Sp}(p-m, q))$$

なる discrete series への単射な $(\mathfrak{g}, K)$ module homomorphism が存在する。

特に、 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は unitarizable.

$G = U(p, q)$; $p, q \geq 1$ の場合。

$K = U(p) \times U(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする.

$\mathfrak{h}^c$ を $\mathfrak{g}$ の fundamental Cartan subalgebra とすれば, $\mathfrak{h}^c \subset \mathfrak{l}$.

適当な coordinate $\{f_i; 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ をとれば,

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i - f_j); 1 \leq i < j \leq p+q\}.$$

$$\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i - f_j); 1 \leq i < j \leq p \text{ or } p+1 \leq i < j \leq q\}.$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^c$ とおく.

$1 \leq r + s \leq p$ なる 自然数 r, s (一方が 0 でもよい) をとり, fix する.

$$\mathfrak{t} := \mathbb{C} \langle H_1, \dots, H_{r+s} \rangle \subset \mathfrak{h}^c.$$

$$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}), \mathfrak{L} := Z_G(\mathfrak{t}) \text{ とおく.}$$

$\mathfrak{L}$ は G の θ stable $\mathfrak{l}$ connected reductive subgroup である.

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を 次のルートによって定義する.

$$\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}^c) := \{f_i - f_j; 1 \leq i \leq r, i < j \leq p+q\} \cup \{-f_i + f_j; r+1 \leq i \leq r+s, i < j \leq p+q\}.$$

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra の Levi 分解を与える.

$$\rho := \rho(\mathfrak{u}) \in (\mathfrak{h}^c)^*$$

$$Q := \frac{1}{2}(p+q-r-s-1) \quad (\geq 0)$$

$$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{l}) = \frac{1}{2}(r+s)(2p-r-s-1)$$

$$\lambda := \sum_{i=1}^{r+s} \lambda_i f_i + \frac{-r+s}{2} \sum_{i=1}^{p+q} f_i \in \mathfrak{t}^* \hookrightarrow (\mathfrak{h}^c)^*$$

Theorem B 0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra K conjugacy class は $r+s+1$ 個 ($r+s$ の分割に対応する)

1) $\lambda - \rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる

$$\rightarrow \lambda_i \in \mathbb{Z} + \mathbb{Q}, \quad (1 \leq i \leq r+s) \quad \text{--- ①}$$

以後 2) ~ 6) において、すべて ① を仮定する。

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+s} \geq \lambda_{r+s-1} \geq \cdots \geq \lambda_{r+1} \\ r \neq 0 \text{ ならば } \lambda_r \geq -Q; \quad s \neq 0 \text{ ならば } \lambda_{r+s} \leq Q \end{array} \right\} \quad \text{--- ②}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{R}_q^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \quad \text{for } \forall j \neq 0.$$

3) ② の下で、

$$\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r \geq \lambda_{r+s} > \lambda_{r+s-1} > \cdots > \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r-q} \geq Q+1, \quad \lambda_r \geq -Q, \quad \lambda_{r+s-q} \leq -Q-1, \quad \lambda_{r+s} \leq Q \end{array} \right\} \quad \text{--- ③}$$

但し、③の後半は、それぞれ $r > q$, $r > 0$, $s > q$, $s > 0$ の時のみ課す。

4) ③ を満たす $\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 達は、 $(\mathfrak{g}, K)$ module として、pairwise inequivalent.

5) ③ かつ $\lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+s}$ ならば、

$\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は irreducible as $(\mathfrak{g}, K)$ module.

6) $r = s$ ($= m$ とおく) の時、

③ かつ $\lambda_r > \lambda_{r+s}$ ならば、

$$\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(U(p, q)/U(p-m, q))$$

なる discrete series $\wedge$ の単射な $(\mathfrak{g}, K)$ module homomorphism が存在する。

特に、 $\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は unitarizable.

$G = SO_0(p, q)$; $p, q \geq 1$ の場合.

$K = SO(p) \times SO(q)$. $\theta \in K$ に対応する G の Cartan involution とする.

$\mathfrak{h}^C \in \mathfrak{g}$ の fundamental CSA とし, $\mathfrak{h}^C = (\mathfrak{h}^C \cap \mathfrak{l}) + (\mathfrak{h}^C \cap \mathfrak{p}) \equiv \mathfrak{t}^C + \mathfrak{a}^C$ とおく.

p, q 奇数の時, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}^C = 1$; それ以外の時, $\mathfrak{a}^C = 0$ である.

