

(0-1)変数計画問題に対する
ブール代数的解法

京都大学 工学部

三 根 久

陸上自衛隊 業務学校

成 久 洋 之

§ 1. はじめに

最近、整数計画法というものが盛んに論議されているが、その中において、特に(0-1)変数計画問題解法アルゴリズムは重視されている。それは実際問題として、この種の計画問題が可成り多いことおよび全ての整数値が2進数で表現しうることに基づいていることである。本文において、著者はブール代数的解法アルゴリズムについて記述する。元来、この種のアルゴリズムは R. Fortet⁽¹⁾ と R. Camion⁽²⁾ により与えられており、P. L. Ivănescu⁽³⁾ は Fortet の考えに基づいて擬似ブール計画法なるものを提案している。さらに、稲垣・福村⁽⁴⁾ は素仲式をその場合の擬似ブール計画法なるものに発展させている。著者^{(5),(6)} は、Ivănescu や稲垣らの方法とは異なった方法で、しかもより積極的にブール代数を利用した手法について述べるものである。

§ 2. 問題の記述

(0-1)変数計画問題は一般につぎのように表わされる

$$(1) \quad \begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &\geq b_1, \\ g_2(x_1, \dots, x_n) &\geq b_2, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &\geq b_m, \end{aligned}$$

$$(2) \quad x_j = 0 \text{ or } 1 \quad (j=1, \dots, n)$$

となる条件のもとで

$$(3) \quad \min (\text{or } \max) \quad f(x_1, \dots, x_n)$$

となるような $(x_1, \dots, x_n)$ を求めよ。

(1)および(2)を満足するような $(x_1, \dots, x_n)$ を実行可能点と呼び、このような実行可能点の集合を実行可能可能領域と呼んで F で表わす。さらに、 F に属するものの中で (3) を満足するものを最適点という。

ここで、もし(1)および(2)を満足すれば1であり、そうでないときには0となるような関数系 $(x_1, \dots, x_n)$ を考えよう。

これはいわゆる特性関数であり、さらに、後述するようにブール関数でもある。すると、関数系 $(x_1, \dots, x_n)$ を用いることにより (1), (2), (3) の問題はつぎのように書き表わすことが出来る。

$$(4) \quad \pi(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

$$(2) \quad x_j = 0 \text{ or } 1 \quad (j = 1, \dots, n),$$

とある条件のもとで

$$(5) \quad \min f(x_1, \dots, x_n)$$

とあるような $f(x_1, \dots, x_n)$ を求めよ。

§3. 諸定義および諸定理

$G_2 = \{0, 1\}$ とし, G_2 の n 個の直積を G_2^n とする。 G_2^n から G_2 への写像 M_1 はブール関数といわれ, G_2^n から実数体 R への写像 M_2 は擬似ブール関数といわれる。以下本節において, 本アルゴリズム記述に必要なブール代数の諸特性について記述する。

全てのブール関数は最小項展開形式で表わせることが知られている。

$$\text{定理1; } M_1(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} M_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

ただし, $\bigcup$ は $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in G_2^n$ の全ての可能な値の論理和を示し, x_j ($j = 1, \dots, n$) は0か1のみをとる。また, $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$ とする。

$M_1(x_1, \dots, x_n)$ と同様に全ての $M_2(x_1, \dots, x_n)$ もつぎのようには表われることが知られている。

$$\text{定理2; } M_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

ただし, $\sum$ は $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in G_2^n$ の全ての可能な値についての算術

和を示し, $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = M_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ とする。

ブール関数 $M_1(x_1, \dots, x_n)$ は最小項形式展開が可能であるが, ブール代数により簡略化することによりつぎのように表わされる。

$$\text{定理 3; } M_1(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{k \in K} (x_1^{\alpha_{1k}} \dots x_n^{\alpha_{nk}})_k, \\ (x_1^{\alpha_{1k}}, \dots, x_n^{\alpha_{nk}}) \in G_2^n,$$

ただし, K は添字集合であり, $\alpha_{jk} = \{0, 1, \nu\}$ である。この場合, ν は 0 と 1 のどちらの値でもよいもので不確定要素である。

