

複素力学系入門 I

諫山 哲生 (Tetsuo Isayama)

山形大学大学院理学研究科

ここに挙げるものは主に Steinmetz [4] を参照した。その詳細についてはそちらを読んで頂きたい。また、もう 1 冊、入門書として、Beardon [1] を挙げてあるが、両者の内容については重複する部分も多々ある。

1 準備

リーマン球面 C_∞ 上の次数 d が 2 以上の有理関数 (rational function) を考える。 f を有理関数とし、その反復合成 (iteration) を f^n で表す。また、 $f^0 = id.$, $f^{-n} = (f^n)^{-1}$ とする。点 $z (\in C_\infty)$ 及び、集合 $E (\subset C_\infty)$ に対して、それらの forward orbit をそれぞれ $O^+(z)$, $O^+(E)$ で表す。即ち、

$$O^+(z) = \{f^n(z) : n > 0\}, \quad O^+(E) = \bigcup_{n>0} f^n(E)$$

である。また、backward orbit をそれぞれ $O^-(z)$, $O^-(E)$ で表す。即ち、

$$O^-(z) = \{f^{-n}(\{z\}) : n > 0\}, \quad O^-(E) = \bigcup_{n>0} f^{-n}(E)$$

である。

Definition 1 local に 1 対 1 にならない点 (有限点なら即ち、関数 f の第 1 次導関数の零点) を f の critical point と呼び、それら全体の集合を $C_f = C$ で表す。また、 $O^+(C)$ の limit point の集合を critical limit set と呼び、 $C_f^+ = C^+$ で表す。そして、 $C_f^+ \cup O^+(C_f) = P_f (= P)$ を post critical set と呼ぶ。

有理関数の critical point は C_∞ 上に重複度も込めて $2d - 2$ 個あることが Riemann-Hurwitz の公式によって分かる。

Definition 2 関数 f に対して、

- (1) ある自然数 n が存在して $f^n(z_0) = z_0$ となるような点 z_0 を f の周期点 (periodic point) と呼び、そのような最小の n をその周期 (period) と呼ぶ。更に、集合 $\alpha = \{z_0, f(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0)\}$ を cycle と呼ぶ。特に、 $n = 1$ の時、 z_0 を f の固定点 (fixpoint) と呼ぶ。そして、周期 n の周期点 z_0 に対して、 $(f^n)'(z_0) = \lambda(\alpha) = \lambda$ をその multiplier と呼ぶ。

- (2) 点 z_0 が periodic でないが、ある自然数 q があって、 $f^q(z_0)$ が periodic となるとき、点 z_0 を f の前周期点 (preperiodic point) と呼ぶ。

Definition 3 空でない集合 $E \subset C_\infty$ に対して、 $f(E) \subseteq E$ が成り立つとき、 E を forward invariant set、また、 $f^{-1}(E) \subseteq E$ が成り立つとき、backward invariant set、そして、forward invariant かつ、backward invariant であるとき、即ち、 $f(E) = f^{-1}(E) = E$ が成り立つとき、completely invariant set と呼ぶ。

2 ファトウ集合とジュリア集合

関数 f に対して、点 z が normal であるとは f の iteration の列 (f^n) が z のある近傍で、normal になることである。

Definition 4 関数 f に対して、normal な点全体の集合をファトウ (Fatou) 集合と呼び、 $F(f) = F_f = F$ で表す。そして、その補集合をジュリア (Julia) 集合と呼び、 $J(f) = J_f = J$ で表す。また、ファトウ集合の連結成分 (component) を stable domain または、Fatou component と呼ぶ。

Definition 5 T をメビウス変換とし、有理関数 f に対して、 $g = TfT^{-1}$ とする。このとき、 f と g は conjugate であるという。

ファトウ集合とジュリア集合の簡単な性質を次に挙げる。

- ファトウ集合は (f^n) が normal になる最大開集合である。
- 有理関数のジュリア集合は C_∞ のコンパクト集合である。
- f, g が conjugate ならば、 $F_g = T(F_f)$ そして、 $J_g = T(J_f)$ である。

Definition 6 各 cycle をその multiplier λ により次のように分類する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{super attracting} \\ \text{attracting} \\ \text{indifferent} \\ \text{repelling} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ 0 < |\lambda| < 1 \\ |\lambda| = 1 \\ |\lambda| > 1 \end{array} \right.$$