適当な coordinate $\{f_i; 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^C)^* = (\mathfrak{t}^C)^* + (\mathfrak{a}^C)^*$ をとる.

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^C) = \{\pm(f_i \pm f_j); 1 \leq i < j \leq p+q\} \left(\cup \{\pm f_1; 1 \leq i \leq [\frac{p+q}{2}]\} (p+q: \text{odd}) \right)$$

$$\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}^C) = \{\pm(f_i \pm f_j); 1 \leq i < j \leq [\frac{p}{2}] \text{ or } [\frac{p+q}{2}] - [\frac{q}{2}] + 1 \leq i < j \leq [\frac{p+q}{2}]\} \cup$$

$$\left(\cup \{\pm f_1; 1 \leq i \leq [\frac{p}{2}]\} (p: \text{odd}) \right) \cup \left(\{\pm f_1; [\frac{p+q}{2}] - [\frac{q}{2}] + 1 \leq i \leq [\frac{p+q}{2}]\} (q: \text{odd}) \right)$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^C)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^C$ とおく.

$1 \leq r \leq [\frac{p}{2}]$ なる自然数 r をとり, 以後 fix する.

$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1, \dots, H_r \rangle \subset \mathfrak{t}^C (\subset \mathfrak{h}^C)$.

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}), \mathfrak{L} := Z_G(\mathfrak{t})$ とおく.

$\mathfrak{L}$ は G の θ stable な connected reductive subgroup である.

$$\mu := \sum_{i=1}^r \left(\frac{p+q}{2} - i \right) f_i \in \mathfrak{t}^*, \quad \mu' := \mu - (p+q-2r)f_r \in \mathfrak{t}^* \left(\subset (\mathfrak{t}^C)^* \subset (\mathfrak{h}^C)^* \right)$$

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を

$$\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}^C) := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}); \langle \alpha, \mu \rangle > 0\}, \quad \Delta(\mathfrak{u}', \mathfrak{h}^C) := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}); \langle \alpha, \mu' \rangle > 0\} \text{ と定義する.}$$

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ (resp. $\mathfrak{q}' := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}'$) は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra.

$\rho := \rho(\mathfrak{u})$ (resp. $\rho' := \rho(\mathfrak{u}')$) $\in (\mathfrak{h}^C)^*$ とおく, $\rho = \mu$ (resp. $\rho' = \mu'$).

$$Q := \frac{p+q}{2} - r - 1 \left(\geq -\frac{1}{2} \right)$$

$$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{l}) = r(p-r-1)$$

$$\lambda := \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i \in \mathfrak{t}^*; \quad \lambda' := \lambda - 2\lambda_r f_r \in \mathfrak{t}^* \left(\hookrightarrow (\mathfrak{h}^C)^* \right)$$

Theorem C 0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の任意の θ stable parabolic subalgebra

$P = 2r$ の時. K の適当な元によつて $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ に conjugate.

$P = 2r$ の時. K " $\mathfrak{q}$ または $\mathfrak{q}'$ に conjugate.

1) $\lambda - \rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる.

$\rightarrow \lambda' - \rho' \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる.

$\rightarrow \lambda_i \in \mathbb{Z} + \mathbb{Q}, \quad (1 \leq i \leq r) \quad \text{--- ①}$

以後 2) ~ 6) において. すべて ① を仮定する.

2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \min(0, -Q) \quad \text{--- ② ならば}$.

$$\mathfrak{R}_q^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = \mathfrak{R}_{q'}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda',-\rho'}) = 0 \quad \text{for } \forall j \neq 0.$$

3) ② の下で:

$$\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{R}_{q'}^S(\mathbb{C}_{\lambda',-\rho'}) \neq 0$$

$$\leftrightarrow \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r \geq \min(0, -Q) \quad \& \quad \lambda_{r-q} \geq Q+1 \quad \text{--- ③}$$

但し. ③ の後半の条件は. $r > q$ の時のみ課すものとする.

4) ③ を満たす $\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}), \mathfrak{R}_{q'}^S(\mathbb{C}_{\lambda',-\rho'})$ 達の中で $(\mathfrak{g}, K)$ module と同型なものは.

$p \neq 2r$ の時. $\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \cong \mathfrak{R}_{q'}^S(\mathbb{C}_{\lambda',-\rho'}) \quad (\forall \lambda)$ のみ.

