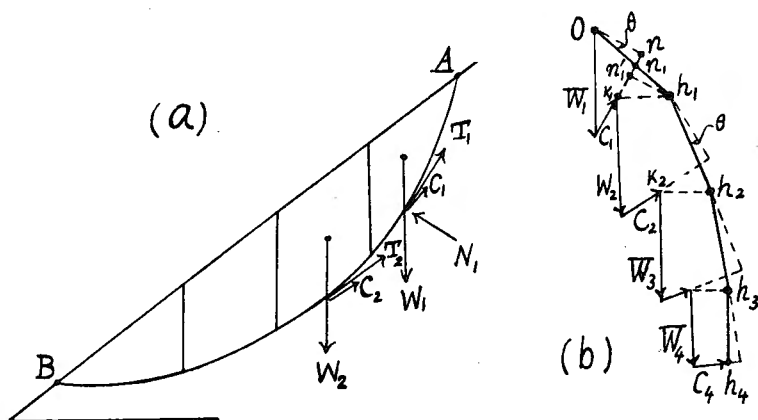


山 崩 れ に 就 い て

理學博士 野 滿 隆 治

I. 従來の研究と其の検討

山崩れ若くは地這りの現象を調査觀測したものは從來とても相當にあるが、之を理論的に論述し其の生起の條件を數量的に研究したものは至つて少い。著者の知る限りに於ては Fellenius⁽¹⁾の圖式法と山口昇博士⁽²⁾の計算法及び安藏善之助博士⁽³⁾の半圖解半計算法とを掲げ得るに過ぎぬ。素より擁壁裏面に於ける土砂崩壊に關しては、所謂土壓論として在來多數の研究を見るのであるが、茲に云ふ山崩れ又は地這りとは、山腹面に於ける弧面滑落を指すことにする。



第1圖 Fellenius の圖解

(1) Fellenius 氏の圖解法 先づ最も古い Fellenius 氏の所論を見るに、氏は滑り面を圓筒面と假定し、之を適當數の垂直面にて有限數の土塊に分割し、其の各に働く重力と下部地盤の法線反力、摩擦力及び粘着力との間の釣合を考へる。第1圖(a)に於て ACB を滑落圓弧面とし、其の各分塊の重量を $W_1, W_2, \dots$, 法線壓力を $N_1, N_2, \dots$, 摩擦力を $T_1,$

(1) W. Fellenius: Erdstatistische Berechnungen &C. (1927), 38.

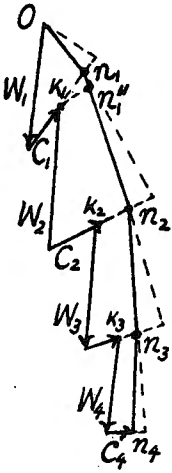
(2) 山口昇: 地這りの深さに關する一考察, 鐵道省土質委員會報告第三輯(昭和9年), 108頁。

(3) 安藏善之輔: 地這りの力學的研究, 九州帝國大學工學部彙報第15卷(昭和15年), 326頁。

$T_2, \dots$, 粘着力を $C_1, C_2, \dots$, とする。又此の土質の摩擦係数を $\mu = \tan \theta$ (θ は摩擦角), 粘着係數(沁り面積を掛けると粘着力が得らるゝやうな數)を c , 單位體積の重量を w とする。さすれば $W_1, W_2, \dots$ と $C_1, C_2, \dots$ 等は算定出来るから, 夫れ等を以て第1圖(b)の様に力の多角形を作る。先づ最上端の土塊に働くものから始め, 一點 O よりベクトル W_1 を引き, 夫れに續いて C_1 を引く。又 O 點を通り C_1 に直角(従つて法線方向)なる線 On より内側に摩擦角 θ を成す On_1 線を引く。夫れと, C_1 の先端 k_1 點より引いた水平線との交點を h_1 とする。さすれば $\overline{h_1O}$ は第一分塊に働く法線壓力及び摩擦力の合成で, $\overline{k_1h_1}$ は第二分塊による支持内力だと Fellenius 氏は考へる。以下順次各分塊に就いて同様の處作を行ひ, 最後の土塊に至つて力の多角形が閉鎖すればよし, 然らざるも, 粘着係數又は摩擦角を其の最大値よりは幾分小さく加減さへすれば力の多角形が閉鎖するならば想定面 AMB は安全である。其の他大小數多の沁り圓弧面を想定し, 如上の處作を試み, 何れも皆安全ならば, 此の地區には山崩れが起らぬと判定するのである。

私は茲に物理的意義深い一事が現はれて居ることを注意して置きたい。それは, 沁り面に働く法線壓力乃至摩擦力が必ずしも重量 $W_1, W_2, \dots$ の直接作用のみによつて生起されるばかりでなく, 各分塊間の内力によつて間接的に生起する部分もあることである。例へば第一分塊に就いて見るに, 第1圖(b)に於て W_1 による法線壓力は明かに $\overline{nO}$, 摩擦力は $\overline{On} \tan \theta = \overline{n_1n}$ で, 其の合力は $\overline{n_1O}$ である。而して $\overline{h_1n_1}$ は, 第二分塊の支持抗力 $\overline{k_1h_1}$ により生起される法線壓力(h_1n_1)と摩擦力(n_1n_1)との合成力なることも同様に證明し得られる。其の他の分塊に就ても, 兩隣に分塊より受くる内分によつて法線壓力も摩擦力も増減を見るのである。此の事は, 便宜上土塊 AMB 全體を一括して考へ, 其の法線壓力乃至摩擦力を夫れ々々只一つの力で代表せしめんとする様な際には, 念頭に置くべき重要な性質である。而して内力の發生は, 沁り土塊の上後部に在つては沁り面の勾配急なる爲め摩擦と粘着力のみに依つては支へ切れず押し懸つて來るが, 前下部に於ては反對に沁り面勾配が緩なるため摩擦と粘着力に餘裕があり, 支持力となるのである。即ち Active part と Passive part とがあるわけである。

も一つ茲に附言して置きたいことがある。Fellenius 氏は各分塊間の内力を水平力と假定したが, 然し, 分塊の沁り面に沿うて滑落せんとする作用から發生する内力は, 寧ろ各分塊底面の切線方向に平行と見る方が妥當かも知れない。其の場合には, 力の多角形は第



