

「3次元 Hilbert 変換」による界面磁場解析と磁性流体自由表面解析

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering, Hokkaido Univ.

1 はじめに

規則的, 不規則的, あるいはスパイク集合状の, 形状が複雑な磁性流体自由表面の現象解析を自在に行うには, 任意の界面形状・印加磁場分布のもとで, 界面磁場を厳密かつ迅速に求める必要がある。

これまで, 2次元複素解析に基づく磁性流体自由表面解析 [1, 2] を3次元へ拡張してきたが [3, 4, 5], 本稿では, **3次元 Hilbert 変換**による拡張がほぼ完了した磁場解析についてまとめ, 自由表面現象解析への展望を述べる。

2 Flat Space と Real Space の対応関係

水平に近い界面ばかりでなく, 多価になるほど複雑な界面, 液滴・磁性流体柱などにおいても, 汎用的な方法で界面磁場を求められるようにするため, Real Space の座標 $(x, y, z) \equiv \mathbf{r}(X, Y, Z)$ を Flat Space の座標 (X, Y, Z) で媒介変数表示する。ただし, $Z = 0$ を界面とする。このとき, $\mathbf{r}_X \equiv \partial \mathbf{r} / \partial X$, $\mathbf{r}_Y \equiv \partial \mathbf{r} / \partial Y$ は界面の接線ベクトルなので, これらより, 界面の接線単位ベクトル $\mathbf{t}_X = \mathbf{r}_X / |\mathbf{r}_X|$, $\mathbf{t}_Y = \mathbf{r}_Y / |\mathbf{r}_Y|$ と, 法線単位ベクトル $\mathbf{t}_Z = (\mathbf{r}_X \times \mathbf{r}_Y) / |\mathbf{r}_X \times \mathbf{r}_Y|$ を定義できる。ここで, $|\mathbf{r}_X|$, $|\mathbf{r}_Y|$ は Flat Space の座標に対する Real Space の座標の収縮の割合を表しており, 空間収縮率とよぶ。 $\mathbf{t}_X \cdot \mathbf{t}_Z = \mathbf{t}_Y \cdot \mathbf{t}_Z = 0$ はいつでも成り立つが, 直交曲線座標系では, さらに $\mathbf{t}_X \cdot \mathbf{t}_Y = 0$ となる。な

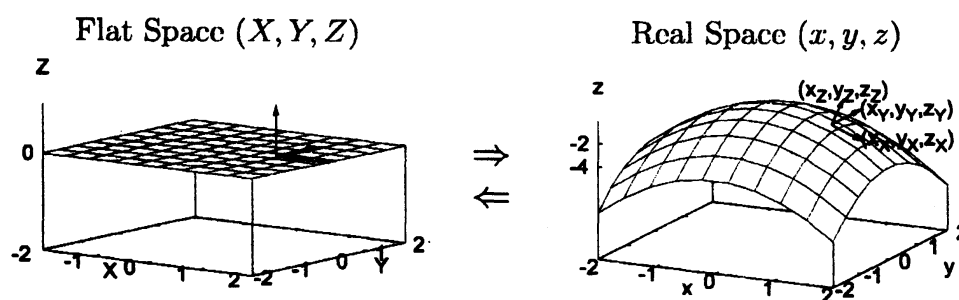


Fig. 1: Flat Space と Real Space の対応関係

お実際の解析では、非直交曲線座標系 s_1, s_2 を t_X, t_Y へ変換しながら使う。

3 界面条件と界面磁場

3.1 調和場・界面調和場・界面磁場・界面条件

流体 ($j=1$)・真空 ($j=2$) の各領域で、調和場 (磁束密度ベクトル) f_j を考える。界面上で、 $I=X, Y$ を接線成分、 $I=Z$ を法線成分とする界面調和場 g_{jI} を考えると、界面上の f_j は (1) のように、また、界面磁場、すなわち接線磁場 $h_{X,Y}$ ・法線磁束密度 b_Z は、 μ_j を透磁率として (2) のように表される。

$$f_j = g_{jX}t_X + g_{jY}t_Y + g_{jZ}t_Z, \quad g_{jI} \equiv t_I \cdot f_j, \quad (1)$$

$$h_{X,Y} = g_{jX,Y}/\mu_j, \quad b_Z = g_{jZ}. \quad (2)$$

界面を横切る値の跳びを $[\dots]$ と表せば、「界面をはさんで接線磁場・法線磁束密度が連続」という界面条件は、 $[h_{X,Y}] = 0, [b_Z] = 0$ となる。したがって、 $h_{X,Y}, b_Z$ には、流体・真空各領域を区別する添え字 j をつけない。

