

Decomposable and Spectral Operators on Hilbert Spaces

東北薬科大学 棚橋浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)

東北大・教養 吉野 崇 (Takashi Yoshino)

§ 1. 序

Dunford が研究した, スペクトル分解をもつ *spectral operator* の1つの拡張として, Foias は *decomposable operator* を, また更に広々クラスとして Tafarian は *weak decomposable operator* を提唱した。ここでは, この間の関係を調べるのが目的である。

Wadhwa [8] は, 複素ヒルベルト空間上の *decomposable operator* は条件 (I) をもてば *Spectral operator* であることを示した。ここでは, この結果を利用して, *weak decomposable operator* が *spectral operator* となる必要十分条件がえられたのでそれを報告する。なお, *spectral operator* については [3], *decomposable operator* については [2], *weak decomposable operator* については [5] を参照してほしい。

§ 1. 準備

複素ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素の全体を $B(H)$ とおく。 $T \in B(H)$ のスペクトルを $\sigma(T)$, また, その不変部分空間の全体を $\text{Lat}(T)$ とかく。

定義 1. $Y \in \text{Lat}(T)$ が *spectral maximal* とは $Z \in \text{Lat}(T)$, $\sigma(T|Z) \subset \sigma(T|Y) \Rightarrow Z \subset Y$ になりたつときをいう。 T の *spectral maximal space* の全体を $\text{SM}(T)$ とかく。

定義 2. $T \in B(H)$ が *decomposable* とは, 任意有限個からなる $\sigma(T)$ の *open covering* $\{G_1, \dots, G_n\}$ に対し, ある *spectral maximal space* の系 $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ が存在して (i) $H = Y_1 + \dots + Y_n$ (ii) $\sigma(T|Y_i) \subset G_i$ をみたすときをいう。 また, この定義で, (ii) の代りに (ii)' $H = \overline{Y_1 + \dots + Y_n}$ (— は閉包を表わす) をみたすとき, T は *weak decomposable* であるという。

定義 3. $T \in B(H)$ が条件 (A) をもつとは

$$f: \text{analytic} \quad (z - T) f(z) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

が成立するときをいう。 このとき, すべての $x \in H$ に対して, $(z - T)x(z) \equiv x$ となる *analytic* $x(z)$ が存在するような最大の開集合 $\rho_T(x)$ が定まる。 この

とき, x の局所スペクトルを $\sigma_T(x) = p_T(x)^c$ と定める。また, 集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対し, $H_T(E) = \{x \in H \mid \sigma_T(x) \subset E\}$ とおく。 $H_T(E)$ は T -不変な線形集合であるが, 関, つまり部分空間とは限らない。

定義 4. (A) をもつ T が条件 (B) をもつとは $\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \emptyset \Rightarrow \|x\| \leq K \|x+y\|$ をみたす定数 $K > 0$ が存在するときをいう。

定義 5. (A) をもつ T が条件 (C) をもつとは, すべての関集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $H_T(F)$ が関となるときをいう。

定義 6. (A), (C) をもつ T が条件 (I) をもつとは, $\sigma_T(P_F x) \subset \sigma_T(x)$ がすべての関集合 $F \subset \mathbb{C}$ とすべての $x \in H$ に対し成り立つときをいう。ただし P_F は $H_T(F)$ への orthogonal projection である。

注意 1. weak decomposable operator は条件 (A) をもち, decomposable operator は (A), (C) をもつことが知られている ([2], [5])。また $T \in B(H)$ が (A), (C) をもつとき, すべての関集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して, $H_T(F) \in SM(T)$ で, また, $\sigma(T|_{H_T(F)}) \subset F$ がなり立つ ([2])。

§ 3. 結果

まず, Lemma を3つ準備する。

Lemma 1. $T \in B(H)$ が weak decomposable で
そのすべての spectral maximal space が T を reduce
するなら, T は (C) をもつ。

証. 任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して, 開集合
 $G \supset F^c$ をとる。すると $\{F^c, G\}$ は $\sigma(T)$ の
open covering だから

$H = \overline{Y_1 + Y_2}$, $\sigma(T|Y_1) \subset F^c$, $\sigma(T|Y_2) \subset G$
となる $Y_1, Y_2 \in SM(T)$ が存在する。任意の
 $x \in H_T(F)$ を固定する。すると

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$$

となる $x_n^{(1)} \in Y_1$, $x_n^{(2)} \in Y_2$ が存在する。こ
で Y_1 への orthogonal projection を P とおくと、仮
定から, $PT = TP$ だから,

$$\sigma_T(Px) \subset \sigma_T(x) \cap \sigma(T|Y_1) \subset F \cap F^c = \emptyset$$

従, て $Px = 0$ となる。よ, て

$$0 = Px = \lim_{n \rightarrow \infty} (Px_n^{(1)} + Px_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} + Px_n^{(2)})$$

