

# Decomposable operators in continuous fields of Hilbert spaces

東北大 教養 武元英夫

## § 1. 序

Hilbert spaces の continuous fields 上の unbounded operators に対する decompose の話を進める。こゝでこの話は Stone [2] によって導入された Hilbert space における unbounded operators に対する characteristic matrix を示すことにより、Nuesbaum [3] の話を各 fibre が可分な separable なるものにまで拡張することである。

こゝでは次の様な記号、概念を用いていく。

- 1).  $\Omega$ ; Stonean space
- 2).  $C(\Omega)$ ;  $\Omega$  上の all complex-valued continuous functions の algebra
- 3).  $\{H(\omega); \omega \in \Omega\}$  は  $\Omega$  上の Hilbert spaces の field と (K 域、 $\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod H(\omega)$  は vector field と呼ぶ)。
- 4).  $\xi = \{\xi(\omega)\}, \eta = \{\eta(\omega)\}$  に対して、  
 $(\xi, \eta) : \omega \rightarrow (\xi(\omega) | \eta(\omega)), \quad |\xi| : \omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$

- 5).  $A = \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega))$  を operator field と呼ぶ  $\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod H(\omega)$  に對して  $A\xi \equiv \{A(\omega)\xi(\omega)\}$  によつて  $A\xi$  を定める。
- 6).  $C_F(\Omega, H(\omega))$  を [3] で定めた  $F$  を fundamental subspace とし、 $\mathcal{H}$  を continuous field of Hilbert spaces over  $\Omega$  とする。

こゝでは話の都合上、 $\Omega$  を Stonean space として話を進めて行くが、内容の多くはこれに限りかてはいない。

- 7).  $A : \mathcal{H} = C_F(\Omega, H(\omega))$  における operator で定義域  $\mathcal{D}(A)$  を持つものとする。この時、 $\mathcal{D}(A)$  は submodule で  $A$  は  $\mathcal{D}(A)$  上の  $C(\Omega)$ -module homomorphism であるとする。

## § 2. $S$ -closed operator.

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, H(\omega))$  における operator  $A$  が closed であるとは、Hilbert space における operator theory と同じく graph  $G(A) = \{\xi, A\xi : \xi \in \mathcal{D}(A)\}$  が closed になることである。更に closedness にもう少し条件をつけることによつて  $S$ -closed operator なるものを導入しよう。その前に幾つかの予えを使う。

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, H(\omega))$  : continuous field of Hilbert spaces over  $\Omega$ .

$S \subset \mathcal{H}$  : closed submodule

$S(\omega) = \{\xi(\omega) : \xi \in S\}$  for every  $\omega \in \Omega$ .

この時、次を得る。

補題 2.1.

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, \mathcal{H}(w))$  : continuous field of Hilbert spaces over  $\Omega$ .

$S \subset \mathcal{H}$  : closed submodule

$\Rightarrow$

$S(w)$  : closed subspace of  $\mathcal{H}(w)$ , for every  $w \in \Omega$ .

以上の事から次の概念を導入する。次の定義は Kaplansky [4] の  $AW^*$ -submodule に相当するが、我々の場合は  $\Omega$  が Stonean space であっても構わないことがおもしろい。

定義 2.2.

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, \mathcal{H}(w))$  : continuous field of Hilbert spaces over  $\Omega$ .

$S \subset \mathcal{H}$  : closed submodule

$S$  が continuous submodule であるとは  $S = C_S(\Omega, S(w))$  とはることをいう。

この時、我々は次の事を得る。

定理 2.3.

$\mathcal{H} = C_F(\Omega, \mathcal{H}(w))$  : continuous field of Hilbert spaces over  $\Omega$ .

$S \subset \mathcal{H}$  : closed submodule

この時、次の二つは同値である。

4

- (1)  $S$  は continuous submodule である。
- (2)  $\forall \xi \in \Pi S(\omega) \cup \omega \rightarrow \|\xi(\omega)\|$  : 有界,  $\forall \eta \in S$  に 대하여,  $\omega \rightarrow (\xi(\omega) | \eta(\omega))$  : 連続
- $\Rightarrow \xi \in S$ .