$p = 2r$ の時. なし.

5) ③ かつ $\lambda_r \geq 0$ ならば:

$\mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 及び $\mathfrak{R}_{q'}^S(\mathbb{C}_{\lambda',-\rho'})$ は irreducible as $(\mathfrak{g}, K)$ module.

6) ③ かつ $\lambda_r > 0$ ならば:

$$p \neq 2r \text{ の時. } \mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(\mathrm{SO}_0(p, q) / \mathrm{SO}_0(p-r, q))$$

$$p = 2r \text{ の時. } \mathfrak{R}_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \oplus \mathfrak{R}_{q'}^S(\mathbb{C}_{\lambda',-\rho'}) \hookrightarrow L^2(\mathrm{SO}_0(p, q) / \mathrm{SO}_0(p-r, q))$$

なる discrete series への単射な $(\mathfrak{g}, K)$ module homomorphism が存在する.

Remark i) $G = Sp(p, \mathbb{R})$, $G = U(p, \mathbb{R})$ の場合. Theorem A, Bより,

$\langle \lambda, \alpha \rangle < 0$ ($\exists \alpha \in \Delta(u)$) を満たす λ (無限個) に対しても,
 $R_{\mathbb{Q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-p})$ が, reductive space G/H_m の discrete series
 として実現される事がわかる。(いずれも, $2(g)$ -infinitesimal
 character が singular な場合) この事は, 半単純対称空間
 (群自身を含む) の discrete series (これは limit of discrete series)
 の場合と異なり, [Vogan](1984) の unitarizability の条件から
 はずれており, 興味深い。

尚, 対称空間 $\frac{Sp(p, \mathbb{R})}{Sp(m) \times Sp(p-m, \mathbb{R})}$, $\frac{U(p, \mathbb{R})}{U(m) \times U(p-m, \mathbb{R})}$, $\frac{SO_0(p, \mathbb{R})}{SO(m) \times SO_0(p-m, \mathbb{R})}$
 の discrete series は, Theorem A, B, C の 6) の部分集合で,
 更に次の条件を満たす λ に対応する $R_{\mathbb{Q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-p})$ まで尽さ
 れる。(C では $r = m$ とおいた)

$G = Sp(p, \mathbb{R})$ の時; Theorem A で $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} + 1$ ($1 \leq i \leq m$)

$G = U(p, \mathbb{R})$ の時; Theorem B で $\lambda_i = \lambda_{m+i}$ ($1 \leq i \leq m$)

$G = SO_0(p, \mathbb{R})$ の時; Theorem C で $\lambda_{i+1} - \lambda_i \in \mathbb{Z} + 1$ ($1 \leq i \leq m-1$)

ii) 既約性, vanishing theorem for $R_{\mathbb{Q}}^{S-j}$ ($j \neq 0$), non vanishing of $R_{\mathbb{Q}}^S$,
 unitarizability については, 幾つかの一般論 ([Vogan](1984),
 [Bien](1986) 他) から次の場合には, 直ちに言える。

a) $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ for $\forall \alpha \in \Delta(u)$ ならば,

($\Leftrightarrow$ Thm A, C では $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$; Thm B では $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+s} \geq \dots \geq \lambda_{r+1}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{\mathfrak{g}}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 & (\forall j \neq 0) & (\text{cf. Thm A, B, C の 2)}) \\ R_{\mathfrak{g}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \text{ は } 0 \text{ 又は unitarizable} & (\text{cf. // の 6) の後半}) \end{cases}$$

$$b) \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \geq 0 \quad \text{for } \forall \alpha \in \Delta(u)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Thm A については} & \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq Q \\ \text{Thm B については} & \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq Q \text{ \& } -Q \geq \lambda_{r+1} \geq \dots \geq \lambda_{r+t} \\ \text{Thm C については} & \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \max(0, Q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{\mathfrak{g}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \text{ は } 0 \text{ 又は 既約。} \quad (\text{cf. Thm A, B, C の 5)})$$

