

## Dispersivity に関する注意

東京教育大 佐藤健一

### §1. Dispersivity の定義.

$E$  を Banach 束とする. すなわち,  $E$  は実 Banach 空間  $E_x$  の束  $\pi: E \rightarrow X$  であって, (i)  $f \geq g$  ならば  $f + h \geq g + h$ , (ii)  $f \geq g$  かつ  $a \in \mathbb{R}^+$  (非負の実数の全体) ならば  $af \geq ag$ , (iii)  $f \geq g$  ならば  $-f \leq -g$ , (iv)  $|f| \geq |g|$  ならば  $\|f\| \geq \|g\|$  という4つの性質をもつとする. 次の記号を用いる:

$$f \vee g = \sup \{f, g\}, \quad f \wedge g = \inf \{f, g\},$$

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = -(f \wedge 0), \quad |f| = f \vee (-f).$$

一般の Banach 空間における線形作用素の半群に代しては, Hille-Young の定理が基本的な結果であるが, 確率論等では実際には便利な Banach 空間は概ね Banach 束である. 半群の非負性が重要である. R. S. Phillips [2] はこれに基いて,  $E$  における作用素が線形作用素の強連続非負縮小半群 (半群  $\{T_t\}$  が  $\|T_t\| \leq 1$  をみたす縮小半群 (contraction semigroup) という) の全体  $\mathcal{A}$  上の半群  $\mathcal{A}$  上の  $\mathcal{A}$  の seminner-product の群作用素を用いて  $\mathcal{A}$  の

これには自由性がありまた Hahn-Banach の定理を用いて  
抽象的に定義されるので、具体的な函数空間を扱うのに不便  
である。この長谷川 [1] は semi-inner-product の性質  
に

$$\tau'(f, g) = 2^{-1}(\tau(f, g) - \tau(f, -g))$$

を用いて

$$\tau(f, g) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}(\|f + \varepsilon g\| - \|f\|)$$

を用いることに着目し、Phillips の結果に類似の結果を証  
明した。

本稿上の問題を考えたと、長谷川 [1] の  $\tau'(f, g)$  なる  
次のような内積

$$\sigma(f, g) = \inf \tau(f, (g+r) \vee (-rf)), \quad f \geq 0$$

を新元に導入するのが便利である。さらに  $\inf$  は、 $f \wedge |g|$   
 $= 0$  を満たすような  $r$  と、すべての  $r \in \mathbb{R}^+$  についてとる。

この  $\sigma$  は次のような性質をもつことを証明する。

命題 1.1.  $f \geq 0$  とする。

$$(i) \quad -\|g^-\| \leq \sigma(f, g) \leq \|g^+\|$$

$$(ii) \quad a \in \mathbb{R}^+ \text{ ならば } \sigma(f, ag) = a\sigma(f, g)$$

$$(iii) \quad (f \geq 0 \rightarrow a \geq 0) \text{ ならば } \sigma(f, af+g) = a\|f\| + \sigma(f, g)$$

$$(iv) \quad \sigma(f, g+r) \leq \sigma(f, g) + \sigma(f, r)$$

$$(v) \quad g \leq r \text{ ならば } \sigma(f, g) \leq \sigma(f, r)$$

$$(vi) \quad f \wedge |f| = 0 \text{ ならば } \sigma(f, g) = \sigma(f, g + f).$$

これらの性質のうちいくつかは  $\tau$  を modify して  $\sigma$  をつくったことによりはじめで得られたものであり,  $\tau$  は (ii), (iii), (iv) を満たすが (i), (v), (vi) を必ずしも満たさない. また  $\tau'$  は, (ii), (iii) を満たすが (iv) を必ずしも満たさない. ( $\tau'$  が (i), (v), (vi) を満たすかどうか筆者は知らない.)

$\sigma$  を用いた次のように定義をする.

