

Pontryagin square と signature について.

東大 理 森田 茂之

§1. 結果

V は $\mathbb{Z}_2$ -vector space とし,

$$\mu: V \otimes V \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

は non-singular symmetric pairing とする.

関数 $\eta: V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は, 任意の $x, y \in V$ に対して,

$$\eta(x+y) = \eta(x) + \eta(y) + j, \mu(x \otimes y)$$

が成り立つ時, μ に関して quadratic であるという.

ここに $j: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は 自明でない 準同型.

この時, E. H. Brown [1] に従って,

我々は η の Arf-invariant $\sigma(V, \eta) \in \mathbb{Z}_8$ を次のように定義する.

$$\sigma(\eta) = \sum_{x \in V} i^{\eta(x)} \in \mathbb{C}$$

と置く。ここに $i^2 = -1$, $\delta > 0$ $\mathbb{Z}_+$ は $\{1, 2, \dots, -1, -2, \dots\}$ に自然に act するものと見る。この時

$$\alpha(\eta)^\delta = (\sqrt{2}^{\dim V})^\delta$$

が成り立つ。(Prop. 2-3. の証明参照)。

従って,

$$\alpha(\eta) = \sqrt{2}^{\dim V} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$$

となる $m \in \mathbb{Z}_\delta$ が存在する。そこで我々は $\sigma(V, \eta) = m$ と定義する。

さて、 M^{4n} を formal dimension $4n$ の 連続、向きづけられた Poincaré complex とする。この時、Pontryagin square

$$P_2 : H^{2n}(Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{4n}(M; \mathbb{Z}_+, \cong \mathbb{Z}_+)$$

は、cup 積に関して quadratic である。Art-invariant $\sigma(M, P_2) = \sigma(H^{2n}(M; \mathbb{Z}_2), P_2) \in \mathbb{Z}_\delta$ が定義できる。我々の結果は、

定理 1-1. M^{4n} を formal dimension $4n$ の 連続、向きづけられた Poincaré complex とする。この時、

$$\sigma(Y, P_2) = \text{signature } M \pmod{8}.$$

この定理は, E. H. Brown により予想されて
いた. ([1]).

系 1-2. M^{4n} は 同値であるとき,

$$\text{signature mod } 4 = P_2(V_{2n}(M)).$$

ここに, $V_{2n}(M)$ は M の $2n$ -th Wu class.

§2. Arf invariant に関する ucd の remarks.

次の Proposition は E. H. Brown による.

Prop. 2-1. (i) $\eta_i: V_i \rightarrow \mathbb{Z}_4$ ($i=1, 2$)

と $\mu_i: V_i \oplus V_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$ に関して quadratic 形式

とある. $\eta_1 \oplus \eta_2: V_1 \oplus V_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ と,

$(\eta_1 + \eta_2)(x_1, x_2) = \eta_1(x_1) + \eta_2(x_2)$ で定義すると,

$\eta_1 + \eta_2$ は $\mu_1 + \mu_2$ に関して quadratic である

$$\sigma(V_1 \oplus V_2, \eta_1 + \eta_2) = \sigma(V_1, \eta_1) + \sigma(V_2, \eta_2).$$

(ii) $L: V \rightarrow \mathbb{Z}_4$ が線型の時,

$$\alpha(L) = 2 \dim V \quad \text{if } L = 0$$

$$\alpha(L) = 0 \quad \text{if } L \neq 0$$

(iii) $\eta: U \rightarrow \mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ 上の unimodular
quadratic form の時, $\eta: U/2U \rightarrow \mathbb{Z}_4$

が定義で η quadratic であり、かつ

$$\sigma(U, 2U, \eta) = \text{signature } \eta \pmod{8}.$$

系 2-2. $V = A \oplus B$, $\dim A = \dim B$,

$\mu(A \oplus A) = 0$ とする. $\eta: V \rightarrow \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ により quadratic 関数で $\eta(A) = 0$ となることを示す. この時,

$$\sigma(V, \eta) = 0.$$

証) $A_b = \{a+b; a \in A\}$ ($b \in B$) とする.