更に、indifferent cycle α を次のように分類する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Leau cycle} \\ \text{Siegel cycle} \\ \text{Cremer cycle} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{ある自然数 } m \text{ に対して、} \lambda^m = 1 \\ \text{任意の自然数 } n \text{ に対して、} \lambda^n \neq 1 \text{ かつ、} \alpha \subset F \\ \text{任意の自然数 } n \text{ に対して、} \lambda^n \neq 1 \text{ かつ、} \alpha \subset J \end{array} \right.$$

また、Leau cycle は rationally indifferent と呼ばれ、Siegel 及び、Cremer cycle は irrationally indifferent と呼ばれる。

Theorem 1 ジュリア集合とファトウ集合は completely invariant set である。

Theorem 2 任意の自然数 p に対して、 $F_f = F_{f^p}, J_f = J_{f^p}$ である。

Theorem 1,2はファトウ集合及び、ジュリア集合の重要な性質である。また、Theorem 2の証明には有理型関数の families の有限個の union が normal であることと、これらの families の各々が normal であることが同値であることを利用すれば良い。

Theorem 3 (super)attracting cycle はファトウ集合に属し、repelling cycle はジュリア集合に属す。

Theorem 4 ジュリア集合は nowhere dense であるか、または、リーマン球面全体である。

「どのようなときに、ジュリア集合がリーマン球面全体になるのか？」の問いには theorem 23で答える。

Theorem 5 ジュリア集合は perfect set である。

Theorem 6 任意の $a \in J$ に対して、 $O^-(a)$ はジュリア集合で稠密である。

この性質はジュリア集合をコンピューターで描くことに利用できる。つまり、ジュリア集合に属する点を1つ見つけることができれば、その逆像を探すことで、その「近似」が描けるのである。

Theorem 7 可換な有理関数 f, g (即ち、 $f \circ g = g \circ f$) に対して、 $F_f = F_g, J_f = J_g$ である。

Theorem 8 全ての repelling cycles からなる集合はジュリア集合の稠密な集合である。

Julia 自身は

$$\overline{\{\text{全ての repelling cycles}\}}$$

でジュリア集合を定義した。

Theorem 9 D をジュリア集合と交わる domain とする。このとき、十分大きな全ての自然数 n に対して、

$$f^n(D \cap J) = J$$

が成り立つ。

Theorem 10 ジュリア集合は連結であるかまたは、非可算個の連結成分からなる。

Theorem 11 ジュリア集合の稠密な集合の任意の点 z に対して、その forward orbit $O^+(z)$ はジュリア集合の稠密な集合である。

Theorem 12 有理関数はその各 stable domain をある stable domain の上に写す。

Theorem 13 V_0 を stable domains の union で backward invariant なものとする。このとき、

$$J = \partial V_0$$

である。

Theorem 14 V を completely invariant stable domain とする。このとき、 $J = \partial V$ であり、ほかの全ての stable domain は単連結である。

Theorem 15 ファトウ集合が空集合でないなら、その stable domain の個数は、1、2 または、無限である。

Theorem 16 completely invariant stable domain は高々 2 つである。もし、2 つあるならば、それらは単連結であり、それぞれ、 $d - 1$ 個の critical points を持つ。

3 No wandering domain theorem と Classification theorem

Definition 7 V を f の stable domain とする。このとき、任意の自然数 $n, m (n \neq m)$ に対して、

$$f^n(V) \neq f^m(V)$$

が成り立つとき、 V を wandering domain と呼ぶ。また、ある自然数 p に対して、

$$f^p(V) = V$$

が成り立つとき、 V を periodic domain と呼ぶ。特に、 $p = 1$ のとき、 V を f の fixdomain と呼ぶ。更に、ある自然数 q に対して、 $f^q(V)$ が periodic domain になるが、 V は periodic domain でない時、preperiodic domain と呼ぶ。

次の Theorem 17 は有理関数の力学系を考える上で、非常に重要である。

Theorem 17 (No wandering domain theorem [5, 6]) 次数が 2 以上の有理関数は wandering domain を持たない。

No wandering domain theorem によって、任意の stable domain V は適当な iteration f^m で、ある periodic domain $W = f^m(V)$ に写される。従って、有理関数の力学系を見るには stable fixdomain を考えれば十分である。