定義.  $\mathfrak{A}$  における作用素  $A$  が 双線型 dispersive であるとは, すべて  $f \in \mathcal{D}(A)$  に対し  $\sigma(f^+, Af) \leq 0$  が成り立つこととする. 左線型 dispersive であるとは, すべて  $f \in \mathcal{D}(A)$  に対し  $\sigma(f^+, -Af) \geq 0$  が成り立つこととする.

以下, 双線型 dispersive を  $\text{disp}(s)$ , 左線型 dispersive を  $\text{disp}(w)$  とかくことにする. (i) から  $\sigma(f, 0) = 0$  であり, 従って (vi) により  $\sigma(0, g) = 0$  であるから,  $f^+ = 0$  ならば  $f \in \mathcal{D}(A)$  に対し恒等式  $\sigma(f^+, Af) = \sigma(f^+, -Af) = 0$  である. 故に,  $\text{disp}(s)$  または  $\text{disp}(w)$  であるならば,  $f^+ \neq 0$  の  $f$  だけを考えればよい.

$\sigma(f, 0) = 0$  と (iv) とから,  $-\sigma(f, -g) \leq \sigma(f, g)$  である. 従って,  $\text{disp}(s)$  ならば必ず  $\text{disp}(w)$  である. 上の定義を用いて, 次のことがいえる.

1°  $A$  が線形作用素の強連続非負縮小半群の生成作用素と  
 して、 $A$  は  $\text{disp}(A)$  である。

2°  $A$  が線形、 $\mathcal{D}(A)$  が  $\mathcal{D}$ -稠密、ある  $\lambda > 0$  に対し  
 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{D}$  ( $I$  は恒等作用素) とする。  $A$  が  $\text{disp}(w)$   
 となれば、ある線形強連続非負縮小半群の生成作用素である。

3°  $A, B$  が共に  $\text{disp}(A)$  となれば  $A+B$  (定義域は  
 $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ ) も  $\text{disp}(A)$  である。  $A$  が  $\text{disp}(A)$ 、  
 $B$  が  $\text{disp}(w)$  となれば、 $A+B$  は  $\text{disp}(w)$  である。

3° の証明は命題 1.1 (iv) から得られる。 すなわち前半は  
 $\sigma(f^+, (A+B)f) \leq \sigma(f^+, Af) + \sigma(f^+, Bf) \leq 0$  により、後  
 半は  $\sigma(f^+, -(A+B)f) \geq \sigma(f^+, -Bf) - \sigma(f^+, Af) \geq 0$   
 による。 1°, 2° は命題 1.1 と Hille-吉田の定理を用いて  
 [1], [2] と似た方法で証明できる。 かつしくは [3] にゆ  
 ずる。

具体的には Banach 束における  $\tau, \sigma$  の形は次の通りで  
 ある。(以下函数は実数値をとるものとする。)

(a) もし、compact 空間  $X$  の上の連続函数の全体をつ  
 くる Banach 束  $C(X)$ 、 $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$  の場合、 $\forall f \neq 0$   
 に対し

$$(1.1) \quad \tau(f, g) = \max_{x \in X(f)} (\text{sgn } f(x)) g(x)$$

ただし  $X(f) = \{x : |f(x)| = \|f\|\}$  である。 また

(1.2) 任意の  $f \neq 0, f \geq 0$  に対し  $\tau(f, g) = \tau(f, g)$  である。

(b)  $\mathcal{L} = C_0(X)$ , たいし  $X$  は compact でない有限 compact 空間,  $C_0(X)$  は  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ( $\infty$  は  $X$  上 - 長 compact 化する点) をみたす連続函数  $f$  の全体, の場合も, (a) と同じことになりえる。

(c)  $\mathcal{L} = B(X)$ , たいし  $X$  は任意の集合,  $B(X)$  は  $X$  上の有界函数の全体,  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$  の場合には,  $\forall f \neq 0$  に対し

$$(1.3) \quad \tau(f, g) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in X(f, \varepsilon)} (\operatorname{sgn} f(x)) g(x)$$