A_b に $\mathbb{Z}_2$ -vector space の構造を次のように入れる.

$$(a_1+b) + (a_2+b) = a_1+a_2+b.$$

次の式で定義される関数 $\eta_b: A_b \rightarrow \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ とする.

$$\begin{aligned} \eta_b(a+b) &= \eta(a+b) - \eta(b) \\ &= j\mu(a \oplus b). \end{aligned}$$

すると, η_b は i により線型である. Prop. 2-1.

により, もし $b \neq 0$ ならば, $\alpha(\eta_b) = 0$. もし $b = 0$

ならば, $\alpha(\eta_0) = 2^{\dim A}$. 従って,

$$\begin{aligned} \alpha(\eta) &= \sum_{b \in B} \alpha(\eta|_{A_b}) \\ &= \sum_{b \in B} \alpha(\eta_b) \cdot i^{\dim A} \\ &= \alpha(\eta_0) \\ &= 2^{\dim A}. \end{aligned}$$

従って.

$$\sigma(V, \eta) = 0.$$

證.

さて. M^{2n} は向きづけられた Poincaré complex
とし. $\eta: H^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ は cup 積について.
quadratic 関数と見る. この時.

$$\text{Prop. 2-3. } \sigma(M, \eta) \equiv \eta(\sqrt{n}) \pmod{4}$$

ここに. $\sqrt{n}$ は M の n -th Wu class.

証) $H^n(M; \mathbb{Z}_2)$ を V と書く.

$$\eta + \eta: V \rightarrow \mathbb{Z}_4$$

を考える. $Vv = \{(u+v, u); u \in V\}$ とし, Vv

は $\mathbb{Z}_2$ -vector space の構造を,

$$(u_1+v, u_1) + (u_2+v, u_2) = (u_1+u_2+v, u_1+u_2)$$

で定める. $2\eta|_{Vv}: Vv \rightarrow \mathbb{Z}_4$ を考えると.

$$\begin{aligned} 2\eta(u+v, u) &= \eta(u+v) + \eta(u) \\ &= \eta(v) + 2\eta(u) + uv \\ &= \eta(v) + u^2 + uv. \end{aligned}$$

従って. $\eta_v: Vv \rightarrow \mathbb{Z}_4$ を,

$$\eta_v(u+v, u) = 2\eta(u+v, u) - \eta(v)$$

2η 定義すると. これは. $\mathbb{C}$ 上の線形. $u^2 + uv = 0$ for $\forall u \in V$, なる".

$V = V_n$. 従って

$$\begin{aligned}\alpha(2\eta) &= \sum_{u \in V} \alpha(2\eta|Vu) \\ &= \sum_{u \in V} \alpha(\eta u) \cdot i\eta(u) \\ &= \alpha(\eta V_n) \cdot i\eta(V_n) \\ &= 2^{\dim V} \cdot i\eta(V_n) \\ &= 2^{\dim V} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) i\eta(V_n)\end{aligned}$$

故に.

$$\begin{aligned}2\alpha(M, \eta) &= 2\sigma(V, \eta) \\ &= \sigma(V \oplus V, 2\eta) \\ &= i\eta(V_n)\end{aligned}$$

故に.

$$\sigma(M, \eta) \equiv \eta(V_n) \pmod{4} \quad \text{終.}$$

系 2-4. M^{2n} は 向きづけられた Poisson complex, n : odd である. $\eta: H^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ は cup 積 に関する quadratic 関数である. この時,

$$\sigma(M, \eta) = 0 \text{ 或 } 4.$$

証) $M: \text{odd } 2^n$ $M: \text{同型づけは存在する}$
 $V_n = 1$. 故に Prop 2-3 より

$$\sigma(M, \eta) \equiv \eta(V_n) \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{証.}$$

§ 3. Bockstein スペクトル系列.