Definition 8 V を f の stable fixdomain とする。

- (1) 列 (f^n) が $\bar{V}$ の固定点 a に V で局所一様収束する時、 V を Fatou domain と呼ぶ。そして、更に、

$$\left. \begin{array}{l} \text{super attracting basin} \\ \text{attracting basin} \\ \text{parabolic basin} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} a \in V \text{ かつ、} a \text{ が super attracting} \\ a \in V \text{ かつ、} a \text{ が attracting} \\ a \in \partial V \text{ かつ、} \lambda = 1 \end{array} \right.$$

ここに、 λ は a の multiplier である。

- (2) 列 (f^n) の V での全ての limit functions が定数にならない時、 V を rotation domain と呼ぶ。そして、更に、

$$\left. \begin{array}{l} \text{Siegel disc} \\ \text{Herman ring} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} V \text{ が単連結で indifferent fixpoint を含む。} \\ V \text{ が二重連結である。} \end{array} \right.$$

Theorem 18 (Classification Theorem [3]) f の任意の stable fixdomain は (super)attracting basin, parabolic basin, Siegel disc そして、Herman ring のいずれかである。

証明は V を stable fixdomain として

- i) V で non - constant な limit function が存在する。
- ii) V での全ての limit function が constant である。

の 2 つに分けて、それぞれ Fatou domain, rotation domain であることを示し、固定点、multiplier、連結度について調べる。

Theorem 19 (super)attracting, parabolic basin の各 cycle は、少なくとも、1 つ C_f の点を含む。そして、各 basin は単連結であるか、または、無限連結である。

Theorem 20 ジュリア集合に含まれる任意の indifferent cycle は C^+ に含まれる。

Theorem 21 有理関数の Siegel disc 及び、Herman ring の境界は C^+ に含まれる。

Theorem 19, 20, 21 から分かるように、critical point の挙動を見ることは非常に重要なことである。

Fatou は non-repelling な cycle の数の総和が高々 $4d - 4$ 個であることを示した。また、Fatou domain の cycle の数の総和が高々 $2d - 2$ 個であることが Theorem 19 の critical point に関する事実から分かる。そして、各 cycle の数の総和に関する最良の評価が次の定理である。

Theorem 22 (Shishikura [2]) $n_{\text{superattr}}, n_{\text{attr}}, n_{\text{Leau}}, n_S, n_H, n_{\text{Crem}}$ をそれぞれ super attracting cycle, attracting cycle, Leau cycle, Siegel cycle, Herman cycle, Cremer cycle の数とする。このとき、次の不等式が成り立つ。

$$n_{\text{superattr}} + n_{\text{attr}} + n_{\text{Leau}} + n_S + 2n_H + n_{\text{Crem}} \leq 2(d - 1)$$

$$n_H < d - 1.$$

特に、2 番目の不等式から、Herman ring は次数が 3 以上でなければ存在しないことが分かる。

Theorem 23 有理関数 f の全ての critical point が preperiodic で periodic でないとき、 $F_f = \phi$ である。

Definition 9 関数 f に対して、 $\mathcal{P}_f$ が有限集合のとき、 f を critically finite と呼ぶ。また、 $\mathcal{P}_f \cap J_f = \phi$ が成り立つとき、 f を hyperbolic と呼ぶ。

Definition 10 関数 f が J 上で、expanding であるとは、ある $\delta > 0$ と $\kappa > 1$ が存在して、任意の自然数 n と任意の点 $z(\in J)$ に対して、

$$|(f^n)'(z)| \geq \delta \kappa^n$$

が成り立つことである。

Theorem 24 関数 f が hyperbolic であることと expanding であることは必要十分である。

参考文献

- [1] Beardon, A.F., Iteration of rational functions, Springer., 1991.
- [2] Shishikura, M., On the quasiconformal surgery of rational functions, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 20 (1987), 1-29.
- [3] Steinmetz, N., On Sullivan's classification of periodic stable domains, Complex Variables 14 (1990), 211-214.
- [4] Steinmetz, N., Rational Iteration: Complex Analytic Dynamical Systems, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1993.
- [5] Sullivan, D., Itération des fonctions analytiques complexes, C.R.Acad.Sci.Paris 294(1982), 301-303.
- [6] Sullivan, D., Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Ann. of Math. 122(1985) 401-418.