たいし  $X(f, \varepsilon) = \{x : |f(x)| > \|f\| - \varepsilon\}$ , である。また (1.2) がやはり成り立つ。

(d)  $(X, \mathcal{B}, m)$  が測度空間,  $\mathcal{L} = L_\infty(X, \mathcal{B}, m)$  の場合にも (c) と同じことになりえる。たいし (c) の  $\sup$  を  $\operatorname{ess sup}$  でおきかえる。

(e)  $(X, \mathcal{B}, m)$  が測度空間,  $\mathcal{L} = L_1(X, \mathcal{B}, m)$  の時にはすべての  $f, g$  に対し

$$\tau(f, g) = \int_{X_1(f)} (\operatorname{sgn} f(x)) g(x) m(dx) + \int_{X_0(f)} |g(x)| m(dx)$$

であり,  $f \geq 0$  に対し

$$\sigma(f, g) = \int_{X_1(f)} g(x) m(dx)$$

である。ただし,  $X_0(f) = \{x : f(x) = 0\}$ ,  $X_1(f) = X - X_0(f)$  とする。

(f)  $\mathcal{B} = L_p(X, \mathcal{B}, m)$ ,  $1 < p < \infty$ , の時には,  $f \neq 0$  に対し

$$(1.4) \quad \tau(f, g) = \int_X (\operatorname{sgn} f(x)) |f(x)|^{p-1} g(x) m(dx) / \|f\|^{p-1}$$

であり, (1.2) が成り立つ。

(g)  $(X, \mathcal{B})$  は measurable space,  $\mathcal{B}$  を  $\mathcal{B}$  上の有限 signed measure の全体が全変動のノルムによつてつく Banach 束  $A(\mathcal{B})$  とする。  $|f|$  に属する  $g$  の絶対連続部分, 特異部分をそれぞれ  $g_f^c, g_f^s$  とし,  $f$  による  $X$  の Hahn 分割における正集合, 負集合をそれぞれ  $X_f^+, X_f^-$  とすると

$$\tau(f, g) = g_f^c(X_f^+) - g_f^c(X_f^-) + \|g_f^s\|$$

である。  $f \geq 0$  のときは

$$\sigma(f, g) = g_f^c(X)$$

である。

以上の証明は [3] に与えられている。  $\sigma$  の具体的な表現を用いず,  $\operatorname{disp}(s)$ ,  $\operatorname{disp}(u)$  の具体的な表現を与えられた Banach 束において  $\tau$  が成り立つことを示す。特に, (a) の  $C(X)$  または (b) の  $C_0(X)$  の場合には,  $A$  が  $\operatorname{disp}(s)$  であることは

$$(1.5) \quad f \in \mathcal{D}(X), \quad f(x_0) = \max_{x \in X} f(x) > 0 \quad \text{ならば} \\ Af(x_0) \leq 0.$$

をみたす  $x$  と同じである,  $A$  が  $\text{disp}(w)$  であることはいかにして

$$(1.6) \quad a = \max_{x \in X} f(x) > 0 \quad \text{ならばある} x_0 \in X \text{ が存在} \\ \text{して } f(x_0) = a \quad \text{かつ } Af(x_0) \leq 0.$$

をみたすことである. (1.3) は確率論でしばしば用いられる性質であるが, 境界条件の問題を扱うには (1.4) を使う方が適当なことがある. Ventcel [5] にはその例がある.

## §2. 定義 dispersive 作用素の同族.

$X$  が compact 距離空間,  $\mathcal{L} = C(X)$  の場合,  $A$  が線形, dispersive ( $w$ ) である定義域をもてば  $A$  の同族が存在し,  $A$  の最小同族  $\bar{A}$  は  $\text{disp}(A)$  に等しい. このことは [4] の Theorem 1.2 と 3 の後の Remark によって, 一般の Banach 束はこの結果を拡張することによって考察しよう.