よ, て

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) - \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} + Px_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(2)} - Px_n^{(2)})$$

となる。ここで Y_2 は *hyperinvariant* ([2, Proposition 1.3.2]) だから, $x \in Y_2$ となる。よって

$$H_T(F) \subset Y_2 \subset H_T(\sigma(T|Y_2)) \subset H_T(G)$$

となるが, $G \supset F$ は任意だから, ためて,

$$H_T(F) \subset \bigcap Y_2 \subset \bigcap H_T(G) = H_T(\bigcap G) = H_T(F)$$

となる。従って $H_T(F) = \bigcap Y_2$ は閉である。

Lemma 2. $T \in B(H)$ が *weak decomposable* で (B) をもち, すべての閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $\overline{H_T(F)}$ が T を *reduce* するならば, T は (C) をもつ。

証. 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して, 開集合 $G \supset F$ をとる。すると $\{F^c, G\}$ は $\sigma(T)$ の *open covering* だから,

$$H = Y_1 + Y_2, \quad \sigma(T|Y_1) \subset F^c, \quad \sigma(T|Y_2) \subset G$$

となる $Y_1, Y_2 \in SM(T)$ が存在する。任意の

$x \in H_T(F)$ を固定する。すると

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$$

となる $x_n^{(1)} \in Y_1, x_n^{(2)} \in Y_2$ が存在する。ここ

で $\overline{H_T(F)}$ への *orthogonal projection* を P とおくと,

仮定から $PT = TP$ である。

$$x = Px = \lim_{n \rightarrow \infty} (Px_n'' + Px_n^{(2)})$$

となる。ここで Y_1 は T で hyperinvariant だから、

$$Px_n'' \in Y_1 \cap \overline{H_T(F)} \subset H_T(F^c) \cap \overline{H_T(F)}$$

である。実は $H_T(F^c) \cap \overline{H_T(F)} = \{0\}$ を示そう。

もし $y \in H_T(F^c) \cap \overline{H_T(F)}$ なら $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ となる $y_n \in H_T(F)$ が存在する。ここで、

$\sigma_T(x) \cap \sigma_T(-y_n) \subset F^c \cap F = \emptyset$ より条件 (B) から

$$\|y\| \leq K \|y - y_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって $y = 0$ である。従って $Px_n'' = 0$ より

$x = \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n''$ となるが、 Y_2 は T で

hyperinvariant だから、 $x \in Y_2$ 、よって

$H_T(F) \subset Y_2 \subset H_T(G)$ となる。以下は Lemma

1 の証明と同じである。

Lemma 3. $T \in B(H)$ が weak decomposable で (C), (I) をもつなら、 T は decomposable である。

証. 任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し、 $H =$

$H_T(F) + H_T(\overline{F}^c)$ となることを示せば T が decomposable であることが容易にわかる。ここで、 $H = H_T(F) \oplus H_T(F)^\perp$ だから $H_T(F)^\perp \subset H_T(\overline{F}^c)$ を示せばよい。開集合 $G \supset F$ を任意にとると $\{F^c, G\}$ は $\sigma(T)$ の open covering だから

$H = \overline{Y_1 + Y_2}$, $\sigma(T|Y_1) \subset F^c$, $\sigma(T|Y_2) \subset G$ となる $Y_1, Y_2 \in SM(T)$ が存在する。さて

$x \in X_T(\overline{G})^\perp$ を任意にとると $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$ となる $x_n^{(1)} \in Y_1$, $x_n^{(2)} \in Y_2$ が存在する。よって
 $0 = P_{\overline{G}} x = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{\overline{G}} x_n^{(1)} + P_{\overline{G}} x_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{\overline{G}} x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$
 , 従って

$x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) - \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{\overline{G}} x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} - P_{\overline{G}} x_n^{(1)})$
 となる。ここで

$$\sigma_T(P_{\overline{G}} x_n^{(1)}) \subset \sigma_T(x_n^{(1)}) \subset \sigma(T|Y_1) \subset F^c$$

だから $x_n^{(1)} - P_{\overline{G}} x_n^{(1)} \in H_T(\overline{F}^c)$, 従って $x \in H_T(\overline{F}^c)$ である。よって $H_T(\overline{G})^\perp \subset H_T(\overline{F}^c)$ だから、 $H_T(\overline{G}) \supset H_T(\overline{F}^c)^\perp$ となるが $G \supset F$ は任意なので

$H_T(F) = H_T(\cap \overline{G}) = \cap H_T(\overline{G}) \supset H_T(\overline{F}^c)^\perp$
 , 従って $H_T(F)^\perp \subset H_T(\overline{F}^c)$ となる。

Theorem. $T \in B(H)$ に対し次は同値である。

- (1) $T = N + Q$ となる normal operator N と N と可換な quasinilpotent operator Q が存在する。
- (2) T は weak decomposable で (C), (I) をもつ。
- (3) T は weak decomposable で, すべての spectral maximal space は T を reduce する。
- (4) T は weak decomposable で (B) をもち, 任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $\overline{H_T(F)}$ は T を reduce する。

