

## Rayleigh-Bénard 対流におけるカオス遷移

広島大理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

二枚の水平平行平板間に流体を容れ、底面より加熱したとき発生する Rayleigh-Bénard (RB) 対流は、平行平板間の温度差  $T_d$ 、流体の性質を表す Prandtl 数  $Pr$ 、容器の形状・アスペクト比によって、きわめて多様な空間的構造と時間的挙動を示すため、多くの実験的・理論的研究の対象とされてきた。一方、1970 年代後半から大きな注目を集め始めた少数自由度力学系における決定論的カオス (deterministic chaos) の発見は、多くの実在する自然系・人工系においてカオスを実験的に検出する試みを促したが、流体力学系においてまず対象として選ばれたのが、RB 対流と同軸円筒間の Taylor-Couette 流であった。流体は連続体であって無限の力学的自由度をもっているため、はたして流体の乱雑な不規則運動が、少数自由度カオスによって支配される場合があるか否かを検証することは、興味ある課題である。実験は 1980 年前後に、Ahlers, Gollub, Giglio, Libchaber, Swinney, Sawada などによって、水、液体ヘリウム、水銀などの系に対して行われ、その結果容器のアスペクト比が小さく対流の大域的空間的パターンが維持される場合には、対流場の局所的時間振動の観測された時系列は、確かに少数自由度カオスに特有の相空間トラジェクトリや分岐構造を示すことが明らかにされ、流体カオスの実在が認知されるに至った。<sup>1)</sup>

少数自由度カオスが検出された流体系は、このようにアスペクト比など容器の形状や側壁の境界条件などに強く依存した有限閉鎖系であるので、理論的に Navier-Stokes 方程式にカオス解を見出すには先ず同じ外部条件の下で計算機シミュレーションを行ってみるのが有効と考えられる。このための試みとしては、先ず切断系による計算がある。流体場と温度場をそれぞれ境界条件を満たす適当な直交関数系で展開し、Galerkin 法により時間振幅

係数の時間発展を支配する常微分方程式系を導き、展開関数の個数を有限個で切断すると全体で有限自由度の力学系を得るが、これを以下、切断系 truncate model system とよぶことにする。Lorenz 方程式は3個の変数からなる最も少数自由度の切断系であるが、カオス解をもつことを除いてはいま考えているRB系の実験との関連はない。これに対し、展開関数系を適当に選び変数の数を数10個に拡張して、上記の実験結果と同様な分岐過程を経てカオス解が出現する切断系を構成する試みが当時種々なされた。<sup>2)</sup> 当時の計算機的能力を考えれば、切断系は流体カオスを記述する単純な模型として意味があったと思われるが、解の挙動や分岐が切断の仕方や個数に依存するため、Navier-Stokes 系の同じ境界条件における解を表現しているとは言えないであろう。

そこで、もう少し直接的に Navier-Stokes 方程式の simulation を行う試みが擬スペクトル法を用いて80年代にいくつかなされたが、境界条件が実験と整合的でなかったり、展開モードの個数が少なすぎたりしたためか、カオス解への遷移は得られているが、上記の諸実験と比較しうるような分岐構造は得られていないように思われる。<sup>3~5)</sup> その後、90年代になってSIMPLE法やMAC法などの差分法を用いて、直方体中のRB対流を境界条件を考慮して simulation する試みがいくつかなされた。<sup>6,7)</sup> これらの系では(対流場に外的にある種の空間的対称性を課するという特殊な場合を除いて)、RB対流は温度差  $T_d$  の増加とともに、定常流  $\rightarrow$  周期的振動流 (monoperiodic:  $T$ )  $\rightarrow$  2個の振動数からなる準周期的振動流 (biperiodic:  $T^2$ )  $\rightarrow$  非周期的振動流という分岐を経るが、ここでは  $T^2$  から非周期振動への遷移が突然起っており、その機構を少数自由度カオス出現の枠組みの範囲で理解することはそう簡単ではない。というのは、このような場合、上記RB対流の実験においても、あるいは少数自由度非線型力学系においても、多くは  $T^2$  の2個の独立振動数の同期化という前駆的状态を経て非周期的運動に遷移するからである。そこで、これが Navier-Stokes 系の解の本来の挙動なのか、差分格子が粗すぎるなどの数値誤差による  $T^2$  の崩壊なのかを、判別する必要があるように思われる。具体的な判別の方法としては、一つは差分格子をより細密化して同じ計算を繰返し差分解の安定性を検証することがあり、もう一つはや

はり同じ外部境界条件のもとで行われた精密流体実験の結果と比較することがある。

この報告では、数年前に筆者等が行ったMAC法による直方体中のRB対流のsimulation<sup>7)</sup>を、より細密化した差分格子上で行った結果をのべる。水平  $(x, y)$  平面上におかれた直方体  $\{(x, y, z) | 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z\}$  (ここで、 $z$  軸は鉛直上向きにとる) に流体を容れ、底面と上面をそれぞれ等温的に温度  $T_1, T_2$  に保ち、側面を断熱的に保つ。底面と上面の温度差を  $T_d = T_1 - T_2$  とし、熱伝導状態 (convection-free state) における流体の温度、圧力をそれぞれ  $T_s = T_1 - T_d z / L_z$ 、 $P_s$  とかく。流体の速度を  $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ 、温度を  $T$ 、圧力を  $P$  とするとき、対流を記述する速度  $\mathbf{u}$ 、温度  $\theta = T - T_s$ 、圧力  $\delta P = P - P_s$  の従う運動方程式は、Boussinesq 近似の範囲で、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{\delta P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha \rho g \theta \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \frac{T_d}{L_z} u_z. \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