M^{4n} は 同型づけは存在する Poincaré complex として,
 $\{E_r^*, d_r\}$, $\{E_r^*, d_r\}$ は (co) homology
 の Bockstein スペクトル系列 である. (係数: $\mathbb{Z}_2$).
 この時, Browder [2] により.

Prop. 3-1. i) $\{E_r^*, d_r\}$ と $\{E_r^*, d_r\}$
 は Kronecker index について互に dual.

$$\text{ii) } E_\infty^* = H^*(M)/\text{Tor} \oplus \mathbb{Z}_2, \\ E_\infty^* = H_*(M)/\text{Tor} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

また, M^{4n} は 同型づけは存在する,

$$E_1^{4n} = E_2^{4n} = \dots = E_\infty^{4n} = \mathbb{Z}_2,$$

$$E_1^{4n} = E_2^{4n} = \dots = E_\infty^{4n} = \mathbb{Z}_2.$$

$u_2 \in E_1^{4n} = \dots = E_\infty^{4n}$ は generator (基本類)
 である. この時.

Prop. 3-2. $\{E_r^*, dr\}$ と $\{E_*^r, dr\}$ により Poincaré duality が成り立つ:

(i) Cup 積 $\mu: E_r^a \otimes E_r^b \rightarrow E_r^{a+b}$ が定義される. Cap 積も同様.

(ii) $\cap \mu_2: E_r^k \rightarrow E_r^{4n-k}$ は任意の k, r により同型. $dr(x \cap \mu_2) = dr x \cap \mu_2$.

(iii) Cup 積 $\mu: E_r^k \otimes E_r^{4n-k} \rightarrow E_r^{4n} = \mathbb{Z}_2$ は non-singular.

証) (i) $r=1$ の時は明か. $r \leq m$ として $r = m+1$ の時を証明する.

$$\mu: E_{m+1}^a \otimes E_{m+1}^b \rightarrow E_{m+1}^{a+b}$$

を

$$\mu([x] \otimes [y]) = [\mu(x \otimes y)]$$

と定義する. ($x \in E_m^a, dm x = 0, y \in E_m^b, dm y = 0$)

$$\begin{aligned} dm(x \cdot y) &= dm x \cdot y + x \cdot dm y \\ &= 0 \end{aligned}$$

より, $dm x' \cdot y = dm(x' \cdot y)$ for $x' \in E_m^{a-1}$

である. μ は well-defined.

Cap 積に μ_2 の同様.

(ii) 明 $\exists$ ϕ に. $\cap \mu_2: E_1^k \xrightarrow{\phi} E_{4n-k}^1$.

$$\phi^*, \quad d^1(x \cap \mu_2) = d_1 x \cap \mu_2 + x \cap d^1 \mu_2 \\ = d_1 x \cap \mu_2.$$

と τ .

$$\cap \mu_2: E_r^k \xrightarrow{\tau} E_{4n-k}^r \quad \tau^* \\ d^r(x \cap \mu_2) = d_r x \cap \mu_2 \quad \text{for } \forall r \leq m \\ x \in E_r^k$$

と仮定可. この時,

$$\cap \mu_2: E_{m+1}^k \rightarrow E_{4n-k}^{m+1}$$

を次のように定義可.

$x \in E_m^k$ とし, $d_m x = 0$ と可. このとき.

$[x] \in E_{m+1}^k$, $d^m(x \cap \mu_2) = d_m x \cap \mu_2 = 0$. 故に.

$$[x \cap \mu_2] \in E_{4n-k}^{m+1}.$$

よって.

$$[x] \cap \mu_2 = [x \cap \mu_2]$$

と定義可. (40) well-defined である事は ϕ に

より可.

(a) $\cap \mu_2$: 全射.

$[y] \in E_{4n-k}^{m+1}$, $y \in E_{4n-k}^m$, $d^m y = 0$ と可.