(但し、 $\mathcal{D}$ -module construction を用いれば、Thm B, C は
moment map が birational, normal image を持つ case なの。
a) の仮定でも同じ結論が出る。

$$c) \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle > 0 \quad \text{for } \forall \alpha \in \Delta(u)$$

$$\Rightarrow R_{\mathfrak{g}}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0 \quad (\text{cf. Thm A, B, C の 3) の十分条件})$$

iii) Theorem A, B, C の 3) の十分条件, 5) はそれぞれ、[大島-松本]
(本報告集), [Vogan](preprint) が対称空間の discrete
series の場合に示した idea を用いる。

iv) Theorem の 2) や 6) の後半で見られる様に、vanishing theorem や
unitarizability が、canonical Weyl chamber (この Remark ii) a) の条件)
を少し越えた λ に対しても成り立つ、といった type の事実は、
幾つかの特別な場合に知られている。例えば、[Enright -

[Parthasarathy-Wallach-Wolf] (1985) では、'ある種の' parabolic subalgebra (例えば Theorem A では $r=1$ の場合に相当) からの誘導の場合を扱っている。

v) $\mu_1 := 1 + P(U) - 2P(U \cap K)$ が $\Delta^+(K)$ -dominant の時、

$$\left(\begin{array}{l} \Leftrightarrow \text{Theorem A では } \lambda_1 > \dots > \lambda_r \geq p - q - r + 1 \\ \text{Theorem B では } \lambda_1 > \dots > \lambda_r \geq \frac{1}{2}(p - q - r - s + 1) \leq -\lambda_{r+s} \leq \dots \leq -\lambda_{r+t} \\ \text{Theorem C では } \lambda_1 > \dots > \lambda_r \geq \frac{1}{2}(p - q - 2r) \end{array} \right)$$

μ_1 は $R_q^S(\mathbb{C}_{1-p})$ ($\neq 0$) の unique K -type の highest weight となる。

Theorem A, B, C の 6) の設定の下では μ_1 が $\Delta^+(K)$ -dominant という条件は、対応する discrete series $R_q^S(\mathbb{C}_{1-p}) \hookrightarrow L^2(G/H_m)$

が、 K^r -closed orbit に台を持つ G^r/p^r 上の measure class の境界値からの 'Poisson 変換' によって得られる事に対応する。

[Schlichtkrull] (1982) で構成されている discrete series は、

この type である。(但し、[Schlichtkrull] (1982) Theorem 8.2~8.4 では、彼の構成したもののうち、Langlands parameter が安定する部分が explicit に書かれている。尚、その記述に若干の misprints がある)

我々の構成した discrete series (Thm A, B, C の 6)) は、 $G = Sp(p, q)$ 及び $G = U(p, q)$ の時は常に、また $G = SO_0(p, q)$ の時は、

$p - q - 2m \geq 3$ の場合に、Schlichtkrull のそれより 真に広い。

Schlichtkrull の構成した discrete series は、対称空間の (普通の意味の) discrete series の場合の Flensted-Jensen type に相当するが、この場合は、 $G = S_p(p, q), U(p, q), SO_0(p, q)$ いずれの場合も、 q が十分大きい時は (i.e. $p - q - 2m \geq 1$ (w.r.t. 2, 3)) Flensted-Jensen type が対応する対称空間の full discrete series になっている事に注意しよう。

vii) 我々が Theorem A, B, C の 6) で述べた discrete series は、discrete series 全体を尽くしているとは言っていない。また、重複度は、必ずしも 1 ではない。

vii) §1 の rank condition (2) の仮定を満たさない時にも、 $L^2(G/H, \tau)$ に有限個、あるいは $L^2(G/H_m)$ に無限個の discrete series が存在する事がある。 $H = H_m = K$ の時は、その典型的な例である。あるいは、Theorem A 6) で $p = m$ の時も、 $L^2(Sp(p, q)/Sp(q))$ には、無限個の discrete series が存在する事が Blattner formula よりわかる。尚、これらの type の例は、砂田利一氏が提出した問題 (「数学」1987 夏季号 p239) の否定的な例を与える。

§ 4 証明について

§ 2 の Theorem は、 G/H の球函数の漸近挙動が、その境界値の台の言葉で表されるという大島の定理 ([Oshima] (1984)) が本質的である。尚、 L^2 -ness の評価は、 $P_{-(1+\epsilon)m}$ を施した後で行い、更に formal には現れる可能性のあるいくつかの exponents の可能性が否定 ([Kobayashi] (1987) §4 p28) されるので、sharp になっている。iv) の最初の等式は、Boel-Weil-Bott の定理と、induction by stages の spectral sequence から従う。