第2圖 内力が
迂り面に平行な場
合の力の多角形

2圖の如く引くべきで、分塊間の内力は $\overline{k_1 n_1}$, $\overline{k_2 n_2}$, ... であり、 $\overline{n_1'' n_1}$, $\overline{n_2'' n_2}$, ... は上の分塊が下の分塊に押し掛つて来る内力によつて生ずる法線壓力と摩擦力和の合力である。例へば内力 $\overline{k_1 n_1}$ は第一分塊に対しては切線方向であるが、第二分塊に対しては切線方向と傾角 $\angle n_1 k_1 n_1''$ を成して居る。その爲、内力 $\overline{n_1 k_1}$ によつて $\overline{n_1'' n_1}$ なる力が發生するのである。

然し何れにせよ、力の多角形法は要するに、全土塊に働く總ての力を合成すれば、單一なる合力としては残らないといふことを、山崩れの起否條件としたものである。確かに 夫れも 必要なる條件に違ひない。然し充分なる條件ではない。何故ならば、諸力の合成が一つの偶力に歸着し廻轉能率を残すこともあり得るからである。私は特に此の

點を強く指摘して置きたい。

(2) 山口博士の計算法 山口博士も矢張り滑り面を圓筒形と假定し、而も其の法面に比して深さが甚だ浅い場合に、法面の長さを知つて深さを推定すべき計算式を提出せられた。其の要點を摘記すれば、第3圖に於て

$s = \overline{AB}$: 迂り面弦長,

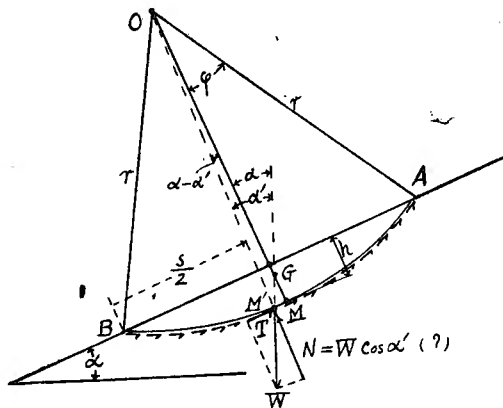
$l = \overline{AMB}$: 迂り面弧長

h : 迂り土塊の中央に於ける厚さ,

2φ : 弦 s の中心角

$r = \overline{OA} = \overline{OB}$: 圓弧半径,

θ, c : 土質の摩擦角及び粘着係數



第3圖 山口博士の想定圖

α : 山腹の傾斜角,

$\mu = \tan \theta$: 摩擦係数

w : 土塊の單位體積重量,

W : 土塊の全重量

α' : 重心點 G の直下に於ける切り面の傾斜角

とすれば、土塊の全重量 W は勿論其の重心點 G に働く。又全面に分布する下盤よりの法線抗力及び摩擦力は部分によつて違ふが之を合成すれば夫れ夫れ一つの力 N 及び T になるとし、其の着力點は G の直下の切り面上 M' にありと假定する。又其の大きさを博士は $N = W \cos \alpha'$, $T = N \tan \theta = W \cos \alpha' \tan \theta$ と假定された。粘着力は切り面全體に互り均一であるから、其の儘にして置く。尙ほ傾角 α' は α に極めて近く、 $\alpha - \alpha'$ 角は微小として無視し、圓の中心 O に對する此等諸力の能率を計算し、山崩れの起らぬ條件として

$$\frac{s^3}{12} \sin \alpha \leq \frac{2c}{w} \left(\frac{s^2 + 4h^2}{8h} \right) \sin^{-1} \frac{4sh}{s^2 + 4h^2} + \mu \cos \alpha \left\{ \left(\frac{s^2 + 4h^2}{8h} \right)^3 \sin^{-1} \frac{4sh}{s^2 + 4h^2} - s \frac{s^2 + 4h^2}{8h} \cdot \frac{s^2 - 4h^2}{16h^3} \right\} \quad (i)$$

を得、更に之を h^2/s^2 の程度まで近似算を施すこととし

$$\sin^{-1} \frac{4sh}{s^2 + 4h^2} = \frac{4sh}{s^2 + 4h^2} + \frac{1}{3!} \left[\frac{4sh}{s^2 + 4h^2} \right]^3 + \dots \quad (ii)$$

の右邊第一項のみを (i) 式に代入して

$$\frac{s^3}{12} \sin \alpha \leq \frac{2c}{w} \frac{s^2 + 4h^2}{16h} s + \mu \cos \alpha \left\{ \frac{(s^2 + 4h^2)^2}{128h^2} s - \frac{s^3 - 16h^4}{128h^2} s \right\} \quad (iii)$$

従つて

$$\mu + \frac{2c}{wh} \sec \alpha - \frac{4}{3} \frac{s^2}{s^2 + 4h^2} \tan \alpha \geq 0 \quad (iv)$$

を以て山崩れが起らぬ條件とした。山崩れが起るのは左邊が負となるとで、零に等しいときは其の臨界點にあるから夫れを以て山崩れ條件と見做してよい。それで山崩れの弦長 s が分つて居る場合には、其の崩落土塊の厚さ h が (iv) 式によつて算定し得られるといふのが、山口博士所論の大意である。

眞とに適切妥當な見解で、山崩れ理論に有力な一推進を行つたものといふことが出来る。然し私の見る所では、氏の所論は山崩れに必要な條件の一部（即ち諸力の合成が只一つの偶力には歸着せぬといふこと）を使用しただけで、必要にして且つ充分なる條件を全部使つて居ない。其の故に s が與へられねば h が決定出來ぬのである。一體、或る大きさをもつ物體の釣合に必要なして充分なる條件は、任意一點の周りの能率が 0 なることと、任意

二方向の力の總和が 0 なることと、都合三つの條件である。山口氏はその内の能率 0 のみを使用し、Fellenius 氏は残りの二つのみを使用して居る。それで私は、三條件とも同時に使用したならば、山腹の傾斜角と土質の諸常數とが分つて居る限り、 s と h とが共に決定出来ると考へた。之が本論文を思ひ立つた動機である。