この時. $\exists x \in E_m^k$ such that,

$$x \cap \mu_2 = y.$$

従って,

$$\begin{aligned} 0 &= d^m y \\ &= d^m (x \cap \mu_2) \\ &= d^m x \cap \mu_2. \end{aligned}$$

故に.

$$[x] \cap \mu_2 = [y]$$

(b) $\cap \mu_2$: 単射.

$$[x] \cap \mu_2 = 0 \quad \text{と} \quad \exists x. \quad \exists x \text{ と.}$$

$$x \cap \mu_2 = d^m y \quad \text{for some } y \in E_{4n-k-1}^m.$$

$$x' \in E_m^{k+1} \quad \text{と}$$

$$x' \cap \mu_2 = y$$

と $\exists x'$ と $\exists x$. $\exists x$ と,

$$\begin{aligned} d^m x' \cap \mu_2 &= d^m (x' \cap \mu_2) \\ &= d^m y. \end{aligned}$$

故に.

$$d^m x' \cap \mu_2 = x \cap \mu_2$$

$$x = d^m x'$$

$$[x] = 0.$$

$$(c) \quad d^{m+1}([x] \cap \mu_2) = d^{m+1}[x] \cap \mu_2.$$

とせよ.

$$\begin{aligned} d^{m+1}([x] \cap \mu_2) &= d^{m+1}[x] \cap \mu_2 + [x] \cap d^{m+1}\mu_2 \\ &= d^{m+1}[x] \cap \mu_2. \end{aligned}$$

$$(iii) \quad x \in E_r^k, \quad y \in E_r^{4n-k} \in L, \\ x \cdot y = 0 \quad \text{for} \quad \forall x \in L.$$

この時,

$$\langle xy, \mu_2 \rangle = 0$$

$$\langle x, y \cap \mu_2 \rangle = 0$$

$$\therefore y = 0.$$

終

§4. 定理 1-1 と 系 1-2 の 証明.

$$\{E_r^*, dr\}, \{E_r^*, dr\} \in H^*(M) \text{ と } H^*(M)$$

の mod 2 Bockstein スペクトル系列とある. ことに

M^{4n} は 向きづけられた Poincaré complex.

我々は 次の命題を r に関する induction で

証明する.

(Q_r) $P_2^{(r)} : E_r^{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ を次の
 定義で置く. Cup 積 $\mu : E_r^{2n} \otimes E_r^{2n} \rightarrow E_r^{4n} = \mathbb{Z}_2$
 によって quadratic であり.

$$\sigma(E_r^{2n}, P_2^{(r)}) = \sigma(E_{r-1}^{2n}, P_2^{(r-1)}).$$

$r=1$ の時, (Q₁) は明らかであり,

$$\sigma(E_1^{2n}, P_2) = \sigma(M, P_2).$$

さて, (Q_r) がすべての $r \leq m$ によって成り立つ
 と仮定する. この時,

$$P_2^{(m+1)} : E_{m+1}^{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_4$$

を次のように定義する. $[x] \in E_{m+1}^{2n}$, $x \in E_m^{2n}$,
 $dmx = 0$ かつ,

$$P_2^{(m+1)}[x] = P_2^{(m)}(x).$$

$P_2^{(m+1)}$ が well-defined であることを示す.

$$P_2^{(m+1)}(\lim dm) = 0$$

を証明する. 以下の通り.

$$\begin{aligned} P_2^{(m)}(x + dmy) &= P_2^{(m)}(x) + P_2^{(m)}(dmy) + j(x \cdot dmy) \\ &= P_2^{(m)}(x) + P_2^{(m)}(dmy) + jdm(x \cdot y) \\ &= P_2^{(m)}(x) + P_2^{(m)}(dmy). \end{aligned}$$

ここに, $x \in E_m^{2n}$, $dmx = 0$, $y \in E_m^{2n-1}$.