上の事は、次の事からも分る様に、 $H = C_F(\Omega, H(\omega))$  の projection を決定することになる。そして、Stone の  $\kappa$  の characteristic matrix を考える時  $\kappa$  はどうしても projection の話が必要となるので上の事と次の事を考えなければならぬ。

#### 系 2.4.

- $H = C_F(\Omega, H(\omega))$  : continuous field of Hilbert spaces over  $\Omega$ .
- $S \subset H$  : continuous submodule
- $\Rightarrow \exists p$  : projection,  $p\xi = \xi$  for  $\forall \xi \in S$ .
- 逆に、 $p \in B(H)$  を projection (ie.  $p^2 = p$ ,  $p^* = p$ ) とすると  $S = pH$  は continuous submodule となる。

$H_i = C_{F_i}(\Omega, H_i(\omega))$  ( $i=1, 2$ ) : continuous fields of Hilbert spaces

$H_1 \oplus H_2$  :  $H_1$  と  $H_2$  の direct sum

$\{\xi_1, \xi_2\} \in H_1 \oplus H_2$ ,  $\{\eta_1, \eta_2\} \in H_1 \oplus H_2$ ,  $\lambda \in C(\Omega)$  に 대하여

$$(\{\xi_1, \xi_2\}, \{\eta_1, \eta_2\}) = (\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2)$$

$$z\{\xi_1, \xi_2\} = \{z\xi_1, z\xi_2\},$$

$$\|\{\xi_1, \xi_2\}\| = \| |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 \|^{1/2}$$

すなわち,  $H_1 \oplus H_2$  は  $C(\Omega)$ -moduled normed space となる。更に、  
簡単は計算 2 次 の 事 が わかる。

### 命題 2.5.

$H_i = C_F(\Omega, H_i(\omega))$  ( $i=1,2$ ): continuous fields of Hilbert spaces over  $\Omega$ .

$\Rightarrow$

$$H_1 \oplus H_2 = C_{F_1 \oplus F_2}(\Omega, H_1(\omega) \oplus H_2(\omega)).$$

$A$ : operator with the domain  $\mathcal{D}(A)$  in  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ .

(1)  $A$ : closed extension  $\exists \neq \emptyset$ .

$$\text{Def. } \{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset \mathcal{D}(A); \lim \xi_n = \lim \eta_n$$

$$\text{if } \exists \lim A\xi_n, \exists \lim A\eta_n \Rightarrow \lim A\xi_n = \lim A\eta_n$$

$\Sigma$  の 時,  $\overline{G(A)}$  in  $H \oplus H$  が  $\exists$  operator  $\bar{A}$  a graph となる。  $\bar{A}$  は  $A$  の closure となる。

(2)  $A^*$ :  $(A\xi, \eta) = (\xi, \eta^*)$  for  $\forall \xi \in \mathcal{D}(A)$  なる  $\eta, \eta^*$  が存在する

時,  $A^*\eta = \eta^*$  とおく。

(3)  $\tilde{\mathcal{D}}(A) = \{ \xi = \sum e_a \xi_a : \begin{matrix} \{\xi_a\} \subset \mathcal{D}(A) : \text{b.d.d.} \\ \{A\xi_a\} : \text{b.d.d.} \end{matrix} \}$

$$\tilde{A} : \tilde{\mathcal{D}}(A) \rightarrow H \oplus H, \tilde{A}(\sum e_a \xi_a) \equiv \sum e_a A\xi_a$$

6

とある時、 $B \supset A$ ,  $G(B)$  が  $H \oplus H$  での continuous submodule かつ  
 $s$  operator  $B$  が存在すれば  $B \supset \hat{A}$  となり、更に  $\hat{A}$  の closure  $\overline{\hat{A}}$   
 に対して、 $G(\overline{\hat{A}})$  は  $H \oplus H$  での continuous submodule となる。

### 定義 2.6.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$ : continuous field of Hilbert spaces

$A$ : 定義域  $D(A)$  を持つ operator

- (1)  $A$ :  $s$ -closed operator  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} G(A)$ : continuous submodule in  $H \oplus H$
- (2)  $A$ :  $s$ -closure を持つ  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \hat{A}$  が closed extension を持つ。

とある時、 $A$  の  $s$ -closure を  $\overline{A^s}$  とかくと  $\overline{A^s} = \overline{\hat{A}}$  となる。

$A^*$  の def. を前に述べたが、 $\widehat{D}(A)$  が  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$  での dense であるならば  $A^*$  は定義される。しかも、この時、 $A^*$  は常に  $s$ -closed operator となる。

次に、Hilbert space 上の operator theory から次の事柄が簡単に  
 に導かれることがわかる。

### 命題 2.7.

- (1)  $A$ :  $\widehat{D}(A)$  が  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$  での dense な  $s$ -closed op.  $\Rightarrow A = A^{**}$
- (2)  $A$ :  $\widehat{D}(A)$  が dense かつ  $\hat{A}$  が closure を持つ  
 $\Rightarrow \exists A^{**}, \overline{G(\hat{A})} = G(A^{**})$ .