上の定理における ν は不確定要素を表わすものであり, α_{jk} が 0 をとる場合にはその変数 x_{jk} は論理項 k の中には現われないものである。たとえば, つぎの 3 変数からなるブール関数を考えると,

$$M_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cup x_2 \bar{x}_3 = x_1^1 x_2^{\nu} x_3^{\nu} \cup x_1^{\nu} x_2^1 x_3^0,$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1, \alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{12} = \nu, \alpha_{32} = 0$$

となる。

類似ブール関数 $M_2(x_1, \dots, x_n)$ についてつぎの定理をうる。

$$\text{定理 4; } M_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h \in H} c_h (x_1^{\alpha_{1h}} \dots x_n^{\alpha_{nh}})_h,$$

ただし, $c_h \neq 0$, h は積項に付いた添字であり, H は h の集合を示す。この場合, α_{jh} ($h \in H$), $j \in \{1, \dots, n\} = N$ は 0, 1, ν をとるものとする。

一般に擬似ゴール関数は定理4でのべた形式で表現されるような非線形関数であるが、変数 $x_j (j \in N)$ は $\mathcal{G}_2$ の要素であるから定理4における展開積項の値は0か1である。したがって、その積項に関してつぎの線形化定理をうる。

定理5; 全ての擬似ゴール関数は線形関数に変換できる。

証明; $M_2(x_1, \dots, x_n)$ は定理4の通りに展開できる。さらに、全ての変数 $x_j, j \in N$ の値は、 $x_j \in \mathcal{G}_2$ であるから、0か1である。したがって、

$$(6) \quad y_h = (x_1^{\alpha_{1h}} \cdots x_n^{\alpha_{nh}})h, \quad h \in H$$

となる変数 y_h を定義するならば、 $M_2(x_1, \dots, x_n)$ はつぎのようになる $y_h (h \in H)$ の関数として表わせる。

$$(7) \quad M_2(x_1, \dots, x_n) = M_2(y_h) = \sum_{h \in H} c_h y_h, \quad y_h \in \mathcal{G}_2, h \in H.$$

ただし、

$$(8) \quad \begin{aligned} y_h &= 1 & \text{if } x_j^{\alpha_{jh}} &= 1 \quad \text{for all } j \in N, \\ y_h &= 0 & \text{if } x_j^{\alpha_{jh}} &= 0 \quad \text{for at least one } j \in N. \end{aligned}$$

したがって、 $\checkmark$ 線形擬似ゴール関数に変換されたことになる。

§4. 擬似ゴール条件式よりゴール条件式への変換

擬似ゴール関数 $M_2(x_1, \dots, x_n)$ がつぎのよう T 形で表わされる擬似ゴール条件式について考えよう。

$$(9) \quad M_2(x_1, \dots, x_n) \geq b,$$

線形化定理5を用いると類似ゴール条件式(9)は

$$(10) \quad \sum_{h \in H} c_h y_h \geq b,$$

となる。ただし、 y_h はつぎのとおり。

$$(11) \quad y_h = (x_1^{\alpha_1 h} \cdots x_n^{\alpha_n h})_h, \quad y_h \in G_2, \quad h \in H.$$

そこで、 $H_p = \{h \mid c_h > 0\}$, $H_n = \{h \mid c_h < 0\}$ とすると、

(10)はつぎのように表わせる。

$$(12) \quad \sum_{h \in H_p} c_h y_h + \sum_{h \in H_n} c_h y_h \geq b.$$

$y_h = 1 - \bar{y}_h$, $h \in H$ であるから、

$$(13) \quad y_h = y_h \quad (h \in H_p), \quad y_h = 1 - \bar{y}_h \quad (h \in H_n)$$

とすると(12)はつぎのようになります。

$$(14) \quad \sum_{h \in H_p} c_h y_h + \sum_{h \in H_n} c_h (1 - \bar{y}_h) \geq b.$$

すなわち、

$$(15) \quad \sum_{h \in H_p} c_h y_h - \sum_{h \in H_n} c_h \bar{y}_h \geq b - \sum_{h \in H_n} c_h$$