Let $dm x \in E_m^{2n}$, $x \in E_m^{2n-1}$ とせよ.

すなわち, x が integral cochain u で $\delta u = 2^m dx$ となる時:

$$\delta u = 2^m \cdot a \quad \text{for some } a$$

であり, $dm x$ は $\frac{1}{2^m} \cdot \delta u = a$ で表わされる.

$[a] \in H^{2n}(M; \mathbb{Z})$. 312

$$P_2^{(m)}(dm x) = P_2[a].$$

と示す. 明らかに $2^m [a] = 0$, 故に

$[a]^2$ は $H^{4n}(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の torsion element.

故に,

$$[a]^2 = 0.$$

$$P_2[a] = [a]^2 \pmod{4}$$

$$= 0.$$

明らかに, $P_2^{(m+1)}$ は Cup 積 $\Rightarrow$ n^2 quadratic である.

次に 我々は, $\sigma(E_{m+1}^{2n}, P_2^{(m+1)}) = \sigma(E_m^{2n}, P_2^{(m)})$

を示す. $[x_1], [x_2], \dots, [x_p] \in E_{m+1}^{2n}$ の

basis とし,

$V = \langle x_1, \dots, x_p \rangle$ は E_m^{2n} の

subvector space. $\begin{cases} x_i \in E_m^{2n}, \\ dm x_i = 0 \end{cases}$

$$\bar{V} = \{y \in E_m^{2n} ; x \cdot y = 0 \text{ for } \forall x \in V\}$$

とある。この時。

$$\text{Lemma. 4-1. } E_m^{2n} = V \oplus \bar{V}.$$

証) ① $x \in V \cap \bar{V}$ とする。 $x \in V$ より $dm x = 0$, $[x] \in E_{m+1}^{2n}$. $[y] \in E_{m+1}^{2n}$ ②
任意の元とすると。この時 $y \in V$ として、

$$\begin{aligned} [x] \cdot [y] &= [x \cdot y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

故に, $[x] = 0$. ①より $V \cap \text{im } dm = \{0\}$ である。
②より, $x = 0$. ②より。

ある。次に比較して Lemma ②を得る。

②。

$$\sigma(E_m^{2n}, P_2^{(m)}) = \sigma(V, P_2^{(m)}|V) + \sigma(\bar{V}, P_2^{(m)}|\bar{V})$$

である。明らかに、

$$\sigma(V, P_2^{(m)}|V) = \sigma(E_{m+1}^{2n}, P_2^{-(m+1)})$$

である。我々には、

$$\sigma(\bar{V}, P_2^{(m)}|\bar{V}) = 0$$

を証明しなくてはならない。そのためには $\bar{V}$;

sub vector space $A \subset \bar{V}$ である。

$$(i) \quad P_2^{(m)}(A) = 0$$

$$(ii) \quad A \text{ 上 Cup 積は zero.}$$

$$(iii) \quad \dim A = \frac{1}{2} \dim \bar{V}$$

なることが見なければならぬ。(Cor. 2-2. 参照).

さて、我々は、

$$\operatorname{im}(dm: E_m^{2^{n-1}} \rightarrow E_m^{2^n}) \subset \bar{V}$$

から、上の三つの条件をみたす事を示す。

(i) は $P_2^{(m+1)}$ の well-definedness の証明より明かである。

$$(ii) \quad dm x, dm y \in \operatorname{im}(dm: E_m^{2^{n-1}} \rightarrow E_m^{2^n})$$

とすると、

$$\begin{aligned} dm x \cdot dm y &= dm(x \cdot dm y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) も同様である。

$$\begin{aligned} \text{Lemma. 4-2.} \quad \dim E_m^{2^n} &= \dim \ker(dm: E_m^{2^n} \rightarrow E_m^{2^{n+1}}) \\ &\quad + \dim \operatorname{im}(dm: E_m^{2^{n-1}} \rightarrow E_m^{2^n}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{証) (I) } \dim E_m^{2^n} &= \dim \ker(dm: E_m^{2^n} \rightarrow E_m^{2^{n+1}}) \\ &\quad + \dim \operatorname{im}(dm: E_m^{2^n} \rightarrow E_m^{2^{n+1}}). \end{aligned}$$