定理 2.1.  $\mathcal{L}$  は任意の Banach 束とする.  $A$  が  $\mathcal{L}$  における線形かつ  $\text{disp}(w)$  を作用素として  $\mathcal{D}(A)$  が稠密ならば,  $A$  は同族をもつ.

証明.  $f_n \in \mathcal{D}(A)$ ,  $n=1, 2, \dots$  と  $f_n$  が 0 に強収束,  $Af_n$  が  $g$  に強収束するとし,  $g=0$  ではない.  $g \neq 0$

とす。  $g^+ \neq 0$  とし、  $\|g^+\| = 1$  と (2) の一般性を失わず  
 11.  $\mathcal{D}(A)$  の稠密性から、  $\|g - r\| < 1/3$  とする  $r \in \mathcal{D}(A)$   
 が存在する。一般に  $(r_1 + r_2)^+ \leq r_1^+ + r_2^+$  であるから、  
 $1 = \|g^+\| \leq \|r^+ + (g - r)^+\| \leq \|r^+\| + \|(g - r)^+\| < \|r^+\| + 1/3$ ,  
 従って  $\|r^+\| > 2/3$  である。任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\begin{aligned} \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -g - \varepsilon Ar) &\leq \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -\varepsilon^+ f_n - r) \\ &\quad + \varepsilon^+ \|f_n^+\| + \|(r - g)^+\| + \varepsilon \|(Ar)^-\| \end{aligned}$$

である。これは命題 1.1 の (i) と (iv) を繰返して 11) 2) と分り、  
 更に (iii) と (vi) と一般に 11) 2) 不等式

$$(2.1) \quad |(r_1 + r_2)^+ - r_1^+| \leq |r_2|$$

によります。

$$\sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -\varepsilon^+ f_n - r) = -\varepsilon^+ \|(f_n + r)^+\| \rightarrow -\|r^+\|, n \rightarrow \infty$$

である。従って、 $\varepsilon$  を十分小さくすれば、

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -g - \varepsilon Ar) &\leq -\|r^+\| + \|(r - g)^+\| + \varepsilon \|(Ar)^-\| \\ &< -1/3 + \varepsilon \|(Ar)^-\| < 0 \end{aligned}$$

である。一方、(i) (iv) から一般に

$$(2.2) \quad |\sigma(f, g) - \sigma(f, r)| \leq \|g - r\|$$

である。これは注意 5.1 及び  $A$  の  $\text{disp}(w)$  によります。

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -g - \varepsilon Ar) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma((f_n + \varepsilon r)^+, -(Af_n + \varepsilon Ar)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから、矛盾が生じる。故に  $g = 0$  である。証明終。

定理 2.1 における仮定の下に  $\bar{A}$  が必ず  $\text{disp}(w)$  に属するかどうか筆者は確かめ得ていないが、一つの特典条件を添える。

定義.  $f_n \geq 0, n=1, 2, \dots$ , が  $f \neq 0$  に逐次束縛される必要す任意の  $g$  に対し

$$(2.3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n, g) \leq \sigma(f, g)$$

となる時, Banach 束  $E$  が  $(SC\sigma)$  を満たすという (Semi-continuity of  $\sigma$  with respect to the first variable).

定理 2.2.  $E$  が  $(SC\sigma)$  を満たすとする。  $A$  が線形  $\text{disp}(w)$  の閉部分  $E \in \mathcal{L}$  ば, 最小閉部分  $\bar{A} \in \text{disp}(w)$  である。

証明  $f \in E(\bar{A}), \bar{A}f = g$  となる。  $f \neq 0$  と仮定して  $\sigma(f, -g) \geq 0$  である。最小閉部分  $\bar{A}$  があるから  $f_n \in E(A), n=1, 2, \dots$ , があるとして  $f_n \rightarrow f$  かつ  $Af_n \rightarrow g$  がある。(2.1) によつて  $f_n^+ \rightarrow f^+$  があるから  $(SC\sigma)$  を用いて

$$\sigma(f^+, -g) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n^+, -g),$$