加之、氏の能率計算そのものにも二三訂正を要する點があるようである。第一は (i) 式の μ を含む項の省略法である。滑り圓弧の半径は $r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$ であつて、(i) 式右端の括弧内は截頭圓 $AMBA$ の面積に r を掛けたものに當るが、山口氏の様此の中の $\sin^{-1}$ を展開して第一項のみをとれば、截頭圓の面積が $\frac{sh}{2}$ となつて $\triangle AMB$ に等しいと取つたことになる。然しその残りの面積も實は三角形の面積に對し約 $\frac{1}{3}$ もあつて省略する譯に行かない。即ち (i) 式右端の括弧内の二項の差は、(ii) 式の展開に於ける第二項まで取つて計算せねばならない。それに r^3 を掛けたものは矢張り所要の精度 h^2/s^2 の order なのである。(i) 式右邊第一項に就いても同段である。

第二に、山口氏は滑り面に分布して働く法線抗力の合力 N 及び摩擦力の合力 T は重心 G の直下に働くと假定せられたが、果して然るや否や検討を要する。特に $N = W \cos \alpha'$ なる假定が一層疑問である。何故なら Fellenius 氏の作圖法から知られる通り、各部の法線壓力は其の上にある分塊土壤の重量のみから發生するばかりでなく、分塊間の内力によつても發生するからである。事實、私の計算によれば N は $W \cos \alpha'$ の外に h^2/s^2 order の修正が必要である。

第三に、山口氏は角 $\alpha - \alpha'$ を省略されたが、實は之も s^2/h^2 order のもので、所期の精度を維持する爲には切り捨てるわけに行かない。

(3) 安藏博士の半圖解法 安藏博士は迂り面に平面部と曲面部の共存が可能なる所以を強調せられて居る。然し平面部の厚さが土塊間に内力ある場合も無き場合も同厚なるべき理由は研究してない。

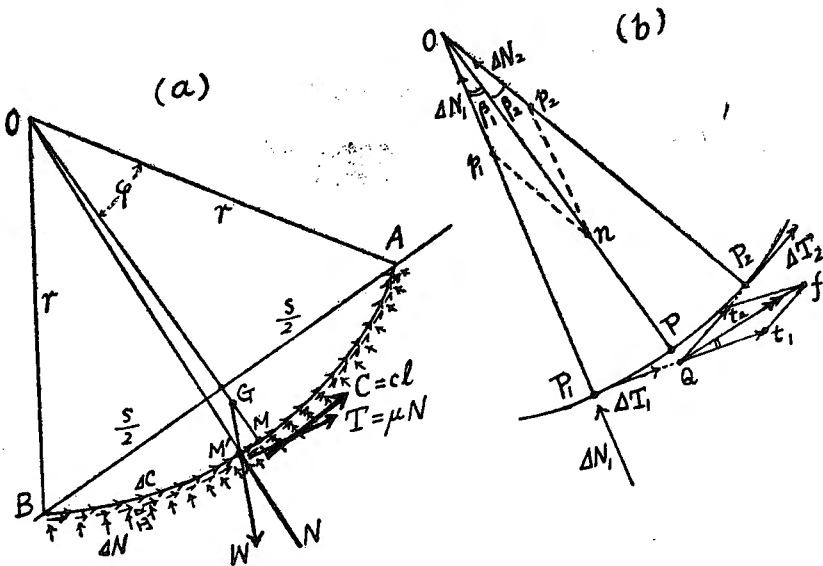
以上の如く、從來の山崩れ理論には多少の缺點や、必要なる條件を全部同時に使つてないといふ脱漏がある様であるから、私は次に私の理論を提出し大方の批判を仰ぎたい。

II. 迂り面を圓筒と見たる場合の予の理論

1. 法線反力、摩擦力及び粘着力の合成 釣合條件を數式に表はす前に、先づ以て法線

反力や摩擦力の合力が果して山口氏の想定通りに取つてよいかどうかを吟味して置く必要がある。

法線反力は、Fellenius 氏の圖解法よりわかる如く土塊間の内力によつて發生する部分もあり、其の値の決定は後に譲るが然し切り面が圓弧である以上、如何なる點の法線反力も總て半徑方向に違ひないから、圓の中心を通る作用線をもつて居る。従つて其の合力は圓心 O を通る線上に働く只一つの力 N に歸着することは明かである。其の作用線が圓弧を切る點は暫く後に決定する。



第4圖 摩 擦 力 の 合 成

次に各部の摩擦 ΔT も合成すれば、前記 N に直角に働き、而も其の大きさは $T = \mu N$ (μ 摩擦係数) なること示さう。切り面の任意二點 $P_1 P_2$ に働く法線反力を $\Delta N_1, \Delta N_2$; 之に對應する摩擦力を $\Delta T_1, \Delta T_2$ とすれば勿論

$$\Delta T_1 = \mu \Delta N_1, \quad \Delta T_2 = \mu \Delta N_2$$

第4圖(b)に於て、 ΔN_1 と ΔN_2 との合力を求めて平行四邊形 $Op_1 p_2$ の對角線 $\overline{On}$ 、又 $\Delta T_1, \Delta T_2$ の合力を求めて平行四邊形 $Qt_1 t_2$ の對角線 $\overline{Qf}$ を得たとする。然るときは

$$Qt_1 \perp Op_1, \quad t_1 f \perp p_1 n; \quad \therefore \angle Op_1 n = \angle Qt_1 f$$

$$\therefore \frac{Qt_1}{t_1 f} = \frac{\mu \cdot \Delta N_1}{\mu \cdot \Delta N_2} = \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{Op_1}{p_1 n}$$

$$\therefore \triangle Op_1 n \sim \triangle Qt_1 f. \quad \text{従つて } Qf = \mu \cdot On.$$

故に合成摩擦力は合成法線反力の μ 倍に等しい。

又相似三角形の對應する角によつて $\angle p_1 O n = \angle t_1 Q f$. 即ち $O n$ と $Q f$ とは互に直角なる二線 $O p_1$ と $Q t_1$ より夫れ夫れ相等しき角だけ同じ向きに傾いた線であるから、互に直角である。

此の方法を繰り返して行へば、摩擦力全體の合力 T は法線反力の全合力 N に直角にして、且つ $T = \mu N$ なることが知られる。尤も其の着力點は滑り面より多少外に出るが、其の差は半径 r に比して h^2/s^2 より一桁下の微量であるから、所要の精度に於ては無視して、圓弧面に働くと考へて差支ない。

次に合成法線反力 N の作用線は圓弧上の何處を通過すべきか。之も矢張り先づ二つの法線壓力 $\Delta N_1, \Delta N_2$ を合成した場合から考へる。其の着力點 P_1, P_2 に於ける迂り面の傾斜角を α_1, α_2 とし、又 $\Delta N_1, \Delta N_2$ が其の合力と成す角を β_1, β_2 とする。そうすると三角