3.2 界面調和場・界面磁場の基本場・誘導場への分離

既知の外場 h^0 から次のように直接定義した基本場は、そのままでは界面条件を満たさない。このため、 $h_{X,Y} = h_{X,Y}^0 + h_{X,Y}^1, b_Z = b_Z^0 + b_Z^1$ が界面条件を満たすように、誘導場を決める。

$$\begin{cases} \text{基本場: } f_j^0 = \mu_j h^0, & g_{jI}^0 = t_I \cdot f_j^0, & h_{X,Y}^0, & b_Z^0, \\ \text{誘導場: } f_j^1, & g_{jI}^1 = t_I \cdot f_j^1, & h_{X,Y}^1, & b_Z^1. \end{cases} \quad (3)$$

$h_{X,Y} = (g_{jX,Y}^0 + g_{jX,Y}^1)/\mu_j, b_Z = g_{jZ}^0 + g_{jZ}^1$ について、 $j=1, 2$ の和または差をとれば (和では μ_j または $1/\mu_j$ をかけて)、以下のように、 $h_{X,Y}^1, b_Z^1$ による g_{jI}^1 の表式と (複号上下は $j=2, 1$)、 h^0 による基本場 $h_{X,Y}^0, b_Z^0$ の表現が導かれる [4, 6]。

$$\begin{cases} g_{jX,Y}^1 = \mu_j h_{X,Y}^1 \mp \tilde{b}_{X,Y}, & \begin{cases} \tilde{b}_{X,Y} = 0, \\ \tilde{h}_Z = -M(t_Z \cdot h^0)/P, \end{cases} & \begin{cases} h_{X,Y}^0 = t_{X,Y} \cdot h^0, \\ b_Z^0 = 2(t_Z \cdot h^0)/P. \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

ただし、 $P \equiv 1/\mu_2 + 1/\mu_1, M \equiv 1/\mu_2 - 1/\mu_1$ 。これらは、確かに $[h_{X,Y}] = 0, [b_Z] = 0$ を満たしている。(4) の g_{jI}^1 を $f_j^1 = g_{jX}^1 t_X + g_{jY}^1 t_Y + g_{jZ}^1 t_Z$ に用いれば、

$$\begin{cases} f_j^1 \times t_Z = \mu_j (h^1 \times t_Z) \mp (b^0 \times t_Z), & \begin{cases} h^1 \equiv h_X^1 t_X + h_Y^1 t_Y, \\ b^0 \equiv \tilde{b}_X t_X + \tilde{b}_Y t_Y. \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

4 3次元界面磁場方程式

3次元調和場方程式に界面条件を組み込んで、界面磁場だけで閉じた、3次元界面磁場方程式を導く。

4.1 3次元調和場方程式

調和性 $\nabla \times \mathbf{f} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ を考慮するには, $\mathbf{f} = \nabla \phi$ を与えるスカラーポテンシャル ϕ を Laplace 方程式 $\Delta \phi = 0$ を解いて求める代わりに, 3次元 Green の定理を, 流体・真空各領域の内部 V と, V を囲み界面 F と遠方表面から構成される表面 S に適用する [7].

$$\iiint_V (\phi' \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi') dV' = \oint_S \{ \phi' (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi') \} \cdot d\mathbf{S}'. \quad (6)$$