となる。(15)の左辺に現れる係数は正であるから、つぎの5つの変数変換を施すと、(10)は(17)のようになり表わせる。

$$(16) \quad \begin{cases} d_h = c_h \quad (h \in H_p), \quad d_h = -c_h \quad (h \in H_n) \\ w_h = y_h \quad (h \in H_p), \quad w_h = -\bar{y}_h \quad (h \in H_n), \quad s = b - \sum_{h \in H_n} c_h. \end{cases}$$

$$(17) \quad \sum_{h \in H} d_h w_h \geq s, \quad d_h > 0, \quad h \in H.$$

さらに、便宜上つぎの関係が成立するように添字 $h \in H$ を付け替える。

$$(18) \quad d_h \geq d_{h+1}, \quad h \in H.$$

(17) を満足するような w_k , $k \in H$ を求めることは

$$(19) \quad \sum_{k \in H'} d_k \geq S, \quad H' \subseteq H$$

となる H' を求めることに等しい。ところが, $d_k > 0$ であるので (17) をブール条件式に変換した場合, その論理関数は単調論理関数となり, 単調増加論理関数は正変数のみの展開論理項の論理和で表現できる。すなわち,

$$(20) \quad \varphi(w_1, \dots, w_k, \dots, w_l) = \bigcup_{t \in H'} (\bigcap_{k \in H'} w_k)_t$$

いま (17) をブール条件式

$$(21) \quad \varphi(w_1, \dots, w_k, \dots, w_l) = 1, \quad \text{Card.}(H) = l$$

に変換した場合, φ の 1 つの展開論理項を 1 とするような w_k の組は 1 であり, $H' = \{k \mid w_k = 1\}$ とすると, (17) の実行可能解は $w_k = 1 (k \in H'), w_k = 0 (k \notin H')$ となる。

H' の集合 $\{H'\}$ に添字をつけ, その添字集合を $F(H')$ とすると

$$(20') \quad \varphi(w_1, \dots, w_k, \dots, w_l) = \bigcup_{t \in F(H')} (\bigcap_{k \in H'} w_k)_t$$

となる。(20') が最簡略化された表現であるとするとき, (19) を満足する最小個数の要素からなる H' のみと求めればよい。したがって, べきの条件式が成立するよう H' を求めればよい。

$$(22) \quad \sum_{k \in H'' \subseteq H'} d_k < S$$

§5. アルゴリズムの基本的考え方

(4) のブール関数 $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ は最小項展開形式で表現し

れ、各展開論理項は与えられた値を1とすることにより与えられた問題の実行可能解に対応している。したがって、問題は与えられたブール関数の展開論理項の中から最適解に対応する論理項を如何にして探索するかということになる。このため、展開論理項の中から適当な方法で最適解と等しい論理項を除去することを行い、最終的に最適解に対応するもののみを残すようにしようとするものである。一般に、展開論理項数が少なければ少ない程、上述の最適解に対応する論理項の選別が容易になる。したがって、ブール関数の展開論理項数を減少させるため、最小に与えられた条件式に加えて、さらにつぎの条件式を加える。

$$(23) \quad f(x_1, \dots, x_n) < f(z'_1, \dots, z'_n),$$

ただし、 $(z'_1, \dots, z'_n) \in F$.

(23)に対応するブール条件式として、つぎのものを得たとする。

$$(24) \quad \Phi_{b_1}(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

すると、全ブール条件式として、(25)を得る。

$$(25) \quad \Phi(x_1, \dots, x_n) \wedge \Phi_{b_1}(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

すると、新しい問題として、(25)を満足するもののうち(5)を満足するもの $(x_1, \dots, x_n)$ を求めようを考えるべき。

この場合、(23)より目標関数の値は必ず $f(z'_1, \dots, z'_n)$ より小さくなる。しかも、このときにも、(25)のブール関数の展

論理項は決らず、(4)のそれよりその項数は小さくしてやる。つぎに(25)を最小項展開し、その展開論理項の中より目標関数値を出せるだけ小さくするような実行可能解を選び、それを $(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_n^2)$ とし不等式(26)を生成する。

$$(26) \quad f(x_1, \dots, x_n) < f(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_n^2)$$

ただし、この場合(27)が成立している。

$$(27) \quad f(\bar{x}_1^1, \dots, \bar{x}_n^1) > f(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_n^2)$$