右辺は (2.2) によつて  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n^+, -Af_n)$  に等しいから  $\geq 0$  である,  $\bar{A}$  の  $\text{disp}(w)$  である。

§1 への例の列のうち, (a), (b), (c), (d) および  $2 \leq p < \infty$  の (f) は  $(SC\sigma)$  を満たし, (e), (g) は

trivial な例外を除いて  $(S(\sigma))$  をみたさない. このこと  
を示そう.

(a)  $X$  compact 且  $\mathcal{L} = C(X)$  または (b)  $X$  が com-  
pact 且  $\mathcal{L}$  有限 compact 且  $\mathcal{L} = C_0(X)$  の場合, (c)  
と同じく  $\tau(f, g)$ ,  $f \neq 0$ , が (1.3) に  $f, g$  も表わされ  
ることをまず示そう. (1.3) の右辺を  $a$  とおく.  $a \geq \tau(f, g)$   
は明らかであるから,  $\leq$  を示す.  $h(x) = (\operatorname{sign} f(x))g(x)$  と  
おく.  $\varepsilon > 0$  に対し  $x_n \in X(f, 1/n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ , を  
 $a - \varepsilon < h(x_n)$  とする.  $\{x_n\}$  はある compact set に包ま  
れるから,  $\exists x_\infty$  が存在して  $x_\infty$  の任意の近傍に  $\{x_n\}$  を無  
限回含む. 従って  $\{x_n\}$  の部分列  $\{x_{n_k}\}$  で  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$   
かつ  $g(x_{n_k}) \rightarrow g(x_\infty)$  に決まる. 故に  $|f(x_\infty)| = \|f\| \neq 0$ ,  
更に  $h(x_{n_k}) \rightarrow h(x_\infty)$  となり, 従って  $a - \varepsilon \leq h(x_\infty)$   
である.  $\varepsilon$  の任意性により,  $a \leq h(x_\infty) \leq \tau(f, g)$  である.  
故に (a), (b) の場合は (c) の場合へ帰着した.

(c)  $\mathcal{L} = B(X)$  の場合  $(S(\sigma))$  の証明:  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n \geq$   
 $0$ ,  $f \neq 0$  とし,  $g \in \mathcal{L}$  とする.  $f_n \neq 0$  としてよい.  
(1.2)  
(1.3) により  $\exists x_n \in X$  に対し  $f_n(x_n) > \|f\| - 1/n$   
かつ  $|\sigma(f_n, g) - g(x_n)| < 1/n$  である.  $\varepsilon_n = \frac{1}{n} +$   
 $2\|f_n - f\|$  とおくと

$$|f(x_n) - \|f\|| \leq |f(x_n) - f_n(x_n)| + |f_n(x_n) - \|f_n\|| + |\|f_n\| - \|f\|| < \varepsilon_n$$

であるから

$$\sup_{x \in X(f, \varepsilon_n)} g(x) \geq g(x_n) \geq \sigma(f_n, g) - \frac{1}{n}$$

である。  $n \rightarrow \infty$  とすると  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  であるから (2.3) を得る。

(d)  $\mathcal{L} = L_\infty$  の場合は、本質的には (c) と同じである。

(f)  $\mathcal{L} = L_p$ ,  $2 \leq p < \infty$  の場合、  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n \geq 0$ ,  $f \neq 0$  ならば  $\forall g$  に対し  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n, g) = \sigma(f, g)$  がいえる。これを証明しよう。(1.4)により  $\sigma(f, g)$  は  $g$  について線形であるから、 $\sigma(f, g) = \sigma(f, g^+) - \sigma(f, g^-)$  である。故に  $g \geq 0$  としてよい。  $g \geq 0$  を固定し、  $f \in L_p$  に対し

$$\|f\|' = \left( \int_X |f(x)|^{p-1} g(x) m(dx) \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