§ 3 の Theorem A, B, C について： 2) は、壁を越えて translation した時の spectral sequence を S と K -type formula を用いて調べ、inductive に示す。(K -type formula を使わない別の証明も可能)。3) は vanishing theorem 2) があるので、 K -type formula (generalized Blattner formula) ($\mathbb{R}_q$ では Zuckerman, [Vogan] (1981); $\mathbb{Q}$ -module construction に対しては大島 (unpublished) 或 [Bien] (1986) 等) が有効である。 $\Leftarrow$) は既に述べた様に、小さな K -type の重複度の実際の計算が可能であるという大島の発見 ([大島-松本] (本報告集)) を使う。 $\Rightarrow$) は、対称空間の場合、幾何的な証明が大島-松本によって与えられているが、ここでは、 K -type formula を parabolic induction と translation principle に組み合わせて示される。

4) は、同じ $2(\mathfrak{g})$ -infinitesimal character を持つ場合が問題であるが、translation principle を小刻みに繰り返して、いつ消

えるかを調べる事でわかる。また Theorem C の 4) の後半は、 K -type の重複度の漸近挙動によって示される。尚 K -type を使わない証明も可能。即ち、 $SO(p, q) \supset R_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \oplus R_{q'}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ の作用が 5) の仮定の下で既約である事が証明され、この場合の $R_q^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq R_{q'}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ が言え、一般にはこれに帰着させる。

5) は、[Vogan] (preprint) の方法が、もう少し広い class の parabolic subalgebra に対して適用可能である事を使う。即ち Dixmier algebra の translation principle が、singular infinitesimal character でも、ある方向には望ましく行える事を、 $U(\mathfrak{g})$ の ideal theory を使って示す。

◎最後に・・・

G/H は、rank condition を仮定しない一般の対称空間とする。

・ $\exists \tau (a, \chi_\tau) \in \hat{H}$ (unitary な有限次元既約表現), $L^2(G/H, \tau)$ が無限個の discrete series を持つ $\Leftrightarrow \text{rank } G/H = \text{rank } K/H_{\text{nk}}$ か?

($\Leftarrow$ は正しい) ($\Rightarrow$ で有限個の discrete series なら反例あり)。

・ M を G 共変な G/H 上の fiber bundle with compact fiber とする。

「 $L^2(M)$ に discrete series が存在する $\Rightarrow L^2(M)$ に discrete series が無限個存在する」は成り立つか?

・ singular な壁から、より singular な壁に translation する時を組織的に調べる (τ -invariant に相当するもの) 事で Thm A, B, C の 3), 5) を一般化できるか?

References

- [Bien](1986) F.Bien, Spherical $\mathcal{D}$ -modules and Representations of Reductive Lie Groups, Ph.D.dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [Enright-Parthasarathy-Wallach-Wolf](1985) T.J.Enright, R.Parthasarathy, N.R.Wallach, and J.A.Wolf, Unitary derived functor module with small spectrum, *Acta.Math.*, **154**(1985), 105-136.
- [Flensted-Jensen](1980) M.Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, *Ann.Math.*, **111**(1980), 253-311.
- [Hecht-Milićić-Schmid-Wolf](preprint) H.Hecht, D.Milićić, W.Schmid and J.A.Wolf, Localization and Standard modules for real semisimple Lie Groups I, (preprint).
- [Matsuki](1985) 半単純対称空間の軌道分解, *数学* (1986), 232-248
- [Oshima](1984) 球関数の漸近挙動について, *ユニタリ表現論セミナー報告IV* (1984)
- [Oshima-Matsuki](1984) T.Oshima, T.Matsuki, A Description of Discrete Series for Semisimple Symmetric Space, *Advanced Studies in Pure Math.*, **4**(1984), 331-390.
- [Kobayashi](1987) 対称空間上のベクトル束に実現されるユニタリ表現, *東大修士論文I*, 1-56
- [Schlichtkrull](1982) H.Schlichtkrull, A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semisimple Lie group, *Invent.Math.* **68**(1982), 497-516.
- [Vogan](1981) D.Vogan, Representations of Real Reductive Lie Groups. Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, (1981).
- [Vogan](1984) D.Vogan, Unitarizability of certain series of representation of representations, *Ann.Math.*, **120**(1984), 141-187.
- [Vogan](preprint) D.Vogan, Irreducibility of Discrete Series Representations for Semisimple Symmetric Spaces, (preprint), 1-46.