(26)に対応するブール条件式(28)を生成する。

$$(28) \quad \Phi_{b_2}(x_1, \dots, x_n) = 1$$

Φ_{b_2} と $\Phi \cap \Phi_{b_1}$ との論理積をとり、新しいブール条件式を生成する。このように繰返す操作により、漸次実行可能解の数を減らしていき、 s -段階において、不等式(29)を得たとする。さらに、(29)に対応するブール条件式(30)を得る。

$$(29) \quad f(x_1, \dots, x_n) < f(\bar{x}_1^s, \dots, \bar{x}_n^s)$$

$$(30) \quad \Phi_{b_s}(x_1, \dots, x_n) = 1$$

Φ_{b_s} と $\Phi \cap \bigcap_{k=1}^{s-1} \Phi_{b_k}$ との論理積をとることににより新しいブール条件式を生成する。この場合、

$$(31) \quad \Phi(x_1, \dots, x_n) \cap \bigcap_{k=1}^s \Phi_{b_k}(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$$

となれば、(29)を満足するような実行可能解は存在しないわけであり、(29)の代わりに(32)を考へる。

$$(32) \quad f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1^s, \dots, \bar{x}_n^s)$$

(32)に対応するブール条件式を(33)で表わし、新しいブール条件式(34)をうる。この(34)の展開論理式は全て最通解に対応する。

$$(33) \quad \bar{x}_{bs}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

$$(34) \quad \bar{x}(x_1, \dots, x_n) \cap \bigcap_{k=1}^{s-1} \bar{x}_{bk}(x_1, \dots, x_n) \cap \bar{x}_{bs}(x_1, \dots, x_n) = 1$$

(31)が成立した場合には、さらに次の段階の操作を繰返すことにやり、成らぬおれこの段階で(31)式が成立する。このことより最通解も有限回の繰返して得られることがわかる。

つぎに、目標関数の上限値 $\bar{f}(z_1, \dots, z_n) \in F$ を得る方法についてのべよう。定理3より、

$$(35) \quad \bar{x}(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{k \in K} (x_1^{\alpha_{1k}} \dots x_n^{\alpha_{nk}})_k.$$

任意の k について、その展開論理項の値を1とすることにし、変数 x_j ($j \in N$) の値は

$$(36) \quad x_j = \alpha_{jk}, \quad j \in N, \quad \forall k \in K$$

となる。ここで、 $\alpha_{jk} = v$ とする x の数 $N(v)$ とすると、おれに対応する展開論理項に対応する実行可能解の数は $2^{N(v)}$ 個存在する。 $f(z_1, \dots, z_n)$ を決定するためには $x_j = v$ の値について、 $v = 0$ かあるかは $v = 1$ と決定してゆればなる。定理4より $f(x_1, \dots, x_n)$ はつぎのように展開される。

$$(37) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h \in H} c_h (x_1^{\alpha_{1h}} \dots x_n^{\alpha_{nh}})_h$$

いま、上に定めた k に対して、 v の集合を定義する。

$$J_d = \{j \mid \alpha_{jk} \neq v\}, \quad J_u = \{j \mid \alpha_{jk} = v\}$$

すると, $f(x_1, \dots, x_n)$ は $x_j (j \in \text{Jud})$ の関数としてつぎのよう
に表わせる。

$$(38) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h' \in H'} c_{h'} \left(\prod_{j \in \text{Jud}} x_j^{\alpha_{jh'}} \right)_{h'}.$$

$$\begin{cases} x_j = \alpha_{jk} (j \in \text{Id}) \\ x_j = x_j (j \in \text{Jud}) \end{cases}$$

そこで, 集合 $\text{Jud}_n, \text{Jud}_p$ をつぎのようには定義する。

$$\text{Jud}_n = \{j \mid \left(\prod_{j \in \text{Jud} \subseteq \text{Jud}_n} x_j^{\alpha_{jh'}} \right)_{h'}, c_{h'} < 0, h' \in H'\},$$

$$\text{Jud}_p = \{j \mid \left(\prod_{j \in \text{Jud} \subseteq \text{Jud}_p} x_j^{\alpha_{jh'}} \right)_{h'}, c_{h'} > 0, h' \in H'\},$$