となる。ここで、 $\rho$  は流体の平均密度、 $\nu$  は動粘性率、 $\kappa$  は温度伝導率、 $\alpha$  は体積膨張係数、 $g$  は重力加速度、 $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$  は  $z$  軸方向の単位ベクトルである。次に、この方程式を長さを  $L_z$ 、時間を  $L_z^2 / \kappa$ 、温度を  $\kappa \nu / g \alpha L_z^3$  を単位として無次元化すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{\delta P}{\rho} + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Pr \theta \mathbf{e}_z. \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \nabla^2 \theta + (Ra) u_z. \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

となる。ここで、Rayleigh 数  $Ra = \alpha g T_d L_z^3 / \kappa \nu$ 、Prandtl 数  $Pr = \nu / \kappa$  は、系を特徴づける無次元パラメータである。境界条件は、速度場  $\mathbf{u}$  に対して各壁上で滑りなし、温度場  $\theta$  に対

して上下水平壁で等温的、各側壁で断熱的とすると、容器のアスペクト比を  $\Gamma_x = L_x/L_z$ 、 $\Gamma_y = L_y/L_z$  として、

$$u_x = \partial_x u_x = u_y = u_z = \partial_x \theta = 0 \quad \text{on } x = 0, \Gamma_x \quad (7)$$

$$u_x = u_y = \partial_y u_y = u_z = \partial_y \theta = 0 \quad \text{on } y = 0, \Gamma_y \quad (8)$$

$$u_x = u_y = u_z = \partial_z u_z = \theta = 0 \quad \text{on } y = 0, 1 \quad (9)$$

とかかれる。結局、直方体中の RB 対流は、4 個の無次元パラメータ  $\Gamma_x, \Gamma_y, Pr, Ra$  を指定すると、境界条件 (7)~(9) の下で、運動方程式 (4)~(6) に従って場の時空間構造が発展する系である。

ここでは、前論文と同様に MAC 法による simulation によってこの問題を数値的に解くことを試みる。領域の直方体を各差分格子が立方体になるように一様に分割し、各格子の中心を差分格子点  $(I, J, K)$  ( $I = 1, 2, \dots, N_x; J = 1, 2, \dots, N_y; K = 1, 2, \dots, N_z$ ) にとると、これらの点は、実際の点  $x = (I - 1/2)\Gamma_x/N_x, y = (J - 1/2)\Gamma_y/N_y, z = (K - 1/2)/N_z$  に対応していて、一様分割の結果格子幅は  $h = \Gamma_x/N_x = \Gamma_y/N_y = 1/N_z$  となる。MAC 法における staggered lattice においては、温度場と圧力場は格子の体心点、速度場は面心点で、 $\theta(I, J, K), \delta p(I, J, K), u_x(I \pm \frac{1}{2}, J, K), u_y(I, J \pm \frac{1}{2}, K), u_z(I, J, K \pm \frac{1}{2})$  のように定義される。微分の差分化は、空間に関して刻み幅  $h$  の中心差分、時間に関して刻み幅  $\tau$  の Euler 法を用いた。時間推進は各 time step 毎に 2 分割して、先ず最初の半分で、

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\tau} = Pr \nabla^2 \mathbf{u}^n + Pr \theta^n \mathbf{e}_z - \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n \quad (10)$$

によって、 $\tilde{\mathbf{u}}$  を求め、次にこれを非斉次項とした圧力 Poisson 方程式

$$\nabla^2 \frac{\delta P}{\rho} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\tau} \quad (11)$$

を解き、この解  $\delta P/\rho$  を用いて次の時刻での  $\mathbf{u}^{n+1}$  の値を

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\tau} = -\nabla \frac{\delta P}{\rho} \quad (12)$$

によって求める。このようにすると、時刻  $n+1$  における非圧縮性の条件  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$  が満たされる。Poisson 方程式の解法には、ICCG(Incomplete Cholesky decomposition and Conjugate Gradient) 法を用いた。<sup>8)</sup>

計算ははじめに挙げた実験のうち、Gollub & Benson<sup>9)</sup> および Sano & Sawada<sup>10)</sup> による水を用いた実験でのアスペクト比  $\Gamma_x, \Gamma_y$ , Prandtl 数  $Pr$  の数値に、simulation 方程式のパラメータ値を設定して行った。これらの実験では対流の主流は 2-ロール状態なので、十分低い  $Ra$  においてこの空間状態を初期状態として設定し (図 1)、ここから出発して  $Ra$  をステップ状に上昇し、そこでの  $Ra$  の各値における流体方程式の時間発展を追った。設定した格子数は、 $N_z = 24$  で全体の格子数はアスペクト比に依存して  $N_t = \Gamma_x \Gamma_y N_z^3$  となる。また、時間刻み幅は  $\tau = 0.25 \times 10^{-4} [L_z^2 / \kappa]$  にとった。