証. (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1), (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) となることを示す。

(1) $\Rightarrow$ (4), (3). この証明は知られているが, 簡単に示す。詳しくは [2], [3] をみてほしい。

(1) より T は scalar part が normal な spectral operator であることがわかるので, T は decomposable で (A), (B), (C) をもつ。 $E(\cdot)$ を N のスペクトル分解とすると, 任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し

$$H_T(F) = H_N(F) = E(F)H$$

なので $H_T(F)$ は T を reduce する。また任意の $Y \in SM(T)$ は $Y = H_T(\sigma(T)Y)$ と表わせるので, Y は T を reduce する。

(4) $\Rightarrow$ (2). Lemma 2 より T は (C) をもつことが分る。また任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し、
 $P_F T = T P_F$ となることから、 T が (I) をもつことが容易に分る。

(2) $\Rightarrow$ (1). Lemma 3 より T は decomposable operator で (I) をもつことがわかる。従って Wadhwani [7] より $T = N + Q$ となる。

(3) $\Rightarrow$ (2). Lemma 1 より T は (C) をもつから、任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し、 $H_T(F) \in SM(T)$ となる。従って $P_F T = T P_F$ だから T は条件 (I) をもつことが分る。

ここで、 $T \in B(H)$ が spectral operator となる必要十分条件は、この定理の (1) をみたす $S \in B(H)$ と similar になることだから、次が得られる。([3])

Corollary. $T \in B(H)$ が spectral operator となる必要十分条件は、 T が定理の (1) ~ (4) のいずれかをみたす $S \in B(H)$ と similar になることである。
 。

注意 2. 条件 (I) は Wadhwa [8] で導入された。Tafarian [6] は定理の (2) $\Rightarrow$ (1) を, T が *reductive* という条件の下で示した。また Tanahashi [7] は、定理の (3) $\Rightarrow$ (1) を T が *reductive* という条件の下で示した。

注意 3. 複素バナッハ空間 $X = L^\infty[0, 1]$ 上で、かけざん作用素 $T \in B(H)$

$$(Tx)(t) = tx(t) \quad , \quad t \in [0, 1], \quad x \in X$$

を考える。すると [4, p 106] と同じようにして,

T は *decomposable operator* で, $x \in X$ に対し

$\sigma_T(x) = \text{ess. sup } x$ であることが示される。こ

で、通例のように閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して $H_T(F)$ を

$X_T(F)$ と表わすとする。すると任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $\chi_F(t)$ を F の特性関数とすると、

$$(P_F x)(t) = \chi_F(t) x(t) \quad , \quad t \in [0, 1]$$

で定められる作用素 $P_F \in B(X)$ は $X_T(F)$ の

projection で $P_F T = T P_F$ をみたす。(もちろん

P_F は *self-adjoint* ではないが。) 従って $X_T(F)$ は T を *reduce* し, T は (I) をもつことがわかる。

しかも, もし $\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \emptyset$ なら,

$$|x(t) + y(t)| = |x(t)| + |y(t)| \quad \text{a.e. } [0, 1]$$

だから, $\|x + y\| \geq \|x\|$, つまり T は (B) をもつ。

しかし, T は spectral operator ではない。なぜなら, T が spectral operator なら, その spectral measure $E(\cdot)$ を考えると, すべての $x \in X$ に対し

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ 但、 } x_n = E(\{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1])x$$

となるはずである。 $x(t) \equiv 1$ を考えよう。すべての開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して $E(F)x = x_T(F)$ となるので

$$\sigma_T(x_n) = \text{ess. supp } x_n \subset \{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1]$$

となる。従って, すべての n に対して

$$\|x - x_n\| = 1$$

となつて, これは、矛盾である。従って, この場合には定理に対応する結果が成立しない。

参考文献

[1] E. Albrecht, A characterization of spectral operators on Hilbert Spaces, Glasgow Math. J. 23 (1982) 91-95.

[2] I. Colojoard and C. Foias, Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach,

New York, 1971.

[3] N. Dunford and J. Schwartz, Linear operators part III: spectral operators, Wiley-Interscience, New York, 1968.

[4] I. Erdelyi and R. Lange, Spectral decomposition on Banach spaces, Lecture Note in Math. 623, Springer, Berlin, 1977.

[5] A. A. Jafarian, Weak and quasi-decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 22 (1977) 195-212.

[6] A. A. Jafarian, On reductive operators, Indiana University Math. J. 23 (1974) 607-613.

[7] K. Tanahashi, Reductive weak decomposable operators are spectral, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983) 44-46.

[8] B. L. Wadhwa, Decomposable and spectral operators on a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973) 112-114.

[9] B. L. Wadhwa, A note on reductive operators, Acta Sci. Math. 38 (1976) 187-189.