と置く。  $\|f_n\|' \rightarrow \|f\|'$  といえる。 Hölder の不等式を用いて

$$(\|f\|')^{p-1} \leq \|f\|^{p-1} \|g\|$$

であるから  $\|f_n - f\|' \rightarrow 0$  がいえる。  $p \geq 2$  であるから

$\| \cdot \|'$  は三角不等式を満たし、  $|\|f_n\|' - \|f\|'| \leq \|f_n - f\|' \rightarrow 0$  である。

次に (e) の  $\mathcal{L} = L_1(X, \mathcal{B}, m)$  の場合、trivial な例外を除いて (S(σ)) を満たさない。すなわち、  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  かつ  $0 < m(B_i) < \infty$ ,  $i=1, 2$  なる  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  が存在すれば (S(σ)) を満たさない。そこで、  $f_n(x) = \chi_{B_1}(x)$

$+\frac{1}{n}\chi_{B_2}(x)$ ,  $f(x)=\chi_{B_1}(x)$ ,  $g(x)=\chi_{B_1\cup B_2}(x)$  とおけば,  
 $f_n \rightarrow f$  かつ  $\sigma(f_n, g) = \int_{B_1\cup B_2} g \, dm = m(B_1) + m(B_2)$ ,  
 $\sigma(f, g) = \int_{B_1} g \, dm = m(B_1)$  であるから,  $(g)$  の  $\mathcal{L}$   
 $= A(B)$  の場合も同様である.

注意. §1, 2° の仮定を弱め, " $R(\lambda I - A) = \mathcal{L}$ " を  
 " $R(\lambda I - A)$  が  $\mathcal{L}$  で稠密" にかえると, 結論として,  
 $A$  が線形強連続非負縮小半群の生成作用素となる. 筆者は  
 これを  $\mathcal{L}$  が  $(SC\sigma)$  をみたすという仮定で証明したが, 渡  
 辺毅氏の注意を使うと, 任意の Banach 束でいい.

### §3 $C(X)$ または $C_0(X)$ における dispersivity と最大値原理との関係

$X$  を局所 compact Hausdorff 空間とし,  $X$  が compact  
 の時は  $\mathcal{L} = C(X)$ ,  $X$  が compact でない時は  $\mathcal{L}_0 = C_0(X)$   
 とする.  $A$  を  $\mathcal{L}$  における線形作用素と見做す.  $V = -A^{-1}$   
 とおく.  $A$  の  $\text{disp}(A)$  または  $\text{disp}(w)$  という性質と  $V$  の  
 種々の最大値原理との間には, 密接な関係がある.

定義  $V$  が complete maximum principle をみたすとは

(3.1)  $\alpha$  が非負の実数,  $f, g$  が共に  $\mathcal{D}(V)$  に属しかつ  
 $f \geq 0, g \geq 0$  とする時,  $\alpha + V f(x) \geq V g(x)$   
 が  $g$  の support において成り立つならば  $X$  全体で