ψ には, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ を観測点・ソース点の座標として, Poisson 方程式 $\Delta' \psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の基本解, すなわち, $\nabla' \psi = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) / (4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3)$ を用いる. “” は $\mathbf{r}'$ の関数・微分を示す. $\mathbf{r}$ を F 上に置き, F を無限遠まで拡げて, S の積分のうち F からの寄与だけ残せば (複号上下は $j = 2, 1$),

$$(\mathbf{t}_Z \pm \hat{\mathbf{G}}) \times (\mathbf{f}_j^1 \times \mathbf{t}_Z) + (\mathbf{t}_Z \pm \hat{\mathbf{G}})(\mathbf{f}_j^1 \cdot \mathbf{t}_Z) = 0, \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{G}} f(\mathbf{r}') \equiv 2 \iint_F |d\mathbf{S}'| (\nabla' \psi) f(\mathbf{r}') = \iint_F |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| dX' dY' \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} f(X', Y'). \quad (8)$$

ここで, $\mathbf{f}_j$ の代わりに $\mathbf{f}_j^1$ に (7) を適用して, 領域内に磁極があっても, それによる特異な場は基本場として除去する. また面積素は, Flat Space の界面座標 (X', Y') で $d\mathbf{S}' = \mp |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| dX' dY' \mathbf{t}_Z$ と書き直した.

4.2 3次元界面磁場方程式

界面磁場で表した誘導場 (5) を 3次元調和場方程式 (7) に代入し, 誘導場を含む項を左辺に移項して, 誘導場方程式を導く ($\times 1/\mu_j$).

$$(\mathbf{t}_Z \pm \hat{\mathbf{G}}) \{ \times (-\mathbf{h}^1 \times \mathbf{t}_Z) - b_Z^1 / \mu_j \} = \pm (\mathbf{t}_Z \pm \hat{\mathbf{G}}) \{ \times (-\mathbf{b}^0 \times \mathbf{t}_Z) / \mu_j - \tilde{h}_Z \}. \quad (9)$$

流体 $j=1$ ・真空 $j=2$ の (9) の和を, $\mathbf{t}_{X,Y}$ と $\mathbf{t}_Z$ に射影する. さらに, (4), (5) より $\mathbf{b}^0 = 0$ を使えば, $h_{X,Y}^1$, b_Z^1 に対する 3次元界面磁場方程式が導かれる.

$$\begin{cases} 2h_{X,Y}^1 + M \hat{\mathbf{G}}_{X,Y} b_Z^1 = 2\hat{\mathbf{G}}_{X,Y} \tilde{h}_Z, & \hat{\mathbf{G}}_I f(X', Y') \equiv \mathbf{t}_I \cdot \hat{\mathbf{G}} f(X', Y'). \\ (P + M \hat{\mathbf{G}}_Z) b_Z^1 = 2\hat{\mathbf{G}}_Z \tilde{h}_Z, \end{cases} \quad (10)$$

4.3 積分演算子

(10)に現れた積分演算子を, $I = X, Y, Z$, $\Delta X' \equiv X' - X$, $\Delta Y' \equiv Y' - Y$, $f(X', Y')$, $g(X', Y')$ を任意の関数として, 次のように書き換える.

$$\begin{aligned}\hat{G}_I f(X', Y') &= \iint_F |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| dX' dY' \frac{\mathbf{t}_I \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} f(X', Y') \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}_X| |\mathbf{r}_Y|} \hat{H}_I \{ \Phi_I(X, Y; X', Y') |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| f(X', Y') \},\end{aligned}\quad (11)$$

$$\Phi_I(X, Y; X', Y') \equiv \frac{\{ |\mathbf{r}_X|^2 (\Delta X')^2 + |\mathbf{r}_Y|^2 (\Delta Y')^2 \}^{3/2}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \frac{\mathbf{t}_I \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{T_I(\Delta X', \Delta Y')}, \quad (12)$$

$$\hat{H}_I g(X', Y') \equiv \iint_F \frac{T_I(\Delta X', \Delta Y') |\mathbf{r}_X| |\mathbf{r}_Y| dX' dY'}{2\pi \{ |\mathbf{r}_X|^2 (\Delta X')^2 + |\mathbf{r}_Y|^2 (\Delta Y')^2 \}^{3/2}} g(X', Y'). \quad (13)$$

$T_I(\Delta X', \Delta Y')$ は, $X' \rightarrow X$, $Y' \rightarrow Y$, あるいは, 界面形状が平面に近い場合の $\mathbf{t}_I \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の近似で, 次のようになる (Fig. 2 参照).