すなわち, h', H' は h, H と同じように定義されてい
る。その結果, $\alpha_{jk} (j \in \text{Jud}, k \in K)$ はつぎのよう
に決定される。

$$(i) \quad \text{Jud}_n \cap \text{Jud}_p = \emptyset \quad \text{ならば},$$

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} &= 0 & (j \in \text{Jud}_p), \\ \alpha_{jk} &= 1 & (j \in \text{Jud}_n). \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \text{Jud}_n \cap \text{Jud}_p \neq \emptyset, \quad \text{Jud}_n \oplus \text{Jud}_p = \emptyset \quad \text{ならば},$$

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} &= 1 & (j \in \text{Jn} \subseteq \text{Jud}), \\ \alpha_{jk} &= 0 & (j \notin \text{Jn}), \end{aligned}$$

すなわち,

$$\text{Jn} = \{j \mid \left(\prod_{j \in \text{Jud} \subseteq \text{Jn}} x_j^{\alpha_{jh'}} \right)_{h'}, \min_{h' \in H'} c_{h'}\}.$$

$$(iii) \quad \text{Jud}_n \cap \text{Jud}_p \neq \emptyset, \quad \text{Jud}_n \oplus \text{Jud}_p \neq \emptyset \quad \text{ならば},$$

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} &= 1 & (j \in \text{Jud}_n \cap \overline{\text{Jud}_p}), \\ \alpha_{jk} &= 0 & (j \in \text{Jud}_p \cap \overline{\text{Jud}_n}). \end{aligned}$$

§6. アルゴリズム

- ステップ 1. $\mathcal{F}$ から与えられた実係数条件式をブール条件式に変換する。そのブール関数を最簡形式展開する。
- ステップ 2. 目標関数を小さくする方向で最簡形を逐次変換する。 $(x_1^{\alpha_{1k}}, \dots, x_n^{\alpha_{nk}})_k, \forall k \in K$.
- ステップ 3. $x_j = \alpha_{jk} (j \in N), \exists k \in K, (x_1^{\alpha_{1k}}, \dots, x_n^{\alpha_{nk}}) = 1$.
- ステップ 4. $N(v)$ を開き、 $S = 1$ とする。
- 4a. $N(v) \neq \emptyset$ ならば $x_j = \bar{z}_j^S = \alpha_{jk}, j \in N$ とし $f(x_1, \dots, x_n) < f(\bar{z}_1^S, \dots, \bar{z}_n^S)$ を生成しステップ 8へ。
- 4b. $N(v) = \emptyset$ ならばステップ 5へ。
- ステップ 5. $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha$ とし $x_j = \alpha_{jk} (j \in J_d)$, $x_j = \bar{\alpha}_j (j \in J_{ud})$, $\exists k \in K$ とし展開する。
- ステップ 6a. $J_{udn} \cap J_{udp} = \emptyset$ ならば $\alpha_{jk} = 1 (j \in J_{udn}), \alpha_{jk} = 0 (j \in J_{udp})$ としステップ 4aへ。
- 6b. $J_{udn} \cap J_{udp} \neq \emptyset$ ならばステップ 7へ。
- ステップ 7a. $J_{udp} \oplus J_{udn} = \emptyset$ ならば $\alpha_{jk} = 0 (j \notin J_n)$, $\alpha_{jk} = 1 (j \in J_n \subseteq J_{ud})$ とし $\{j \mid \alpha_{jk} \neq v, j \in N' \subseteq N\} \cup J_d = J_d$ としステップ 5へ。

2777°7b. $Jud_p \oplus Jud_n \neq \emptyset$ ならば, $\alpha_{jk} = 1$ ($j \in Jud_n \cap \overline{Jud_p}$),
 $\alpha_{jk} = 0$ ($j \in Jud_p \cap \overline{Jud_n}$) であり
 $\{j \mid \alpha_{jk} \neq v, j \in N' \subseteq N\} \cup Id = Id$ であり 27
 77°5 $\wedge$.