形の正弦法則により

$$\Delta N_1 / \Delta N_2 = \sin \beta_2 / \sin \beta_1$$

今法線壓力が其の上の重量 $\Delta W_1, \Delta W_2$ のみより發生すると假定すれば、

$$\Delta N_1 = \Delta W_1 \cos \alpha_1, \quad \Delta N_2 = \Delta W_2 \cos \alpha_2$$

$$\therefore \frac{\Delta W_1 \cos \alpha_1}{\Delta W_2 \cos \alpha_2} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}$$

$$\therefore \frac{\Delta W_1}{\Delta W_2} = \frac{r \sin \beta_2 \cos \alpha_2}{r \sin \beta_1 \cos \alpha_1} = \frac{PP_2 \cdot \cos \alpha_2}{PP_1 \cdot \cos \alpha_1} = \frac{PP_2'}{PP_1'}$$

但し P は合成反力が迂り面を切る點、 P_1', P_2' は P_1, P_2 點を通る鉛直線と P を通る水平線との交點を表はす。

第 5 圖 法線反力の着力點

かくして P 點は ΔW_1 と ΔW_2 との作用線間の arm を其の二力の反比に分割した點に當り、兩土塊の重心下にあることが判る。従つて迂り土塊全體に對しても、合成法線反力 N は山口氏想定の如く重心點 G の直下に働くとしてよい。尤も詳しく云へば、各部の法線反力は土塊の重量のみならず土塊間の内力によつて發生する部分もあるから、完全に全重心 G の直下に N が働くことにはならないで更に少し前方になる。又さうでなくは其の着力點に對する他の總ての力の能率が 0 にならぬ缺點が現はれる。然し迂り面中央 M から重心直下點までの距離が既に圓の半径 r に對し h^2/s^2 の order である。土塊

内力による法線反力の爲の修正は更に一段下の微量なることは明かであるから、我々の所期の精度では省略してよいのである。

最後に、粘着力は其の上の壓力には無關係で切り面全體に一樣に分布して居るのであるから、其の合成は簡單である。即ち、切り面の弦長 s 、幅 1 なるものを考へ、土質の粘着係数を c とすれば

$$\text{合成粘着力 } C = cs$$

で、弦 $AB = s$ に平行に働く。作用線の位置は切り面よりは土中へ外れるのであるが、後來の問題解決には不要であるから略して置く。

2. 山崩れ生否の臨界條件 以上の吟味によつて、山崩れ土塊に働く力は第 4 圖の如く考へてよいことが分つた。但し N は未だ不明で、山口氏の如く $N = W \cos \alpha'$ と即斷するわけには行かない。

今此の土塊が將に切るか切らぬかの臨界點にあるとすれば、摩擦係數 μ や粘着係數 c は其の最大限度まで使はれて居る筈である。而も未だ崩落はせずに兎も角平衡を保つて居るならば、當然釣合の條件を満足して居るに違ひない。それで二方向の力の和も或一點の周りの能率も共に零であるといふ三式を作ることとする。二方向としては切り面弦長 $s = AB$ と之に直角なる OM 方向を選び、能率を取る一點としては圓の中心 O を採用する。

OM 方向の力の和を計算すれば

$$W' \cos \alpha - N \cos(\alpha - \alpha') + T' \sin(\alpha - \alpha') = 0, \quad \text{但し } T' = \mu N$$

$$\therefore N = W' \cos \alpha \left(\frac{1}{\cos(\alpha - \alpha') - \mu \sin(\alpha - \alpha')} \right)^* \quad (1)$$

即ち法線反力 N は山口氏想定とは多少の差を示し、重力のみならず土塊間の内力によつて誘發せられる部分があることを示す。内力そのものは勿論、互に相等しく方向反對なる對があるから、考慮に及ばぬ。

弦長 AB 方向の力の和を取れば

$$W' \sin \alpha - T' \cos(\alpha - \alpha') - cs = 0, \quad T' = \mu N \quad (2)$$

茲で $\alpha - \alpha'$ を計算せんに

* 若し N 方向の釣合條件を書けば

$$W' \cos \alpha' = N + cs \sin(\alpha - \alpha') \quad \therefore N = W' \cos \alpha' - cs \sin(\alpha - \alpha')$$

となる。 N は山口氏の想定よりは小さい。

$$\alpha - \alpha' = \frac{\widehat{MM'}}{r} \div \frac{\overline{GM} \tan \alpha}{r} = \frac{(r - OG) \tan \alpha}{r}$$

然るに迂り土塊を単位幅だけ考へると、其の斷面積を F として、

$$OG = \frac{s^3}{12F}.$$

$$\text{又} \quad (2r - h)h = (s/2)^2 \quad \therefore \quad r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h} \quad (3)$$

序でながら上式より $s/r \div 8h/s$ で、 s/r と h/s とは同じ order、従つて h/r は h^2/s^2 の order なることを注意して置く。然るに $h > r - OG > h/2$ であるから、 $\alpha - \alpha'$ は h/r の order で、山口氏の如く無視し得ないことが分る。尙ほ之を數的に決定するには斷面積 F を計算する必要がある。ところで

$$\begin{aligned} F &= \text{扇形} OAB - \text{三角形} OAB = r^2 \varphi - \frac{1}{2} s(r - h) \\ &= \left(\frac{s^2 + 4h^2}{8h} \right)^2 \sin^{-1} \frac{4sh}{s^2 + 4h^2} - s \frac{s^2 - 4h^2}{16h} \end{aligned}$$

之を h^2/s^2 程度まで算出すると

$$\begin{aligned} F &\div \frac{s^2 + 4h^2}{16h} s + \frac{1}{3!} \frac{s^3 h}{s^2 + 4h^2} - s \frac{s^2 - 4h^2}{16h} = \frac{hs}{2} + \frac{hs}{6} \frac{s^2}{s^2 + 4h^2} \\ &= \frac{2hs}{3} \frac{s^2 + 3h^2}{s^2 + 4h^2} = \frac{s(s^2 + 3h^2)}{12r} = \frac{2hs}{3} \left(1 - \frac{h^2}{s^2} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