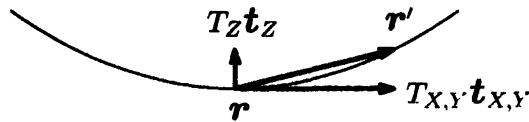


Fig. 2: $\mathbf{t}_I \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の近似 $T_I(\Delta X', \Delta Y')$.

$$\begin{cases} T_X(\Delta X', \Delta Y') = |\mathbf{r}_X| \Delta X', & T_Y(\Delta X', \Delta Y') = |\mathbf{r}_Y| \Delta Y', \\ T_Z(\Delta X', \Delta Y') = \{ \tilde{L}(\Delta X')^2 + 2\tilde{M}(\Delta X')(\Delta Y') + \tilde{N}(\Delta Y')^2 \} / 2. \end{cases} \quad (14)$$

ここで $\tilde{L} \equiv \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{r}_{XX}$, $\tilde{M} \equiv \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{r}_{XY}$, $\tilde{N} \equiv \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{r}_{YY}$ ($\mathbf{r}_{XY} \equiv \partial^2 \mathbf{r} / \partial X \partial Y$ など) は, 平均曲率 H を以下のように求めるときにも使う.

$$2H = \kappa_1 + \kappa_2 = (|\mathbf{r}_Y|^2 \tilde{L} + |\mathbf{r}_X|^2 \tilde{N}) / (|\mathbf{r}_X| |\mathbf{r}_Y|)^2. \quad (15)$$

(12)の補正関数 $\Phi_I(X, Y; X', Y')$ は, $\mathbf{t}_I \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rightarrow T_I(\Delta X', \Delta Y')$ となるとき 1 に近づく. (13)の $\hat{H}_I$ は, 2次元複素解析における Hilbert 変換を拡張した 3次元 Hilbert 変換演算子であるが, その扱い方は次節で述べる.

5 3次元 Hilbert 変換

5.1 周期関数の 3次元 Hilbert 変換

2次元複素解析における Hilbert 変換演算子を $\hat{H} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX'}{X' - X}$ と表せば, $\hat{H} \cos kX' = -\sin kX$, $\hat{H} \sin kX' = \cos kX$ という関係がある. これと

Fourier 級数展開を利用すれば、任意関数の Hilbert 変換を特異積分を行うことなく求めることができる。

同様なことを 3 次元解析でも可能にするため、以下の (16) で定義される $\cos(k_X X - k_Y Y)$, $\cos k_X X \sin k_Y Y$ などの周期関数 $f_i(X, Y)$ への、積分演算子 (17) の作用を求めた [5, 6].

$$(\partial/\partial X)^{2m} (\partial/\partial Y)^{2n} f_i(X, Y) = (-1)^{m+n} (k_X)^{2m} (k_Y)^{2n} f_i(X, Y), \quad (16)$$

$$\hat{H}_{MN} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dX' \int_{-\infty}^{\infty} dY' \frac{|\mathbf{r}_X||\mathbf{r}_Y|(|\mathbf{r}_X|\Delta X')^M(|\mathbf{r}_Y|\Delta Y')^N}{2\pi\{|\mathbf{r}_X|^2(\Delta X')^2+|\mathbf{r}_Y|^2(\Delta Y')^2\}^{3/2}}. \quad (17)$$