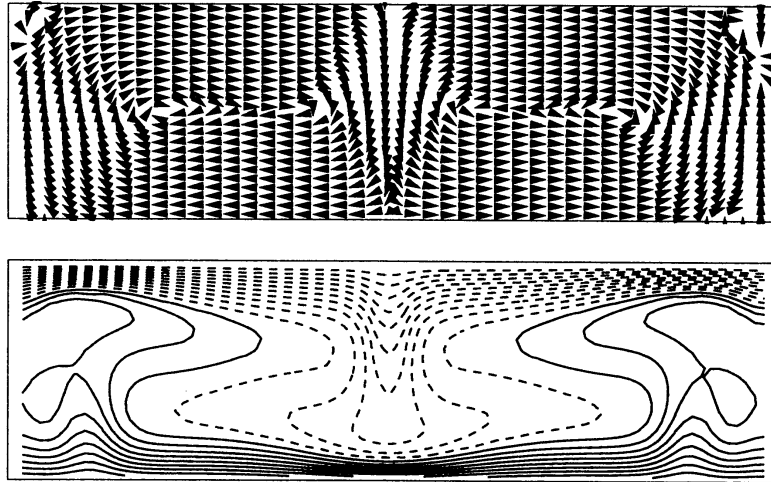


図 1: 直方体容器の垂直断面  $y = \Gamma_y/2$  における  $(x, z)$  平面内の対流の空間パターン (a) 速度ベクトル、(b) 温度分布の等高線;  $Ra = 42000, Pr = 5, \Gamma_x = 3.5, \Gamma_y = 2$ . 対流は両側面付近で上昇し、中央部で下降する  $y$  軸を回転軸とする 2-ロール状態にある。

Gollub & Benson(GB) はいくつかの異なったアスペクト比の直方体容器中に容れた Prandtl 数  $Pr = 2.5, 5.0$  の水を用いて RB 対流の実験を行い、その運動状態が  $Ra$  の増加とともに経る遷移がこれらの設定されたパラメータ値に依存して極めて多様であることを観測した。

それらの中、 $\Gamma_x = 3.51, \Gamma_y = 2.08, Pr = 5.0$  の場合を取り上げると、運動は  $Ra$  の増加とともに、mono-periodic  $\rightarrow$  biperiodic  $\rightarrow$  位相同期  $\rightarrow$  非周期的状態の遷移系列を経ることを見出した。これを以下簡単のため仮に MBLN 系列とよぶ。この遷移系列は少数自由度力学系でも数多く観測されているので、この場合 RB 対流の実験で観測された非周期的振動は少数自由度カオスとみなしてよいであろう。そこでアスペクト比、Prandtl 数をそれぞれ  $\Gamma_x = 3.5, \Gamma_y = 2.0, Pr = 5.0$  に設定して行った simulation の結果を、図 2～4 に示す。図 2, 3 は空間の固定された 1 点での温度場の時系列に対するパワー・スペクトル密度 (PSD) を示す。 $Ra = 42000$  (あるいは、 $r = Ra/(Ra)_{\infty} = 24.6$ , ただし、 $(Ra)_{\infty} = 1708$ ) のとき運動は mono-periodic であるが、 $Ra = 50000$  ( $r = 29.3$ ) では 2 個の独立振動数成分  $p, s$  をもつ biperiodic となっている。さらに  $Ra$  を上昇させると  $Ra = 63000$  ( $r = 36.9$ ) では振動数比  $s/p = 3/7$  の位相同期状態となり、振動数  $p/7 = s/3 = f_L$  の周期振動となるが、これ以上の  $Ra$  では周期倍分岐 period-doubling bifurcations を起し運動は非周期状態に遷移していく。図 3 の PSD では  $Ra = 65000$  ( $r = 38.06$ ) のとき振動数成分  $f_L, f_L/2, f_L/4$  が現れている。したがってこの場合 simulation で現れた非周期運動は、少数自由度カオスとみなしうる。図 4 は局所温度場の時系列の Takens プロットより構成した相空間内軌道の Poincare 断面を示すが、それぞれ  $T^2$  トーラス ( $Ra = 60000$ )、位相同期 ( $Ra = 63000$ )、カオス ( $Ra = 65000$ ) に特徴的な構造を示している。GB の実験では位相同期状態は  $r = 45.2$  のとき振動数比  $s/p = 4/9$  で観測され、さらに  $Ra$  を増加すると PSD の雑音準位が増加して運動の非周期化が同定されているが、周期倍分岐のような明白なカオス化の分岐は見出されていない。

Sano & Sawada(SS) はアスペクト比  $\Gamma_x = 2.85 \sim 3.7, \Gamma_y = 1.5$  の直方体容器中の Prandtl 数  $Pr = 6$  の水を用いて、RB 対流の実験を行い、 $Ra$  の増加とともに運動が、biperiodic  $\rightarrow$  位相同期  $\rightarrow$  非周期的状態へと遷移することを観測した。一方、 $Pr = 5.5$  の水の場合には、 $\Gamma_x = 2.95, 3.0; \Gamma_y = 1.5$  の直方体容器中の対流で MBLN 系列が観測されているが、振動数比  $s/p$  は  $1/10$  から  $1/15$  まで連続的に変化し、途中で位相同期状態を経ている。