2777°8. $\overline{b}_s(x_1, \dots, x_n) = 1$ となる。

2777°9. $\overline{b} \wedge \overline{b}_s$ となる恒等的に零かという調性。

9a. $\overline{b}(x_1, \dots, x_n) \wedge \overline{b}_s(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ ならば,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\overline{x}_1^s, \dots, \overline{x}_n^s) \text{ であり}$$

$$\overline{b}_s(x_1, \dots, x_n) = 1 \text{ であり 2777°10 } \wedge.$$

9b. $\overline{b}(x_1, \dots, x_n) \wedge \overline{b}_s(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ ならば,

$$s \rightarrow s+1, \overline{b} \wedge \overline{b}_s \rightarrow \overline{b} \text{ であり 2777°27.}$$

2777°10 $\overline{b}(x_1, \dots, x_n) \wedge \overline{b}_s(x_1, \dots, x_n) = 1$

となる, この展開過程項目が最適解に達
 するまで停止する。

27. 目標関数が単調増加関数である場合のアルゴリズム

目標関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が単調増加関数であれば,

$$(39) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h \in H} c_h \left(\prod_{j \in N \subseteq N} x_j^{\alpha_{jh}} \right)_h,$$

$$(40) \quad c_h > 0 \ (h \in H), \quad \alpha_{jh} = 1 \text{ 或 } v \ (j \in N)$$

と表わされる。したがって (40) より, $Jud_n = \emptyset$ であり,

$$Jud_n \cap Jud_p = \emptyset$$

となり, α_j の値は一意的に決定される。すなわち,

$$\alpha_j = 0, \quad j \in \text{Jud}_p = \text{Jud}.$$

換言すれば, $\sum (x_1, \dots, x_n) = 1$ なる重みの中, 最良論理値の値を 1 とする方が $2^{N(n)}$ 個の実行可能解をもち, 目標関数を小さくするたけに, $\alpha_j = \infty$ ($j \in N' \subseteq N$) となっているものについては一意的に $\alpha_j = 0$ としてよい。このことから前節でのアルゴリズムのステップ 5, 6, 7 を省略でき, さらに, 次節で述べるように, ベーシアン論理の簡略化の過程において, $\alpha_j = 0$ となっているものに対し, $\alpha_j = \infty$ とするところにより, より一層簡便化されることがわかる。

3.8. 線形計画法について

与えられた問題 (1), (2), (3) が線形である場合には, 目標関数が単調増加関数となる問題は変換して考えることが出来る。したがって, 問題 (1), (2), (3) においては, $\alpha_{jk} = 1$ となるような j に対応する目標関数の係数 c_j の和が最小となるような x_j を選べばよいことになる。すなわち,

$$\begin{aligned} & \min \{ f(x_1, \dots, x_n) \mid \sum (x_1, \dots, x_n) = 1 \} \\ &= \min_{k \in K} \left\{ \sum_{j \in J_k} c_j ; J_k = \{ j_k \mid \alpha_{jk} = 1, (x_1^{\alpha_{1k}}, \dots, x_n^{\alpha_{nk}})_k = 1, \right. \\ & \quad \left. \sum (x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{k \in K} (x_1^{\alpha_{1k}}, \dots, x_n^{\alpha_{nk}})_k \right\}. \end{aligned}$$

となる。これは α の性質から定理 6 を用いる。

定理6; 問題(1),(2),(3)において(3)が単調増加関数であるならば, 目標関数値はゴール条件式の $\alpha_j = 0$ のかわりに $\alpha_j = v$ としても不変である。

証明; 目標関数値を最小にするために $\alpha_j = v$ のかわりに, $v = 0$ としたとて, $\alpha_j = 0$ であることは $\alpha_j = v$ の場合において目標関数値は不変である。したがって, 逆に $\alpha_j = 0$ のかわりに $\alpha_j = v$ としても $f(x_1, \dots, x_n)$ の値は不変となる。

上の定理6において, $\alpha_j = 0$ の代りに $\alpha_j = v$ とするとは本来の論理関係式と異なったものを生ずることになるが, 最適解に対応する論理項を含んでいるという意味において, この操作は許されるものである。この意味において, 新しい論理関係を $\approx$ なる記号で示すことにする。