その結果を用いると、

$$\hat{H}_X f_i(X', Y') = \hat{H}_{10} f_i(X', Y') = f_{i,X}(X, Y)/(k|\mathbf{r}_X|), \quad (18)$$

$$\hat{H}_Y f_i(X', Y') = \hat{H}_{01} f_i(X', Y') = f_{i,Y}(X, Y)/(k|\mathbf{r}_Y|), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_Z f_i(X', Y') &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\tilde{L}}{|\mathbf{r}_X|^2} \hat{H}_{20} + \frac{2\tilde{M}}{|\mathbf{r}_X||\mathbf{r}_Y|} \hat{H}_{11} + \frac{\tilde{N}}{|\mathbf{r}_Y|^2} \hat{H}_{02} \right\} f_i(X', Y') \\ &= -\frac{\tilde{L}f_{i,YY}(X, Y) + 4\tilde{M}f_{i,XY}(X, Y) + \tilde{N}f_{i,XX}(X, Y)}{2k^3|\mathbf{r}_X|^2|\mathbf{r}_Y|^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 $k^2 \equiv (k_X/|\mathbf{r}_X|)^2 + (k_Y/|\mathbf{r}_Y|)^2$ を定義し、 $f_{i,X} \equiv \partial f_i/\partial X$, $f_{i,Y} \equiv \partial f_i/\partial Y$, $f_{i,XY} \equiv \partial^2 f_i/\partial X \partial Y$ のように表した。

5.2 3次元界面磁場方程式の解法

一般的な界面形状変化で 3 次元界面磁場方程式 (10) を厳密に解いて、誘導場を求める。誘導場の各成分を、Flat Space で周期的な基底関数列で

$$(h_X^1, h_Y^1, b_Z^1)^t = \sum_{n=0}^N (\mathbf{a}_n \cos \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{R} + \mathbf{b}_n \sin \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{R}) \quad (21)$$

と展開する。ここで、 $\mathbf{R} = (X, Y)$ は Flat Space 内座標、 $\mathbf{k}_n = (k_{nX}, k_{nY})$ は波数ベクトルである。これにより、(10) は展開係数ベクトル $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{b}_n$ に対する線形代数方程式になる。

線形代数方程式の係数を決める際に、(11) の演算子 $\hat{G}_I$ を扱う必要がある。ここで、(21) の $\cos \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{R}$, $\sin \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{R}$ を (11) の $f(X, Y)$ として、

$$\Phi_I(X, Y; X', Y') |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| f(X', Y') = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(X, Y) f_i(X', Y') \quad (22)$$

のように周期関数で展開し,

$$\hat{G}_I f(X', Y') = \frac{1}{|\mathbf{r}_X||\mathbf{r}_Y|} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(X, Y) \left\{ \hat{H}_I f_i(X', Y') \right\} \quad (23)$$

に(18)–(20)を用いれば, 積分によらず $\hat{G}_I$ の処理ができてしまう.

5.3 緩やかな3次元界面形状

$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{r}(X', Y') - \mathbf{r}(X, Y)$ を (X, Y) のまわりで $\Delta X', \Delta Y'$ について Taylor 展開する. もし界面形状が平面に近ければ, $\mathbf{r}' - \mathbf{r} \simeq \mathbf{r}_X \Delta X' + \mathbf{r}_Y \Delta Y'$ のように $\Delta X', \Delta Y'$ について2次以上の項は無視できて $\hat{G}_Z \simeq 0$ となる. これを3次元界面磁場方程式(10)に用いると, $b_Z^1 \simeq 0$, $h_{X,Y}^1 \simeq \hat{G}_{X,Y} \tilde{h}_Z$ より, 前節に述べた線形代数方程式を解かなくても, 近似的な誘導場が印加磁場から直接求められることになる. したがって, (11),(4)より,

$$\begin{cases} b_Z = b_Z^0 + b_Z^1 \simeq \frac{2}{P} (\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0), \\ h_{X,Y} = h_{X,Y}^0 + h_{X,Y}^1 \simeq (\mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0) - \frac{M/P}{|\mathbf{r}_X||\mathbf{r}_Y|} \hat{H}_{X,Y} \{ |\mathbf{r}'_X||\mathbf{r}'_Y| (\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0) \} \end{cases} \quad (24)$$

のように, 法線磁束密度は基本場自身となり, 接線磁場のみが空間収縮率 $|\mathbf{r}_X||\mathbf{r}_Y|$ の影響で変化する.