図5は  $\Gamma_x = 3.0, \Gamma_y = 1.5, Pr = 6$  の場合の simulation 結果を、空間1点における  $z$ -方向速度場の時系列によって示す。 $Ra$  の上昇とともに monoperiodic 状態に低振動数モードによる変調がかかり、この変調振動数が徐々に小さくなる (mode-softening) 過程の果てに非周期状態に遷移している。このような mode-softening による運動の非周期化は、RB 対流実験においても磁場をかけた水銀の系で Libchaber によって観測されているし、SS の実験系でも  $\Gamma_x < 2.85$  の場合に観測される可能性がある。また、少数自由度力学系の観点からは余次元-2分岐などで現れる双曲型不安定点に伴って現れることが期待されるが、それが対流のどのような運動モードが関与して引き起こされるのかは明らかでない。一方、筆者等が以前  $N_z = 16$  の立方差分格子を用いて同じパラメータ値で行った計算<sup>7)</sup>においては、biperiodic 状態が  $Ra$  の上昇とともに突然崩壊して非周期的運動が現れていたが、これは今回の  $N_z = 24$  の結果と比較すると格子が十分細密でないことによる数値的な乱雑化現象と考えられる。

図6, 7は  $\Gamma_x = 3.25, \Gamma_y = 1.5, Pr = 5.5$  の場合の simulation 結果を、局所温度場時系列の PSD と Takens プロットによる Poincare 断面によって示す。この場合、SS の  $Pr = 5.5$  の場合の実験結果と同様に第2独立振動数  $s$  は非常に低く  $Ra = 103500 (r = 60.6)$  では大略  $s/p \sim 1/15$  に緩い同期を引き起こしており、 $Ra = 104000 (r = 60.9)$  では図6の PSD でみる限り周期的にみえるが、図7の Poincare 断面でみると非周期的状態になっている。上記 SS の実験でも  $s/p \sim 1/10 \sim 1/15$  でカオス化は  $r = 59$  で起っているので、この点では計算は実験結果と同じ現象をとらえているように思われるが、詳細は不明である。

以上、MAC 法による RB 対流の simulation は計算格子をある程度細かくとれば、精密流体実験でその実在が検証された流体カオスを十分再現できると思われる。計算精度の検証や、振動モードの空間構造の解明は今後の課題である。

## 参考文献

- 1) e.g., P. Cvitanovic(ed), *Universality in Chaos*(Adam Hilger, 1983) (論文選集)
- 2) e.g., H. Yahata, Prog. Theor. Phys. Suppl. **79**(1984),26.

- 3) J. B. MacLauglin and S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **122**(1982),123.
- 4) J. H. Curry, J. R. Herring, J. Loncaric and S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **147**(1984), 1.
- 5) R. Kessler, J. Fluid Mech. **174**(1987), 357.
- 6) D. Mukutmoni and K. T. Yang, Trans. ASME J. Heat Transfer **115**(1993), 360; 367.
- 7) S. Nishikawa and H. Yahata, J. Phys. Soc. Jpn. **65**(1996), 935.
- 8) 森正武, FORTRAN77 数値計算プログラミング (岩波書店, 1988).
- 9) J. P. Gollub and S. U. Benson, J. Fluid Mech. **100**(1980), 449.
- 10) M. Sano and Y. Sawada, *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, ed. by T. Tatsumi(North-Holland, 1984), p. 167.