山口氏の略算では $hs/2$ をとつて居ることになるが夫れでは不充分なことが判る。

$$\text{かくて} \quad OG = r \frac{s^2}{s^2 + 3h^2}$$

$$\therefore \quad \alpha - \alpha' = \left(1 - \frac{s^2}{s^2 + 3h^2} \right) \tan \alpha = \frac{3h^2}{s^2 + 3h^2} \tan \alpha \div 3 \frac{h^2}{s^2} \tan \alpha \quad (5)$$

$$\therefore \quad \cos(\alpha - \alpha') \div 1, \quad \sin(\alpha - \alpha') \div 3 \frac{h^2}{s^2} \tan \alpha \quad (6)$$

故に、土壤の單位體積の重量を w とすれば $W = wF$ であるから、釣合條件(1)は

$$N = W \cos \alpha \left(1 + \mu_3 \frac{h^2}{s^2} \tan \alpha \right) = wF \cos \alpha \left(1 + 3\mu \frac{h^2}{s^2} \tan \alpha \right) \quad (1')$$

條件(2)は(1')を利用して

$$\mu w F \cos \alpha \left(1 + 3\mu \frac{h^2}{s^2} \tan \alpha \right) + cs - wF \sin \alpha = 0$$

之を $wF \cos \alpha$ にて割り、且つ(4)式を利用して h^2/s^2 の項まで取れば、

山 崩 れ に 就 い て

$$\left. \begin{aligned} \mu(1+3\mu \xi \tan \alpha) + \frac{3c}{2\mu h}(1+\xi) \sec \alpha - \tan \alpha &= 0 \\ \text{但し } \xi &\equiv h^2/s^2 \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

圓の中心 O の周りの能率 を考ふるに、重力の能率 M_W は

$$M_W = wF \cdot \overline{OG} \sin \alpha = w \frac{s^3}{12} \sin \alpha$$

で、山口氏の式其の儘でよいが、摩擦力 $T = \mu N$ による能率 M_T は氏の略算式とは大に異なる。(4)及び(1)を注意して、 h^2/s^2 order まで計算すれば

$$\begin{aligned} M_T &= rT = r\mu N = \mu wF \cos \alpha \left(1 + 3\mu \frac{h^2}{s^2} \tan \alpha\right) \left(\frac{s^2 + 4h^2}{8h}\right) \\ &= \mu w \frac{2hs}{3} \left(1 - \frac{h^2}{s^2}\right) \cos \alpha \left(1 + 3\mu \frac{h^2}{s^2} \tan \alpha\right) \left(\frac{s^2 + 4h^2}{8h}\right) \\ &\div \frac{1}{12} \mu w s^3 \cos \alpha \left\{1 + 3(1 + \mu \tan \alpha) \frac{h^2}{s^2}\right\} \end{aligned}$$

又粘着力の能率 M_c は

$$\begin{aligned} M_c &= c l r = c r^2 \cdot 2\varphi = 2c r^2 \sin^{-1} \frac{s}{2r} \\ &\div c s r \left(1 + \frac{s^2}{24r^2}\right) = c s \frac{s^2 + 4h^2}{8h} \left(1 + \frac{8h^2}{3s^2}\right) = \frac{cs^3}{8h} \left(1 + \frac{20h^2}{3s^2}\right) \end{aligned}$$

仍つて能率の平衡条件 $M_W + M_T + M_c = 0$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} w s^3 \sin \alpha - \frac{1}{2} \mu w s^3 \cos \alpha \left\{1 + 3(1 + \mu \tan \alpha) \frac{h^2}{s^2}\right\} - \frac{cs^3}{8h} \left(1 + \frac{20h^2}{3s^2}\right) &= 0 \\ \therefore \mu \left\{1 + 3(1 + \mu \tan \alpha) \xi\right\} + \frac{3c}{2\mu h} \left(1 + \frac{20}{3} \xi\right) \sec \alpha - \tan \alpha &= 0 \\ \text{但し } \xi &\equiv h^2/s^2 \end{aligned} \quad (7)$$

3. 問題の解と其の吟味 かくて吾々は山崩れの生否臨界条件として三つの聯立方程式 (1'), (2'), (7) を得た。故に若し山腹の傾斜角 α , 土質の諸定数 $W, \mu = \tan \theta, c$ が既知であれば、他の三未知数 N, s, h を算出することが出来る。(1')は N の算式として、(2')と (7) の二式より ξ と h とを求むれば、

$$h^2/s^2 \equiv \xi = 0 \quad (8)$$

$$\text{及び } h = \frac{3c \sec \alpha}{2\mu (\tan \alpha - \mu)} \quad \text{或は } \eta \equiv h \sec \alpha = \frac{3c \sec^2 \alpha}{2\mu (\tan \alpha - \tan \theta)} \quad (9)$$

を得る。 η は切り面最厚部の垂直深度に當る。

かくの如く h は s を知らずとも決定出来る。土層の厚さが (9) 式以下であれば山崩れ

は起らぬが、其以上であれば起る。而して其の際の山崩れの長さ s は h に比して非常に長く、 h^2/s^2 が 1 に比し甚小なる程になる筈である。

例へば、昭和 7 年の大和川龜瀬の地這りに就いて、鐵道省土質調査委員會⁽⁴⁾は同地の土質 5 箇につき摩擦角及び粘着力係数を實測して居る。その平均を取ると

$$c=0.632 \text{ kg/cm}^2=6.32 \text{ ton/m}^2, \quad \theta=4^\circ 20'$$

となる。又同地域の断面地形圖も掲出してあるから、夫れによつて略測すれば、

$$\text{平均傾斜角 } \alpha=7.5^\circ, \quad \text{這り面の長さ } s=480 \text{ m.}$$

土質の比重は與へてないが、地這り誘因に含水率の増大が數へられたことなどを考慮して

$$w=2\sim 2.5 \text{ ton/m}^3$$

として見る。此等の値を(9)式に代入すれば

$$\begin{aligned} h &= \frac{3}{2} \cdot \frac{6.32}{2\sim 2.5} \times \frac{\sec 4^\circ 20'}{\tan 7.5^\circ - \tan 4^\circ 20'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6.32}{2\sim 2.5} \times \frac{1.003}{0.0563} \\ &= 84\sim 68 \end{aligned}$$

即ち約 70~80 m 程度の地這り深度を與へる。土質調査委員會の推定 60~70 m よりは少し厚い程度である。此の h に比し s は約 7 倍で、 $h^2/s^2=0.024$ となり圓弧面地這りと見るには多少不充分の様である。然し大體の計算には此の程度の h^2/s^2 でも圓弧地這りに近いものらしい。