6 界面形状と界面磁場・磁気応力差の関係

界面磁場・磁気応力差に界面形状が及ぼす影響を調べるため, 印加磁場・界面形状それぞれの分布は単一波数ベクトル $\mathbf{k}_F, \mathbf{k}_M$ で表されるが, 界面形状は印加磁場と垂直な方向に変化するとして (Fig. 3), 誘導場 $h_{X,Y}^1, b_Z^1$ の Flat Space 内分布をそれらの波数成分 $\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n$ と共に, さらに, 磁気応力差 $T = [1/\mu_j] \{ \mu_1 \mu_2 (h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} / 2$ を Fig. 4 に示した ($x = X, y = Y$).

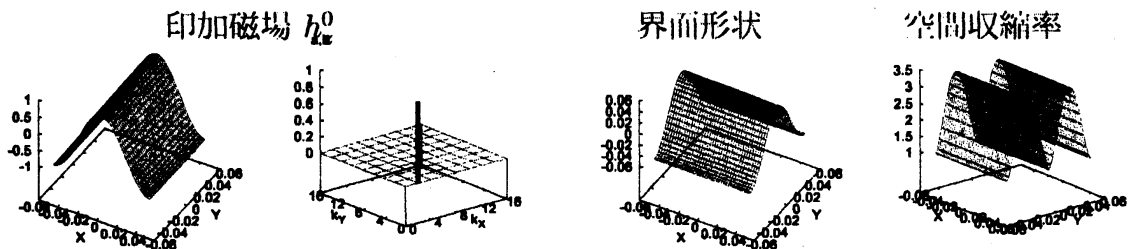


Fig. 3: 印加磁場と界面形状の Flat Space 内分布

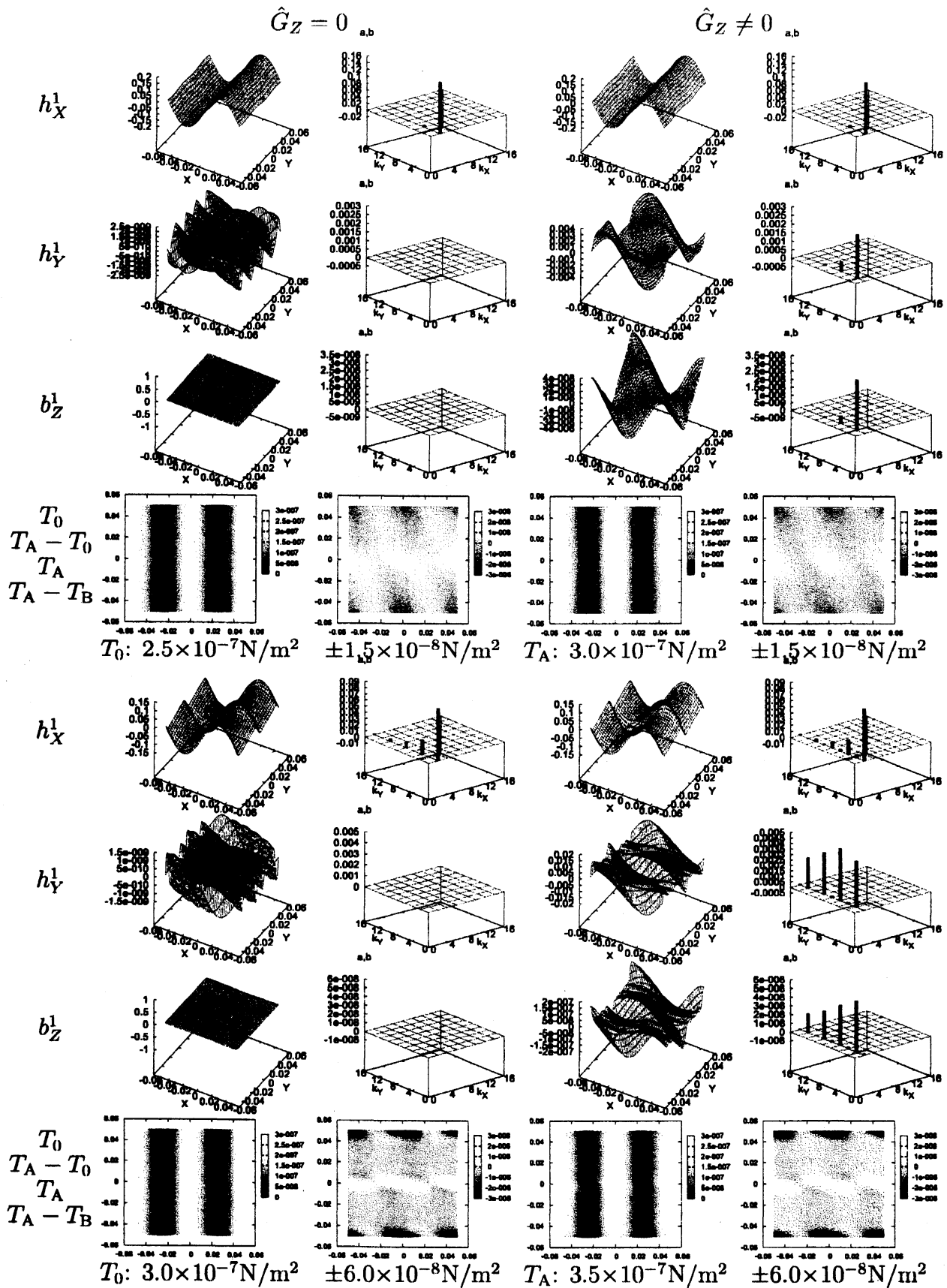


Fig. 4: 印加磁場と垂直方向に変化する界面形状の影響。1~4段：界面変位 0.01 m, 印加磁場 1.00 A/m, 5~8段：界面変位 0.05 m, 印加磁場 1.00 A/m。 $\hat{G}_Z = 0$ と T_B ：緩やかな界面形状による誘導場の場合, $\hat{G}_Z \neq 0$ と T_A ：厳密な誘導場の場合, T_0 ：基本場だけの場合。

物理的条件は、解析領域の大きさ $(0.1 \text{ m})^2$ 、界面変位の振幅 0.01 m または 0.05 m 、印加磁場変化の振幅 1.00 A/m 、透磁率 $\mu_{1,2}/\mu_0 = 1.40, 1.00$ (流体・真空, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$) である。また解析的条件は、実空間の離散点数 $1681 = 41 \times 41$ 、境界固定・境界自由を合わせた波数空間のモード数 $162 = 9 \times 9 \times 2$ である。