系1; 問題(1),(2),(3)において, ゴール条件式のあり方にかける α_j が, $\alpha_j = 0, j \in N$ であるれば, $f(x_1, \dots, x_n)$ の最小値は $x_j = 0 (j \in N)$ となる。

ゴール条件式におけるゴール関数の展開論理項を簡略化して展開論理項数を減少させるわけであるが, そのためにつぎのような系2を使用できる。

系2; 問題(1),(2),(3)において, 系1の場合が生じたとき, ゴール条件式の展開論理項の中に

$$\left\{ \left(\prod_{j=k_0}^{k_1} x_j \right) \cdot \left(\prod_{j=k_1+1}^{k_2} \bar{x}_j \right) \right\}, \left\{ \left(\prod_{j=k_0}^{k_1-1} x_j \right) \cdot \left(\prod_{j=k_2+1}^{k_2} \bar{x}_j \right) \right\},$$

この問題は $\neg x_2$ のみ 1 に x_1 は 0 である。

$$\min \quad 3x_1\bar{x}_2 - 8\bar{x}_1x_3x_6 + 4x_2x_5\bar{x}_6 - 7\bar{x}_5x_6 + 3x_6 - 5x_4x_5x_6$$

subject to

$$\begin{aligned} \Sigma = (\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3 \cup \bar{x}_5) \cap (x_1x_4x_6 \cup x_1x_2x_4 \cup x_3x_4x_6 \cup x_2x_3x_4 \cup \\ x_4x_5x_6 \cup x_2x_4x_5 \cup x_2x_4x_6) = 1, \\ x_j = 0 \text{ or } 1 \quad (j=1, \dots, 6). \end{aligned}$$

$x_1 = 0, \bar{x}_1x_3x_4x_6 = 1$ と $x_2 = 1$ の場合の値は f は

$$f = -10 - 2\bar{x}_5$$

となり, $\bar{x}_5 = 1$ と $x_5 = 1$ (すなわち $x_5 = 1$) のとき,

$$f(x_1, \dots, x_6) < -12$$

なる付加条件式をうる。これを Σb_1 とする。

$$\Sigma b_1 = \bar{x}_1x_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6 = 1$$

$$\Sigma(x_1, \dots, x_6) \cap \Sigma b_1(x_1, \dots, x_6) \equiv 0$$

したがって, $f(x_1, \dots, x_6) = -12$ と Σb_1 は

$$\Sigma b_1' = \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5x_6 = 1$$

$$\Sigma \cap \Sigma b_1' = \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5x_6 = 1$$

従って, $x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_2 = 0 \text{ or } 1, f = -12$.

§ 10. 結論

本論文では, $(0-1)$ 変数計画問題に対するブール代数的解法プログラムについてのべた。このプログラムは Inv-

rescue. により提案された擬似ゴール計画法に属すべきものであるが数理計画法の立場からすれば Ivănescu のよりより直接的かつ初歩的といえる。7ルゴリウム自体は一種の分枝限定法に属するものであり、ブール代数による簡略化の過程が最適化の点に訴えさせた7ルゴリウムである。さらに、一度実行可能解が求まればある程度自動的に最適解を求めようとするものを持っている。

5. 参考文献

- (1) R. Fortet ; "Application de l'algèbre de Boole en recherches Opérationnelles," Rev. Française de Rech. Oper., 4, 17-25 (1960)
- (2) R. Camion ; "Une méthode de Résolution par l'Algèbre de Boole des Problèmes Combinatoires ou Intervenant des Entiers," Cahiers Centre d'Etude Rech. Oper., 2 (1960)
- (3) P. L. Ivănescu ; "Programmation polynomiale en nombre entiers," Comptes Rendus de l'Académie de Sciences, 257 (1963)
- (4) 稲垣・福村 "条件式をもった擬似ゴール計画法" 信学誌. Vol. 50, No. 6 (1967)
- (5) 三根・成久 "0-1 変数に対する線形計画問題に対するブール代数的解法" 信学誌. Vol. 52 No. 7 (1969)
- (6) 三根・成久 "(0-1) 変数非線形計画問題に対するブール代数的解法" 経営科学 Vol. 13 No. 2 (1970)