§ 3.  $S$ -closed operator に対する characteristic matrix.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$  に対し,  $S \in H \oplus H \rightarrow H \oplus H$  の bounded  $(\Omega)$ -module homomorphism (すなわち単に  $H \oplus H$  上の bounded operator と呼んでいい) とする。今  $H \oplus 0, 0 \oplus H$  が共に  $H \oplus H$  の continuous submodule になっているから,  $H \oplus H$  から  $H \oplus 0, 0 \oplus H$  への projection がそれぞれ存在している。そこでそれぞれ  $E_1, E_2$  とおく。今  $S'_{ij} = E_j S E_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) とすると

$$S'_{11} : H \oplus 0 \rightarrow H \oplus 0, \quad S'_{12} : H \oplus 0 \rightarrow 0 \oplus H$$

$$S'_{21} : 0 \oplus H \rightarrow H \oplus 0, \quad S'_{22} : 0 \oplus H \rightarrow 0 \oplus H.$$

すなわち  $H \oplus 0, 0 \oplus H$  を共に  $H$  と同じものとしておくと、それぞれ  $S'_{ij}$  は  $H \rightarrow H$  への operator として見たものが  $S_{ij}$  とおく。すると

$$S : \{\xi_1, \xi_2\} \rightarrow \{S_{11}\xi_1 + S_{12}\xi_2, S_{21}\xi_1 + S_{22}\xi_2\}$$

となる。そこで  $S = (S_{ij})$  とおくと、 $S$  は matrix representation と呼ぶことにする。

$M : H \oplus H = C_{F \oplus F}(\Omega, H(\omega) \oplus H(\omega))$  の continuous submodule

$P : H \oplus H \rightarrow M$  projection

$P = (P_{ij}) : P$  a matrix representation

この時、次の事が示される。

命題 3.1.  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ : continuous field of Hilbert spaces

$M$ :  $H \oplus H$  の continuous submodule

$P = (P_{ij})$ :  $H \oplus H \rightarrow M$  projection

$\xi$  の時,

$$\exists A: s\text{-closed operator, } G(A) = M \iff P_{12} \xi = (I - P_{22}) \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0.$$

上の条件が成り立つ時,  $A$  は次の形で一意に定まる.

$$A: P_{11} \xi_1 + P_{12} \xi_2 \rightarrow P_{21} \xi_1 + P_{22} \xi_2, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in H.$$

すなわち,  $P_{21} = A P_{11}$ ,  $P_{22} = A P_{12}$  となる.

定義 3.2.

$A: H = C_F(\Omega, H(\omega))$   $\omega$  の  $s$ -closed operator.

$P: H \oplus H \rightarrow G(A)$ , projection.

$P$  の matrix representation  $(P_{ij})$  を  $A$  の characteristic matrix とする.

すると, characteristic matrix に対して, 次の性質が成り立つ.

命題 3.3.

$(P_{ij})$ :  $s$ -closed operator  $A$  の characteristic matrix.

if  $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ :  $s$ -closed operator.

$(Q_{ij})$ :  $A^{-1}$  の characteristic matrix

$$\Rightarrow Q_{11} = P_{22}, \quad Q_{12} = P_{21}, \quad Q_{21} = P_{12}, \quad Q_{22} = P_{11}.$$

命題 3.4.

$(P_{ij}), (Q_{ij})$ : 夫々  $A, A^*$  の characteristic matrix

$$\Rightarrow Q_{11} = I - P_{22}, \quad Q_{12} = P_{21}, \quad Q_{21} = P_{12}, \quad Q_{22} = I - P_{11}.$$

## § 4. Decomposable operators.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$ : continuous field of Hilbert spaces.

次の事柄は [3] で示すことができる。

$$(1) \quad A \in B(H) \text{ に } \exists \text{ して } \exists \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega)) : \forall \xi, \eta \in H, ((A\xi)(\omega) | \eta(\omega)) = (A(\omega)\xi(\omega) | \eta(\omega)), \text{ for } \forall \omega \in \Omega.$$

$$(2) \quad \{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega)) \Rightarrow \omega \rightarrow \|A(\omega)\| : \text{bounded}, \forall \xi \in H \text{ に } \exists \text{ して } \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H$$

$$\Rightarrow \exists A \in B(H) : \forall \xi, \eta \in H, ((A\xi)(\omega) | \eta(\omega)) = (A(\omega)\xi(\omega) | \eta(\omega)), \forall \omega$$

(1) の  $\prod B(H(\omega))$  の  $\{A(\omega)\}$  は decomposable といふ, (2) の  $\{A(\omega)\}$  は operator field が continuous であるといふ呼んで来た。(1) から  $B(H)$  の元は operator field として考えられ, (2) の  $\{A(\omega)\}$  は  $B(H)$  の元として考えられるといふことを云うてゐる。