さて、我々は次の事を証明する：

$$(\operatorname{im}(d_m: E_m^{2n} \rightarrow E_m^{2n+1}))^\perp = \ker(d_m: E_{2n+1}^m \rightarrow E_{2n}^m).$$

実際, $\alpha \in (\operatorname{im}(d_m: E_m^{2n} \rightarrow E_m^{2n+1}))^\perp$, $\exists \beta \neq 0$.

$$\langle d_m x, \alpha \rangle = 0 \quad \text{for } \forall x \in E_m^{2n}.$$

故に,

$$\langle x, d^m \alpha \rangle = 0$$

$$\therefore d^m \alpha = 0$$

$$\alpha \in \ker(d_m: E_{2n+1}^m \rightarrow E_{2n}^m).$$

逆に, $d^m \alpha = 0$ とせよ. $\exists \beta \neq 0$.

$$\langle d_m x, \alpha \rangle = \langle x, d^m \alpha \rangle = 0 \quad \text{for } \forall x.$$

$$\therefore \alpha \in (\operatorname{im}(d_m: E_m^{2n} \rightarrow E_m^{2n+1}))^\perp.$$

従って,

$$\begin{aligned} (2) \quad \dim \operatorname{im}(d_m: E_m^{2n} \rightarrow E_m^{2n+1}) \\ = \dim E_{2n+1}^m - \dim \ker(d_m: E_{2n+1}^m \rightarrow E_{2n}^m). \end{aligned}$$

次に, 下の可換図式を示す.

$$\begin{array}{ccc} E_{2n+1}^m & \xrightarrow{d^m} & E_{2n}^m \\ \uparrow \mu_2 & & \uparrow \mu_2 \\ E_m^{2n+1} & \xrightarrow{d_m} & E_m^{2n} \end{array}$$

よりわかる。

$$(3) \quad \dim E_{2n+1}^m - \dim \ker(d^m: E_{2n+1}^m \rightarrow E_{2n}^m) \\ = \dim \operatorname{im}(d^m: E_{2n+1}^m \rightarrow E_{2n}^m)$$

を得る。(1), (2), (3) より Lemma. を得る。
~~証明~~

(iii) の証明。

$$\dim \bar{V} = \dim E_m^{2n} - \dim E_{m+1}^{2n} \\ = \dim \ker d_m + \dim \operatorname{im} d_m - \\ (\dim \ker d_m - \dim \operatorname{im} d_m) \\ = 2 \dim \operatorname{im}(d_m: E_m^{2n-1} \rightarrow E_m^{2n})$$

より、わかる。

$$\sigma(E_{m+1}^{2n}, P_2^{(m+1)}) = \sigma(E_m^{2n}, P_2^{(m)})$$

を得る。従って、

$$\sigma(M, P_2) = \sigma(E_1^{2n}, P_2^{(1)}) \\ = \sigma(E_\infty^{2n}, P_2^{(\infty)}) \\ = \text{signature } M \bmod 8.$$

これで定理 1-1 の証明を終える。

系 1-2 の 証.)

Prop. 2-3. により.

$$\sigma(M, P_2) \equiv P_2(\sigma_2 n) \pmod{4}$$

故に,

$$\text{signature } M \equiv P_2(\sigma_2 n) \pmod{4}$$

終.

文献

[1] E. H. Brown, Jr. Lecture Note
of Summer Institute on Algebraic
Topology, Wisconsin, 1970.

[2] W. Browder, Torsion in
H-spaces, Ann. of Math.
74 (1961), 24 ~ 51.

University of Tokyo