Fig. 4では、緩やかな界面形状 ($\hat{G}_Z=0$, 5.3節) の場合を、3次元界面磁場方程式(10)を厳密に解いた場合と比較した。 h_X^1 には、 $\hat{G}_Z=0$, $\hat{G}_Z \neq 0$ いずれでも、 k_M に最大、 $k_M + 2k_F$ に次の成分がある。 h_Y^1, b_Z^1 には $k_M + mk_F$ ($m = 1, 3, 5, \dots$) の成分があるが、 $\hat{G}_Z \neq 0$ でも h_X^1 よりずっと小さく、 $\hat{G}_Z=0$ ではさらに小さいか 0 になる。界面変位の振幅 0.01 m を 0.05 m へ増やせば、いずれの誘導場でも $k_M + mk_F$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) の成分が増大して、用意したモード数が不足してくる。これらの傾向は、主に、Fig. 3に示した空間収縮率 $|r_X||r_Y|$ の変化が大きくなることによる。

磁気応力差については、基本場だけの T_0 、緩やかな界面形状の誘導場による T_B 、厳密な誘導場による T_A を比較した。 T_A には、 T_0 になく T_B で顕著でない界面形状の影響が現れ、これは界面変位が大きいほど鮮明になる。各図下の最大値または最大最小値が示すように、 T_A と $T_{0,B}$ の相対差は 5-6% 程度である。これは小さいようでも、界面形状パターン形成の解析に大きく影響する可能性がある。

なお、ここに示してはいないが、界面形状の変化方向が印加磁場と平行な場合は、物理的状況が全体として Y に依存せず、界面形状を緩やかとしなくても、(20)より実質的に $\hat{G}_Z = 0$ となる。このため、 h_X^1 の mk_M 成分 ($m = 1, 3, 5, \dots$) 以外は現れない。