又、長野縣茶臼山の地這りを萩原尊禮氏⁽⁵⁾が彈性波探查法によつて實測した深さは 15~20 m の處が大部分で、又土質は $w=1.86 \text{ g/cm}^3$, $c=0.050 \text{ kg/cm}^2$, $\theta=7.5^\circ$, $\alpha=10^\circ$ といふことである。(9)式で計算すれば $h=24 \text{ m}$ を得、大體實測に一致する。 s は 1000 m 以上で h に比し非常に大きい。

尙ほ私は (8), (9) 兩式の結果に極めて深い意義を感じるものである。なぜなら、土層の厚さが(9)式の h 以上あつて而も傾斜地の長さが夫れに比し随分長い場合には崩落の危険があるから、土層の一部を切り取るなり又は勾配を緩和するなりして、山崩れ防止を行ふ指針とすることが出来るのみでなく、相當長い山腹では此の不崩深度よりも餘り厚い風化土は事實上實在せぬではないかと想像せらるゝからである。例へば阪神地方の如き急峻な花崗岩山腹では、風化が進行して此の厚さ以上になる毎に山崩れを起して殆んど岩盤面ま

(4) 鐵道省土質調査委員會：龜の瀬地這り地の調査報告，同委員會報告第 3 輯(昭和 9 年)，95 頁。

(5) 萩原尊禮：Land Creep at Mt. Tyausuyama, Earthq. Res. Inst. Tokyo, 17 (1939), 118.

で墜落し、周期的な山崩れ頻発は宿命的ではあるまいか。従つて現存する風化土の厚さは一般に(9)式の限界深度以下であり、之を超す場合はあつてもほんの僅かしか厚くないではあるまいか。記して後日の調査を俟つ。昭和13年の阪神地方山崩れは筆者も當時視察して廻つたが、殆んど皆岩盤の處まで入り落ちて居た(口繪参照)。尤も、溪流や堀割工事などによつて山の裾を切り取つた傾斜地では、(9)式よりも尙更薄い風化土でなくてはならないし、反對に山麓附近に風化しない堅岩が表面近くまで残つて居る山腹の風化土はもう少し厚い場合もあり得るであらう。

(9)式は又、山崩れが降雨期に起り易い理由を説明するものである。既に宮部直己⁽⁶⁾博士が山口博士の式を利用して指摘した様に、土壤が乾燥して居る平時には崩落しない傾斜地でも、降雨によつて土壤の含水量が増大すれば、其の比重は當然増大するし、又其の摩擦係數と粘着係數は一般に減退するから、(9)式の k は著しく減少し崩落の危険を増大するわけである。但し宮部博士⁽⁷⁾が其の上に、土壤は含水量の増加につれて收縮して龜裂を生じ山崩れ誘發の大原因となると強調されるのはどうかと思はれる。濕潤になれば收縮するといふことは、乾燥によつて膨脹することを意味する。旱魃時の田面の龜裂や乾涸した湖沼河川の底土乾裂や、捏ねた粘土塊の乾燥による收縮など、吾人の日常目睹する現象とは全く矛盾する。又雨水滲透が旱天時に著しく容易で、降雨が続くに從ひ漸減するといふ河川學乃至地下水學上の常識にも反する。博士が其の所説の基礎として、硝子圓筒に乾砂を詰め之に注水して砂面の降下を測つた實驗は、寧ろ人工盛土や乾砂を圓筒に填める際土粒の配列を緊密にすることの困難さを示すもので、初めは砂粒の配列が落付かず不當の容積を占めて居るので、之に水をかけると細粒は粗粒の間に落ち込みなどして砂粒配列が調整せられ落付きを得るに過ぎない。之を自然の地中で既に充分落付きを得た地層にまで擴張するのは、行き過ぎではあるまいか。粘土や泥でない砂濱海岸でも、底質を水と共にポンプで吸ひ上げて行ふ埋立作業などを見ると、明かに水分の蒸發乾燥と共に埋立面の低下を來すから豫定の高さよりも餘分に高く埋立てゝ作業を終るのである。

山腹傾斜 α が小さくて摩擦角 θ に近づくほど k は大となり、山崩れは起り難い。 $\alpha \leq \theta$ になれば、崩落力は摩擦力のみにて支持し得るから粘着力は全部餘裕があつて、山崩れは

(6) 宮部直己：昭和13年7月上旬の降雨による兵庫縣下の山崩；地震研究所彙報16(昭和13年)772。

(7) 宮部直己：A Study of Landslides. Bull. Earthq. Res. Inst. 13 (1935), 85.

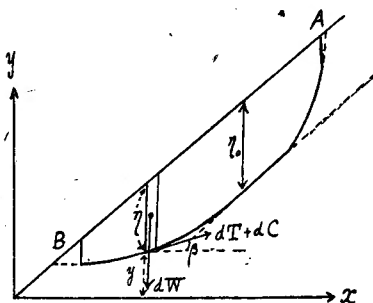
絶対に起らぬ。又同一地で何回も少しづゝ地這りがあるのは、或は土地乾燥して c と μ を増し、或は少しの地這りで上部が下り下部が上りて α を小ならしめ、一時的安定を得るためと思はれる。

尙ほ本節の結果に就き注意すべき點が、も一つある。這り面を圓弧狀と假定すれば、(8)式の如く s が h よりも非常に大でなければ山崩れは起らぬことになり、逆に s が其の程度以上に長くさへあれば、如何なる長さの山崩れも可能で s は不定となる。之は果して(イ)小這り面は事實上成立しないのか、或は(ロ)小弧面の這りも可能ではあるが其の形が眞の圓弧ではないため、圓弧と見做し得るは h^2/s^2 が甚小なる場合に限るといふ意味なのか、其の何れかである。恐らく後者に屬するものと私は信ずる。それで、次に這り面を圓弧と假定するのを止め、一般に山崩れ成立條件を考究し、以て這り面形狀にも論及して見たい。

III. 這り面の形狀に就いて

従來行はれて居る圖解法の精神を擴張して、單位幅の這り土塊を無數の垂直面で無數の小部分に分割し、其の滑落條件を吟味する。但し土塊間の内力は Fellenius と違つて其の部分の這り面切線に平行と見る。又、力の能率關係をも補充し、必要にして且つ充分なる三條件全部を使用する。でなければ當然此の問題は解けない。