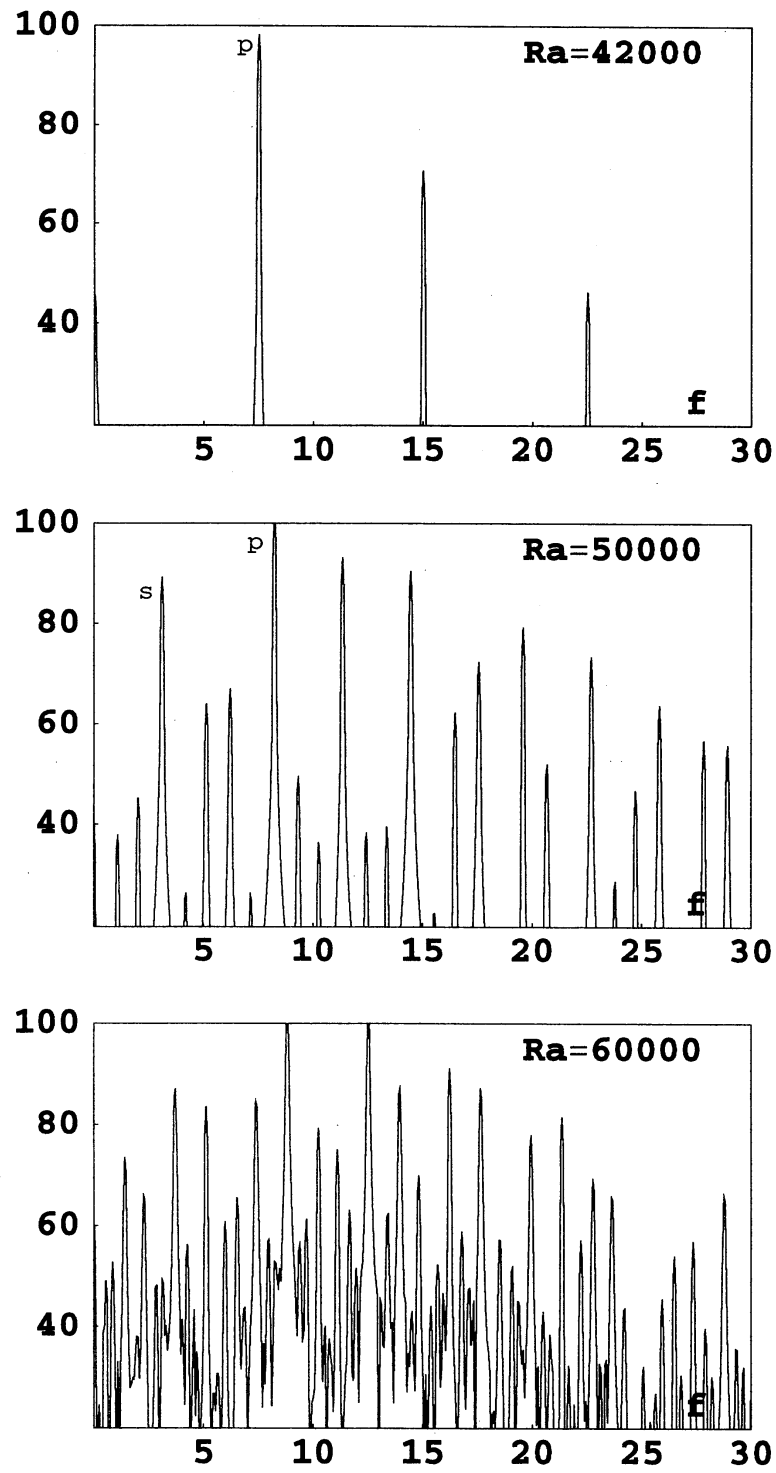


図 2: 局所温度場時系列のパワー・スペクトル密度  $P(f)$ ,  $\Gamma_x = 3.5, \Gamma_y = 2.0, Pr = 5.0$ ; 横軸は振動数  $f$   $[4\kappa/L_z^2]$ , 縦軸は  $10 \log_{10} P(f)$  をプロットしている。

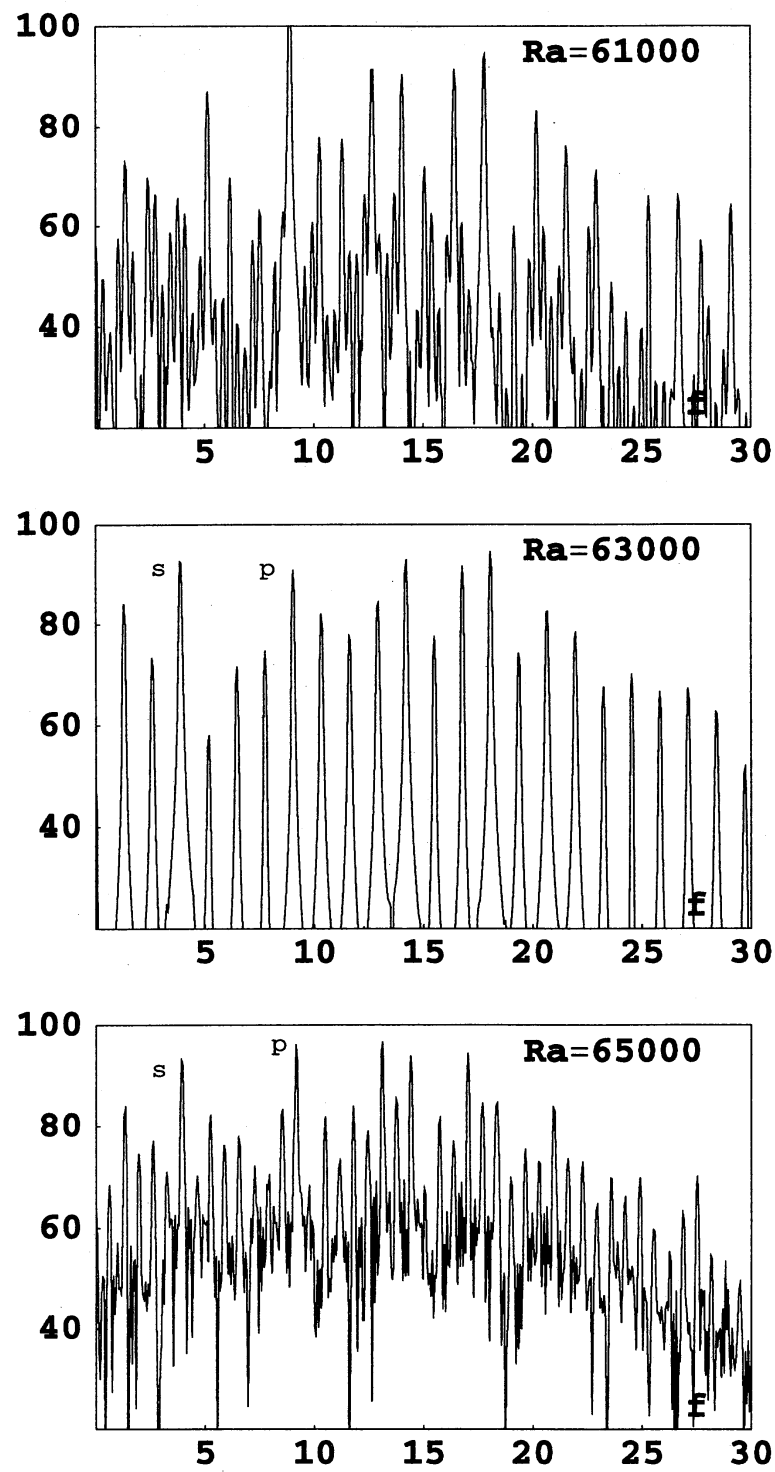


図 3: 局所温度場時系列のパワー・スペクトル密度  $P(f)$  (図 2 の続き),  $\Gamma_x = 3.5, \Gamma_y = 2.0, Pr = 5.0$