成り立つ,

ということとする.  $V$  の positive maximum principle をみたすとは,

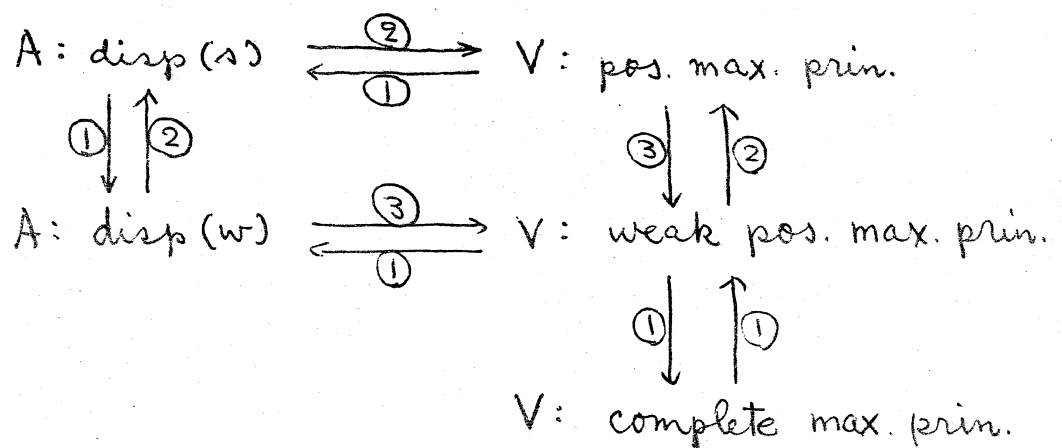
(3.2)  $f \in \mathcal{D}(V)$  且  $Vf(x_0) = \max_{x \in X} f(x) \geq 0$  ならば  
 $f(x_0) \geq 0$  である,

ということとする.  $V$  の weak positive maximum principle をみたすとは

(3.3)  $f \in \mathcal{D}(V)$  且  $\sup_{x \in X} Vf(x) = a > 0$  ならば  
 $Vf(x)$  の  $\{x: f(x) > 0\}$  における sup は  $a$  に等しい.

ということとする.

$\mathcal{D}(A)$ ,  $\mathcal{R}(A)$  が共に稠密な場合は,  $V$  に対する上の3つの最大値原理と,  $A$  の  $\text{disp}(s)$  があることと,  $A$  の  $\text{disp}(w)$  があることは, すべて互いに同値である. 更に(4)を含む場合は, 次が成り立つ.



ただし ① は常に 1.1.2.3 であることを示し, ② は  $D(A)$  が稠密であることが成り立つことを示し, ③ は  $R(A)$  が稠密であることが成り立つことを示す.

こゝでは,  $\text{disp}(A)$  または  $\text{disp}(w)$  に関係した部分について証明しよう. (1.5) により,  $A$  が  $\text{disp}(A)$  であることは

$$(3.4) \quad f \in D(V), \quad Vf(x_0) = \max_{x \in X} Vf(x) > 0 \quad \text{ならば} \\ f(x_0) \geq 0,$$

と同値である. また (1.6) により,  $A$  の  $\text{disp}(w)$  は

$$(3.5) \quad f \in D(V), \quad \sup_{x \in X} Vf(x) = a > 0 \quad \text{ならば}, \quad Vf(x) \\ \text{が } \{x: f(x) \geq 0\} \text{ にあつて } \sup \text{ は } a \text{ である},$$

と同値である. 従つて,  $V$  の pos. max. prin. (3.2) のとき常に  $A$  の  $\text{disp}(A)$  であり,  $V$  の weak pos. max. prin. (3.3) のとき常に  $A$  の  $\text{disp}(w)$  である.

$A: \text{disp}(A) \xrightarrow{(2)} V: \text{pos. max. prin}$  の証明:  $Vf(x_0) = \max_{x \in X} Vf(x) = 0$  の時  $f(x_0) \geq 0$  であることはよい.  $X$  が完全正則空間であることは  $D(A)$  の稠密性を用いると,  $x_0$  の任意の近傍  $U$  に対し,  $\exists h \in D(A)$  が存在して  $h(x_0) > \sup_{x \in U} h(x) \geq 0$  である. しかも  $\|Ah\| \leq 1$  にとれる.  $\varepsilon > 0$  とすると  $(Vf + \varepsilon h)(x_0) = \varepsilon h(x_0) > 0$  であるが  $x \in U$  では  $(Vf + \varepsilon h)(x) \leq \varepsilon h(x) < \varepsilon h(x_0)$  である. 従つて  $x_1 \in U$  が存在して  $(Vf + \varepsilon h)(x_1) = \max_x (Vf + \varepsilon h) > 0$