1. 各分塊獨立釣合の場合 問題の物理的性質を了解し易からしむる爲、先づ準備として各分塊間の相互作用はなく、獨りでに這り面を發生し得べき條件を考へて見る。



第6圖 各分塊相互作用なき場合

第6圖に於て、坐標軸を水平と垂直方向に取り、斯様な這り面を AMB で其の方程式を $y=f(x)$ とし、 $f(x)$ の形を決定したい。

x と $x+\Delta x$ の間に挟まる、土柱の垂直高を η とすれば

$$\eta = x \tan \alpha - y, \quad \alpha: \text{地表傾斜角} \quad (10)$$

で、之に働く力は

$$\text{重力 } \Delta W = \eta \eta \Delta x = w(x \tan \alpha - y) \Delta x$$

と、法線反力 ΔN 、摩擦力 $\Delta T = \mu \Delta N$ 、粘着力 $\Delta C = c \Delta l$ である。

故に此の土柱の獨立平衡條件は、 β を這り面切線の傾斜角として

$$\text{法線方向釣合} \quad \Delta N = \Delta W \cdot \cos \beta \quad (11)$$

$$\text{切線方向釣合} \quad \mu \Delta N + \Delta C = \Delta W \cdot \sin \beta \quad (12)$$

(12)式に(11)を代入し且つ $\Delta v / \Delta l = \cos \beta$ に注意すれば

$$w\eta(\mu \cos \beta - \sin \beta) + c \sec \beta = 0 \quad (13)$$

或は, $\tan \beta = dy/dv = \tan \alpha - d\eta/dx$ なるにより

$$c \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + (w\eta - 2c \tan \alpha) \frac{d\eta}{dx} + w\eta(\mu - \tan \alpha) + c \sec^2 \alpha = 0 \quad (13')$$

此の(13)或は(13')は一見して, $\beta = \alpha$ にして且つ

$$\eta = \frac{c \sec^2 \alpha}{w(\tan \alpha - \mu)} \equiv \eta_0 \quad (\text{一定}) \quad (14)$$

$$y = x \tan \alpha - \eta_0$$

の如き直線解を有することが分る。 η_0 は圆弧切り面と假定した場合の最深部よりは浅く, 其の 2/3 に當るのである。

扨然らば, 此の直線部に連続して地表面に近づく曲線部が可能なるかといふに, (13')式より

$$\begin{aligned} 2c \frac{d\eta}{dx} &= -w\eta + 2c \tan \alpha \pm \sqrt{(w\eta - 2c \tan \alpha)^2 - 4c\{c \sec^2 \alpha - w\eta(\tan \alpha - \mu)\}} \quad (13'') \\ &= -w\eta + 2c \tan \alpha \pm \sqrt{w^2 \eta^2 - 4w\mu c \eta - 4c^2} \end{aligned}$$

故に直線部終端を $x = x_0$, $\eta = \eta_0$ に取れば, 上式を積分して

$$\frac{1}{2c}(x - x_0) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{-w\eta + 2c \tan \alpha \pm \sqrt{w^2 \eta^2 - 4w\mu c \eta - 4c^2}} \quad (15)$$

なる曲線部方程式を得る。

$\eta = \eta_0$ の時は (13'') 式の根號内後半は明かに零であるから, 根號の正符號は $d\eta/dx = 0$ を與へ, 直線部との連続は圓滑であるが, 負符號は折線的接続となる。切り曲面の下部と上部に相當する。

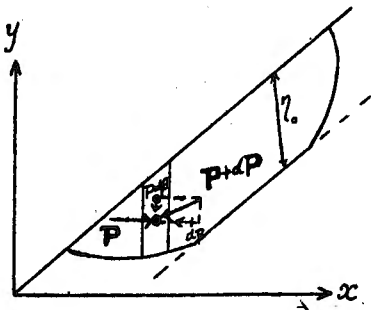
尙ほ茲に注意すべきことは, 根號内が負となる様な

$$w^2 \eta^2 - 4w\mu c \eta - 4c^2 < 0 \quad \text{従つて} \quad \eta < \frac{2c}{w}(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) \quad (16)$$

以下の η は實現し得ないことである。換言すれば(16)式右邊に等しい η の所で, 滑落する部分と滑落せぬ部分との界が出來て, 茲に龜裂を生すべきことが推定される。かくの如く η の厚さが一定限以下になれば滑落せざる理由は, (13)式より判る通り, 粘着力は切り

面の面積に比例し η には無関係であるのに、重力と摩擦力は η にも比例して小さくなるからで、 η の一定限以下では粘着力に餘裕が出来るのである。従つて曲面上部では其處に龜裂が生ずべく、下部では夫れ以上の切取りがなくでは自由崩落不可能である。

2. 各分塊間に相互作用ある場合 以上の如く土塊の各部分間に相互内力なしとすれば山麓が垂直に切り取られて居る場合の外、下部には滑落部が発生し得ず山崩れは實現せぬわけであるが、實際には迂り土塊の上半分には厚さが(15)式の η より大きく重力の滑落力に過大なる部分があつて、下の部分に押し掛かり所謂 Active part を形成し、下部の passive part を壓して、自分だけなら摩擦と粘着力に餘裕があつて滑落しない筈の部分をも押し落とし、山崩れを生起し得るであらう。故に之より土塊間の相互作用を加味した場合を考究する。



第6圖 内力ある場合

縦断面 x に於ける内力を P にて表はし、迂り面に平行に働くとする。然るときは dx なる幅 (底面 dl) の土柱に働く内力は下部より P 、上部より $P+dP$ が働く。この兩者は方向が $d\beta$ 違つて居るから、 $P+dP$ を P と同方向及び直角方向に分てば $P+dP$ と $Pd\beta$ になる(第6圖)。

故に此の微小土塊の滑落限界平衡條件は

$$\text{法線方向: } dN = dW \cos \beta + Pd\beta \quad (17)$$

$$\text{切線方向: } dW \sin \beta = dC + dT - dP \quad (18)$$

而して素より $dT = \mu dN$, $dW = w\eta dx$ であるから、上の二式より N を追出せば

$$w\eta dx \cdot \sin \beta = cdl + \mu w\eta dx \cdot \cos \beta + \mu Pd\beta - dP$$

従つて、弧長 $dl = dx \sec \beta$ に注意し

$$-\frac{dP}{dx} + \mu P \frac{d\beta}{dx} = w\eta \cos \beta (\tan \beta - \mu) - c \sec \beta \quad (19)$$