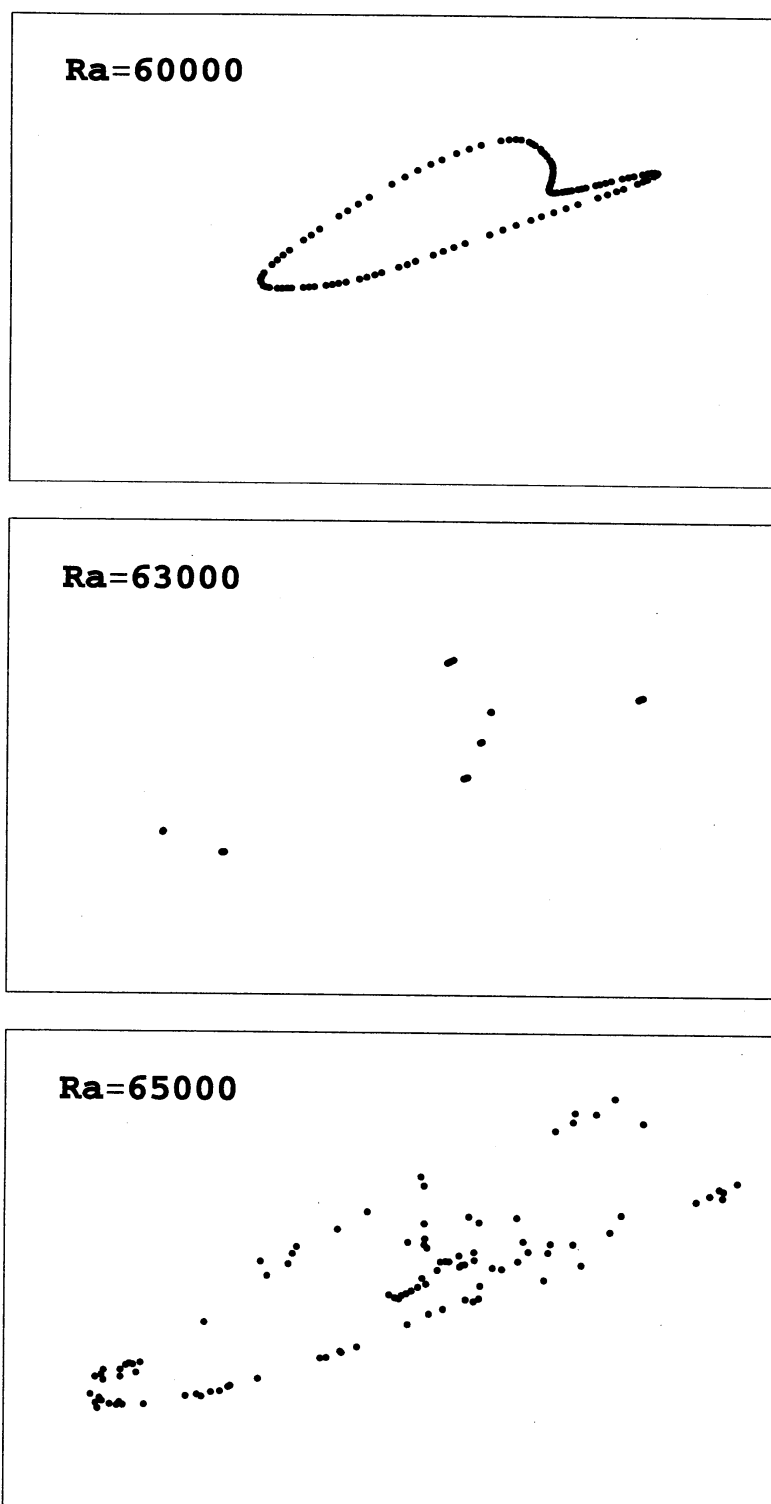


図 4: 局所温度場時系列の Takens-plot 相空間内軌道の Poincare 断面:  $\Gamma_x = 3.5, \Gamma_y = 2.0, Pr = 5.0$