この節では, closed operators にして, 上の (1), (2) に相当することを考える。さらに, §3 で導入した  $s$ -closed operator の characteristic matrix の概念を使用する。

補題 4.1.  $S = \{S(\omega)\} \in B(H)$  : self-adjoint

$\exists S(\omega)^{-1}$  for  $\forall \omega \in \Omega$  (if  $\|S(\omega)^{-1}\|$  is bounded & (b)  $\frac{1}{\|S(\omega)^{-1}\|} \rightarrow \infty$ .)  
 then,  
 $\forall \xi \in H \rightarrow \xi(\omega) \in D(S(\omega)^{-1}), \forall \omega \in \Omega, \omega \rightarrow \|S(\omega)^{-1}\xi(\omega)\| : \text{bounded}$   
 $\Rightarrow \{S(\omega)^{-1}\xi(\omega)\} \in H = C_F(\Omega, H(\omega)).$

定理 4.2.  $\{A(\omega)\} : \text{closed operators on field.}$

$\{P_{ij}(\omega)\} : A(\omega) \text{ の characteristic matrix.}$

$\{P_{ij}(\omega)\} (i, j = 1, 2) : \text{continuous}$

$\xi \in H : \xi(\omega) \in D(A(\omega)), \forall \omega \in \Omega, \omega \rightarrow \|A(\omega)\xi(\omega)\| : \text{bounded}$

$\Rightarrow \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H = C_F(\Omega, H(\omega))$

定理 4.3.  $H = C_F(\Omega, H(\omega)) : \text{continuous field of Hilbert spaces}$

$\{A(\omega)\} \in \prod B(H(\omega)) : \omega \rightarrow \|A(\omega)\| \text{ is bounded.}$

$\{P_{ij}(\omega)\} : A(\omega) \text{ の characteristic matrix.}$

このとき、次は同値である。

(1)  $\{A(\omega)\} : \text{continuous.}$  (2)  $\{P_{ij}(\omega)\} (i, j = 1, 2) : \text{continuous.}$

定義 4.4.  $\{A(\omega)\} : \text{closed operators on field.}$

$\{P_{ij}(\omega)\} : A(\omega) \text{ の characteristic matrix.}$

field  $\{A(\omega)\}$  が continuous であるとは、各 field  $\{P_{ij}(\omega)\}$  が continuous になることである。

上の定義が意味をもつことは、定理4.3 で示した様に、  
 bounded operators a field に対して、今まで知られてゐるものと  
 同値になることがわかる。

$\{A(\omega)\}$  : closed operators a field, continuous.

$E \equiv \{\xi \in H : \xi(\omega) \in D(A(\omega)), \forall \omega \in \Omega, \omega \rightarrow \|A(\omega)\xi(\omega)\| : \text{bounded}\}$

この時、 $E$  は submodule となる。定理4.2 から  $E$  の  $\xi$  に対して、  
 $\eta = \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H = C_f(\Omega, H(\omega))$  であるから残りの次の  
 様に  $A$  : operator in  $H = C_f(\Omega, H(\omega))$  を定義することが出来る。

$A : A\xi \equiv \eta$  where  $\eta = \{A(\omega)\xi(\omega)\}$ ,  $\xi \in E$ .

すると、次の事がわかる。

定理4.5.  $\{A(\omega)\}$  : continuous field of closed operators.

$\Rightarrow A$  : s-closed operator.

$D(A) = E$ . where  $A, E$  は前に定められたもの。

系4.6.  $\{A(\omega)\}, \{B(\omega)\}$  : continuous field of closed operators

if  $\{A(\omega)\} = \{B(\omega)\} \Rightarrow A(\omega) = B(\omega)$ , for  $\forall \omega \in \Omega$ .

系4.7.  $\{A(\omega)\}$  : continuous field of closed operators.

$D(A(\omega))$  : dense in  $H(\omega)$  ( $\forall \omega$ ),  $A = \{A(\omega)\}$  (定理4.5の意味で)

②  $\{A(\omega)^*\} : \text{continuous}, \quad A^* = \{A(\omega)^*\}.$

以上の事柄は continuous の定義に従って, characteristic matrix の性質を調べていくとわかる.