此の式は迂り面の形状 $y=f(x)$ が既知ならば、内力 P を算定すべき方程式である。然し今は迂り面形状も P も未知なる故、更に今一つの式なくては問題は解決しない。そして第三の平衡條件として、 dl の中點に對する能率零を採用する。内力 P はかゝる微小土柱の滑落に對するものであるから、其の着力點は土柱の中央 $\eta/2$ にありと見て

$$\text{能率零: } dP \cdot \frac{\eta}{2} \cos \beta - Pd\beta \cdot \frac{\eta}{2} \sin \beta = 0$$

$$\text{或は } \frac{dP}{dx} = P \tan \beta \frac{d\beta}{dx} \quad (20)$$

(19), (20)の二式より P 及び dP/dx を求むれば,

$$P = \frac{c \sec \beta - w\eta \cos \beta (\tan \beta - \mu)}{(\tan \beta - \mu) d\beta/dx} \quad (21)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{c \sec \beta - w\eta \cos \beta (\tan \beta - \mu)}{(\tan \beta - \mu)} \cdot \tan \beta \quad (22)$$

(21)を x にて微分し(22)に等しいと置き, それを積分すれば

$$\frac{c \sec \beta - w\eta \cos \beta (\tan \beta - \mu)}{(\tan \beta - \mu)} = \frac{K}{\cos \beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (23)$$

となる。 K は積分常数である。

之に $\tan \beta = \tan \alpha - d\eta/dx$, 従つて $\sec^2 \beta \, d\beta/dx = -d^2\eta/dx^2$ を代入し,

$$\begin{aligned} K \left(\tan \alpha - \mu - \frac{d\eta}{dx} \right) \frac{d^2\eta}{dx^2} \\ = c \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + (w\eta - 2c \tan \alpha) \frac{d\eta}{dx} + w\eta(\mu - \tan \alpha) + c \sec^2 \alpha \end{aligned} \quad (24)$$

として, 沁り曲面の微分方程式を得る。

此の式は遺憾ながら積分不能であるが, 圆弧でないことだけは明かである。其の上, $\eta = \text{const}$, 従つて $d\eta/dx = d^2\eta/dx^2 = 0$ なる特解の存在も明瞭である。その爲の η は

$$\eta = \frac{c \sec^2 \alpha}{w(\tan \alpha - \mu)} = \eta_0, \quad \text{従つて } h = \frac{c \sec \alpha}{w(\tan \alpha - \mu)} \quad (25)$$

で, 自由獨立崩落の深度と同じである。

3. 結果の吟味 かくて吾々は内力作用する場合の曲面部を數式に現はすことは出来なかつたが, 微分方程式は出来て居るから積算法なり部分的作圖法なりを繰返せば曲面を表現し得るわけではある。圖解法に就きては安藏博士⁽⁸⁾の所論に譲る。

只茲に注意すべき結果は, 安藏博士が初めて注意した直線部と曲線部の共存可能が理論的に肯定せられたことで, 而も其の直線部の厚さは(25)式の如く, 圆弧曲面と假定した場合の三分の二に當るのである。従つて前節第三項に述べた所論の内, 長い山腹で現存し得

(8) 前出(8)。

る風化土の厚さに就きて(9)式の値より餘り厚い土層はあり得まいと述べたことは、少しく修正して(25)式の値よりも餘り厚い風化土層はあるまいと改めねばならぬ。

尚ほ龜ヶ瀬地帯の深度は圓筒面と假定すれば 84~68 米となつたが、實は其の 2/3 に當る 59~45 米即ち 50 米内外と思はれる。又茶臼山の夫れは 22 米の代りに 15 米となるが萩原氏の實測と大差はない。茶臼山では 15~20 米の深さは岩盤になつ居るとのことで、風化土が(25)式よりも餘り厚い土層はあり得ぬことの一證となし得る様である。

IV. 結 論

以上私は

1). 從來の山崩れ理論を検討して、其の多くは迂り土塊の臨界平衡條件が只一部だけ使用せられ、必要にして充分なる條件全部を使用してないことを指摘した。従つて從來は問題が完全に解決されて居ないことを知つた。

2). 仍つて筆者は必要にして且つ充分なる平衡條件の全部を使用して、問題を再論した。

3). 迂り面を圓筒面と假定すれば、土塊の長さが其の厚さに比し非常に長大でなければ山崩れは起らぬ。又山崩れが起つた場合の厚さ h は

$$h = \frac{3}{2} \frac{c \sec \alpha}{w(\tan \alpha - \mu)},$$

w, μ, c = 土質の密度と摩擦及び粘着係數, α = 山腹の傾斜角

にて與へられることを知つた。

4). 迂り面は實は圓筒面ではないから、土塊を微小部分に分つて其の各部の崩落條件を吟味し、迂り面形狀を論じた。それによると、長い山腹では平面部と曲面部との連續した迂り面の成立可能なることが明かとなつた。而して其の厚さは平面部に於て

$$h_0 = \frac{c \sec \alpha}{w(\tan \alpha - \mu)}$$

となり、圓筒迂り面と假定せるものの 2/3 に當ることが分つた。

5). 此の結果は、長い山腹では風化土層が h_0 よりも餘り厚いものは實在し得ないことを暗示する。即ち風化が h_0 の厚さを超えると、山崩れが起つて崩落し、其の後に露出した岩盤が風化して h_0 以上になると復崩落するであらうからである。

6). h 或は h_0 の式は又、山崩れが降雨によつて促進される所以を了解するに役立つことを指摘した。

7). 尙ほ、鐵道省土質調査委員會の大和河畔龜ヶ瀬地に調査並に萩原尊禮氏の長野縣茶臼山地に調査報告を借用して、吾々の理論に照合して満足なる一致を見た。

8). 山崩れ防止策としては、從來とも擁壁の構設や排水施設其の他種々の方法が講ぜられて居るのであるが、私は茲に次の一項を加へたい。即ち先づ懸案地域に於ける風化土層の厚さを地球物理探査法によつて判定し、之を地中の臨界深度 η_0 に比較する。土層の厚さが η_0 より遙かに小さいならば不安はないが、 η_0 より大きい或は極めて夫れに近いならば、傾斜地の上端部を切り取つて下端部に移し傾角を緩和するなどの工作によつて、風化土の厚さを η_0 よりも一定安全率以下に低下せしめる。

本論文は文部省科學研究費の一部を使用して作製した。深謝の意を表する。