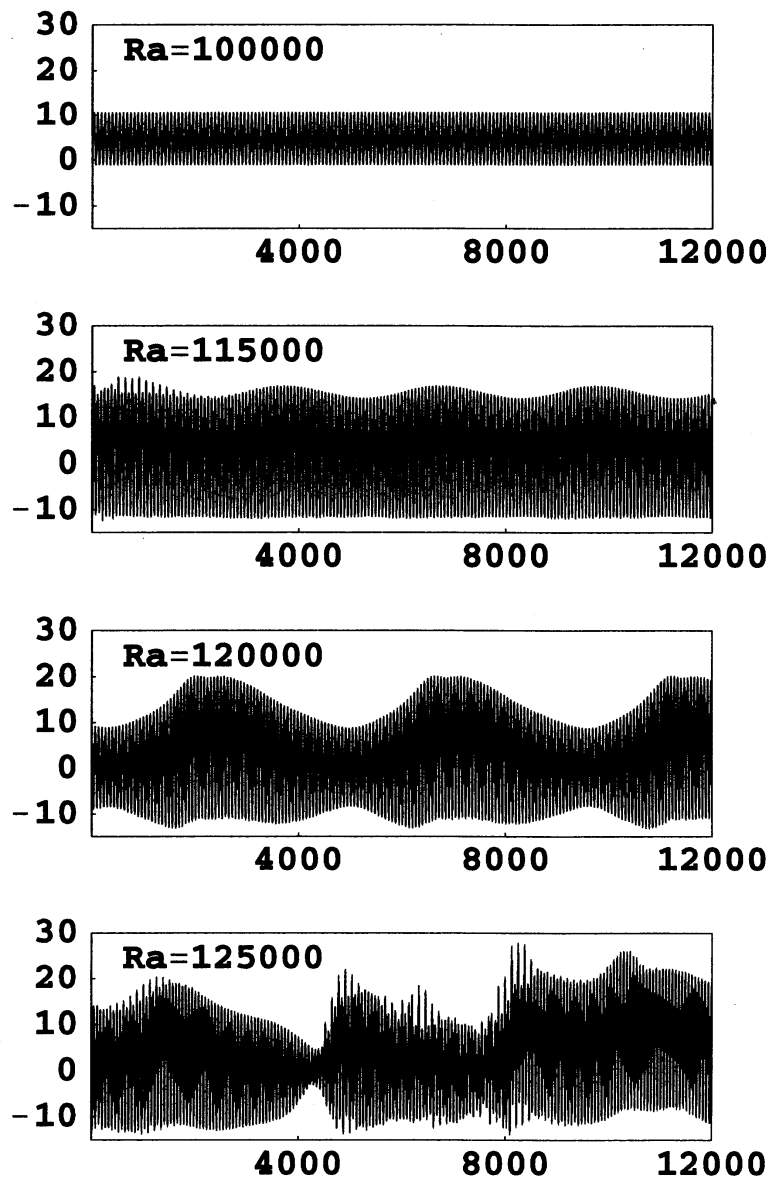


図 5: 局所速度場の時間変動:  $\Gamma_x = 3.0, \Gamma_y = 1.5, Pr = 6.0$ ; 横軸は時間  $[10\tau]$ , 縦軸は垂直速度  $u_z$ .