$\exists$  である。  $\text{disp}(s)$  により  $(-f + \varepsilon A h)(x_1) \leq 0$  であるから、  
 $f(x_1) \geq -\varepsilon \|A h\| \geq -\varepsilon$  である。  $\forall \varepsilon > 0$  の任意性により  
 $f(x_0) \geq 0$  を得る。

$A: \text{disp}(w) \xrightarrow{(3)} V: \text{weak pos. max. min.}$  の証明:

$\sup_{x \in X} V f(x) = a > 0$  とする。  $\exists \varepsilon < a$  なる  $\varepsilon > 0$  を任意にと  
 取る。 compact 集合  $K$  を、  $x \notin K$  ならば  $V f(x) \leq \varepsilon$  とするよう  
 にとる。  $X$  の局所 compact 性と  $\mathcal{D}(V)$  の稠密性により  
 $h \in \mathcal{D}(V)$  が存在して  $K$  上では  $h(x) > 0$  である。 しか  
 $\|V h\| \leq \varepsilon$  にとれる。  $\sup_{x \in X} V(f-h) \geq \sup_{x \in X} V f - \varepsilon = a - \varepsilon$   
 $> 0$  であるから (3.5) により、  $x_0 \in X$  が存在して  
 $(f-h)(x_0) \geq 0$  から  $V(f-h)(x_0) \geq a - \varepsilon$  である。 故に、  
 $V f(x_0) \geq a - 2\varepsilon$ 。  $K$  の外では  $V f(x) \leq \varepsilon < a - 2\varepsilon$  であるから  
 $x_0 \in K$  とする。 従って、  $f(x_0) \geq h(x_0) > 0$ 。 従って、  $\{x:$   
 $f(x) > 0\}$  には  $V f(x)$  の  $\sup$  は  $\geq a - 2\varepsilon$  である。  
 $\varepsilon$  の任意性により証明終。

$A: \text{disp}(w) \xrightarrow{(2)} A: \text{disp}(s)$  の証明:  $A$  が  $\text{disp}(s)$   
 になることを示す。 すると  $\sigma(f^+, A f) = a > 0$  とする  $f \in$   
 $\mathcal{D}(A)$  が存在する。  $\sigma(0, \cdot) = 0$  であるから  $f^+ \neq 0$  とな  
 り、 従って、  $f(x_0) = \|f^+\|$  から  $A f(x_0) = a$  とする  $x_0$   
 が存在する。  $x_0$  の近傍  $U$  を、  $U$  上では  $A f(x) > a/2$  にとる。  
 $X$  の完全正則性と  $\mathcal{D}(A)$  の稠密性から、  $h \in \mathcal{D}(A)$  が存在

12  $R(x_0) > 1/2$  かつ  $\cup$  の外では  $R(x) < 1/2$  である。

(任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\begin{aligned} \sigma((f+\varepsilon h)^+, -Af-\varepsilon Ah) &\leq \sup_{x \in J} (-Af-\varepsilon Ah)(x) \\ &\leq -a/2 + \varepsilon \|Ah\| \end{aligned}$$

が成り立ち、これは  $\varepsilon$  を十分小さくとれば  $< 0$  であるから

3,  $A$  の  $\text{disp}(w)$  は負値を取る。

最後の証明では、 $A$  が 1:1 であることを用いている。

### 文献

- [1] M. Hasegawa, On contraction semi-group and (di)-operators, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 290-302.
- [2] R. S. Phillips, Semi-groups of positive contraction operators, Czechoslovak Math. J. 12(87) (1962), 294-313.
- [3] K. Sato, On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices, to appear.
- [4] K. Sato-T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965), 529-605.
- [5] A. D. Ventcel', On lateral conditions for

multi-dimensional diffusion processes, Teor.  
Veroyat. Prim. 4 (1959), 172-185 (12 = 7  $\frac{1}{2}$ ).