$\{A(\omega)\}$  が closed operators の continuous field の時は  $S$ -closed operator  $A \rightarrow D(A) = \{\xi \in H : \xi(\omega) \in D(A(\omega)), \{\|A(\omega)\xi(\omega)\|\}^p \text{ 有界} \}$ ,  $D(A(\omega)) = \{\xi(\omega) : \xi \in D(A)\}$ ,  $(A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega) \quad \forall \xi \in D(A), \omega \in \Omega$  なるものが存在した。これから, <sup>(cont)</sup> closed op.'s の field は  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$  において  $S$ -closed operator として考えらる。次に,  $S$ -closed operator が closed operators の field に分解出来るかということを考えて行く。

定義 4.8.  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ : continuous field of Hilbert spaces.

$A$ : 定義域  $D(A)$  上  $S$ -closed operator.

$A$  が decomposable であるとは, closed operators の continuous field  $\{A(\omega)\}$  が存在して,  $A = \{A(\omega)\}$  となることである。

我々は全ての  $S$ -closed operator が decomposable であるとはいいが残念ながら次の例でも分る様に, 定義域から generate される continuous submodule が全体であっても decomposable ではない  $S$ -closed operator の例を作ることが出来る。

例 4.9.

$H = C_F(\beta N, H(\omega))$ ,  $\beta N$ :  $N$  の Stone-Čech compactification.

$\mathcal{K}$  は center が  $C(\beta N)$  となる 標尺 type I von Neumann algebra を持つ  $\mathcal{K}$  と  $\mathcal{K}$  の  $H$  の存在がわかる。

$f \in C(\beta N)$ :  $f(\omega) = \frac{1}{n}$ ,  $f(\omega) = 0$  for  $\omega \in \beta N \setminus N$ .

$D = fI$ , i.e.  $\forall \xi \in H$ ,  $(D\xi)(\omega) = f(\omega)\xi(\omega) \Rightarrow 0 \leq D \leq I$ .

$$\text{今 } P = \begin{pmatrix} D & (D(I-D))^{1/2} \\ (D(I-D))^{1/2} & D \end{pmatrix}$$

とすると,  $P$  は self-adjoint. 命題 3.1 が示される。従って,  $P$  は characteristic matrix として 標尺  $s$ -closed operator  $A$  が存在する。1°  $\omega \in \beta N \setminus N$  に対して  $D(\omega) = 0$  であるから  $A$  は decomposable になることがわかる。

2°  $\mathcal{K}$ . 定義域が  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$  で dense になる 標尺  $s$ -closed operator であるから, 次の定理に話されるように,  $\mathcal{K}$  は decomposable となる。

定理 4.10.  $C_F(\Omega, H(\omega)) = H$ : continuous field of Hilbert spaces.

$A$ : densely defined  $s$ -closed operator in  $H$

$\Rightarrow$

$A$ : decomposable.

## § 5. 応用.

前節で densely defined  $s$ -closed operator は decomposable と  
なることを示した。逆に,  $\{A(\omega)\}$  を closed operators の continuous  
field で 各  $A(\omega)$  が densely defined であるならば  $A = \{A(\omega)\}$   
は densely defined  $s$ -closed operator となる。

この節では densely defined  $s$ -closed operator には必ず  
polar decomposition があることを示す。その前に, densely def.  
self-adjoint, positive operator には必ず  $\sqrt{\phantom{x}}$  の square  
root が存在することを示す。

補題 5.1.  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$ : continuous field of Hilbert spaces

$A$ : densely defined  $s$ -closed operator.

$\Rightarrow$

$A^*A$ : self-adjoint, positive;  $A^*A = \{A(\omega)^*A(\omega)\}$ .

定理 5.2.

$A = \{A(\omega)\}$ :  $H = C_F(\Omega, H(\omega))$  上 self-adjoint, positive operator

$\Rightarrow$

$\exists B = \{B(\omega)\}$ : self-adjoint, positive,  $B^2 = A$ .

$\Sigma = \Sigma^*$ .  $A^*A$  の square root を  $|A|$  と書いて  $A$  の 絶対値 と云う。



上の話の中で、Hilbert space における operator theory と同様  
に、 $\mathcal{D}(|A|) = \mathcal{D}(A)$  なることを証明している。

以上の事より次の定理を得る。

定理 5.3.

$H = C_F(\Omega, H(\omega))$  : continuous field of Hilbert spaces.

$A = \{A(\omega)\}$  : densely defined  $s$ -closed operator.

$\Rightarrow$

$\exists V$  : partially isometrical operator,  $A = V|A|$ .

References.

- [1] A. Nuesbaum ; Duke Math. J., 31(1964), 33-44.
- [2] M. Stone ; J. of the Indian Math. Soc., 15(1951), 155-192.
- [3] H. Takemoto ; Michigan Math. J., 20(1973), 115-127.
- [4] I. Kaplansky ; Amer. J. Math., 75(1953), 839-858.