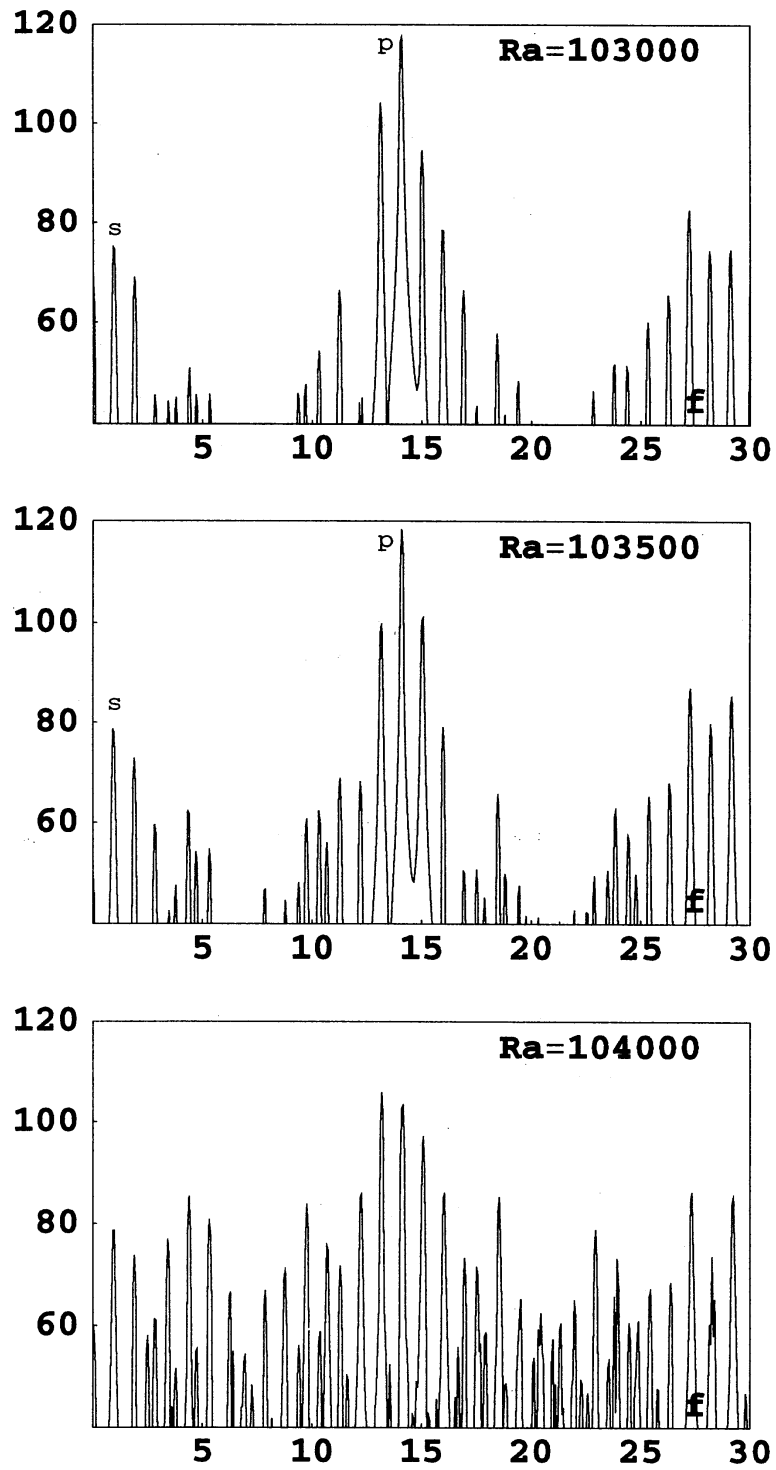


図 6: 局所温度場時系列のパワー・スペクトル密度  $P(f)$ :  $\Gamma_x = 3.25, \Gamma_y = 1.5, Pr = 5.5$ ; 横軸は振動数  $f$  [ $4\kappa/L_z^2$ ], 縦軸は  $10 \log_{10} P(f)$  をプロットしている。

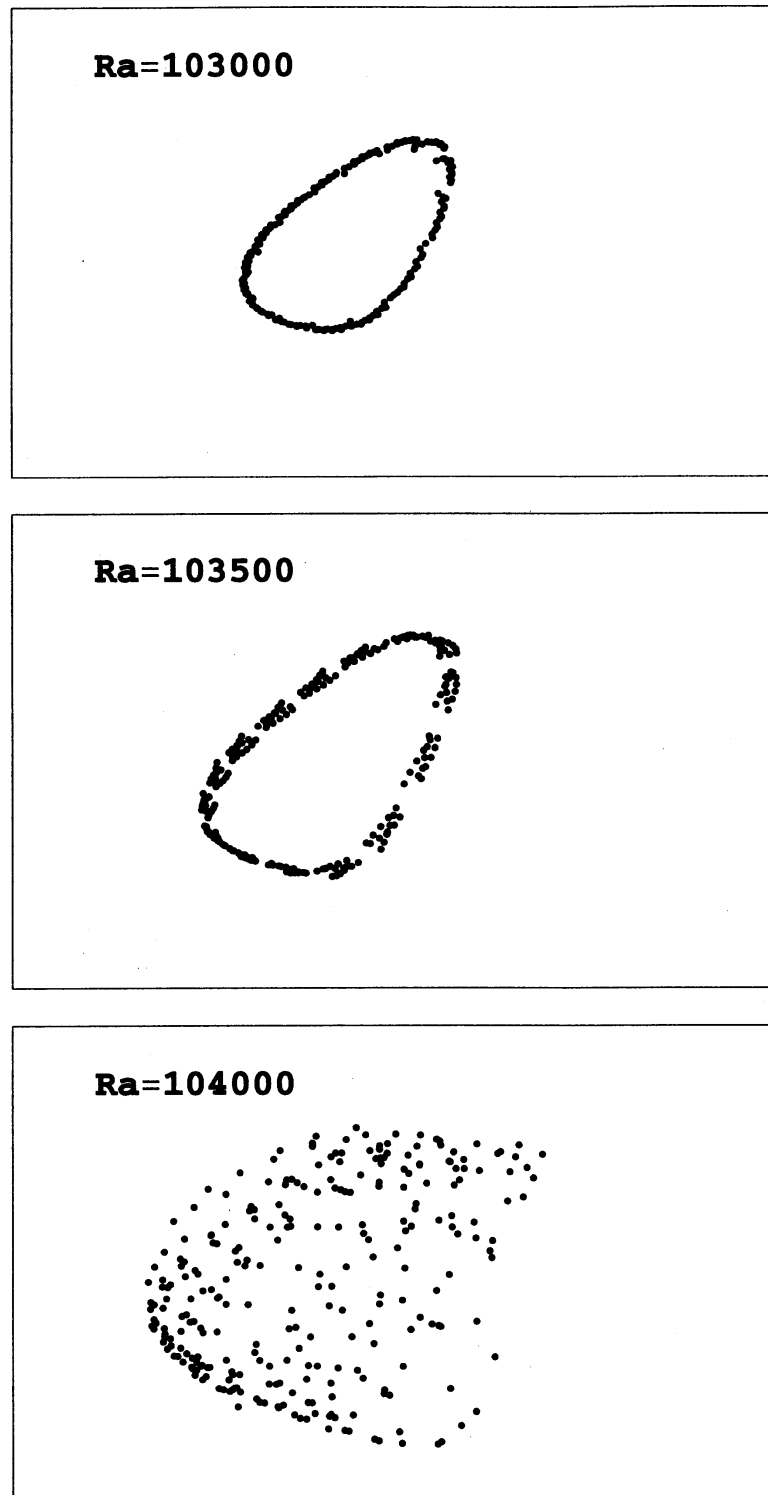


図 7: 局所温度場時系列の Takens-plot 相空間内軌道の Poincare 断面:  $\Gamma_x = 3.25, \Gamma_y = 1.5, Pr = 5.5$