7 まとめと今後の課題

界面条件・調和性を満たす界面磁場だけを効率よく求めるため、3次元界面磁場方程式を導き、周期関数への3次元 Hilbert 変換の作用を利用する解法を示した。この方法は、磁場と流体の相互関係を見通しながら、多価に

なるほど複雑な、あるいは、液滴・液柱などの界面へ適用範囲を拡張されるが、本稿では、印加磁場・界面形状それぞれが単一波数で分布し変化方向が互いに直交する場合の界面磁場・磁気応力差を求め、厳密な解法の必要性を示した。今後、モード数の範囲や補正関数の影響を調べながら、印加磁場分布のモードや界面形状について解析条件の種類を増やしていく。

動的解析も可能となるように、2次元解析では、Bernoulli方程式と運動学的条件から、次の**磁場－流体結合発展方程式**を導いた[2, 8]。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V_X}{\partial t} = F_G(X) + F_C(X) + F_M(X) + F_D(X), \quad (25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = (e^{2\tau} U_X) \frac{\partial \theta}{\partial X} - (e^{2\tau} V_Y) \frac{\partial \tau}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (e^{2\tau} V_Y). \quad (26)$$

ここで、 X は界面座標、 θ と τ は界面勾配角と θ に共役な空間収縮率、 $F_G(X)$, $F_C(X)$, $F_M(X)$, $F_D(X)$ は重力・表面張力・磁気力・動圧である。また、 (V_X, V_Y) , (U_X, U_Y) は Flat Space における流速・界面移動速度である。定常界面形状は、(25) で $V_X = V_Y = 0$ とすれば、重力・表面張力・磁気力のつりあいから求められる。

以上の手続きを磁場解析と同様に3次元へ拡張して、次のような非線形な分岐現象や動的現象への適用と比較を試みる。

1. 表面変位および磁場を平面波の重ね合わせで表し、重力・表面張力・磁気力のエネルギーの和に代入して、エネルギーが最小になるような表面摂動振幅を計算した。磁性流体の比透磁率が1に近い場合、一様鉛直磁場強度 B_0 のある臨界値を B_c として、平面 ($B_0 < B_c$)・六角 ($B_c \leq B_0$)・四角 ($B_c < B_0$) という定常界面形状パターンの遷移やヒステリシス効果を議論した[9]。
2. 固定床・自由表面がある磁性流体を表面が平らになるように座標変換し、線形化した変換演算子の最小固有値から、平らな表面が不安定になるときの臨界鉛直磁場強度を決めた。ロール・四角・六角という構造へ分岐し得ることを証明し、それらの局所安定基準を求めた[10]。

3. 磁性流体表面に、水平交流磁場により一方向 Faraday 不安定 (ロール不安定) を発生させるとき、磁場の強さと振動数は、Mathieu 方程式 $\ddot{\zeta} + 2\gamma\dot{\zeta} + (\omega'_0)^2(1 + \varepsilon' \cos 2\omega t)\zeta = 0$ から予想される中立曲線の不安定領域内にあり、生じた波動が線形分散関係を満たすことを、容器サイズ効果を考慮しながら、実験的に確認した [11].

参考文献

- [1] 水田 洋: 複雑変形した磁性流体自由表面でも有効な界面磁場決定方法; 第 15 回「電磁力関連のダイナミックス」シンポジウム講演論文集, p.179 (2003).
- [2] 水田 洋: 磁性流体の表面形状決定における不連続性; 京都大学数理解析研究所講究録「波動の非線形現象とその応用」, 1368, p.127 (2004).
- [3] 水田 洋: 磁性流体表面現象解析の 3 次元化; 京都大学数理解析研究所講究録「波の非線形現象の数理解とその応用」, p.109 (2005).
- [4] 水田 洋: 複雑界面における調和場解析の次元間対応; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理解とその応用」, 1483, p.175 (2006).
- [5] 水田 洋: 任意形状界面・任意外場分布における 3 次元磁性流体自由表面解析; 磁性流体連合講演会講演論文集, 20, p.16 (2006).
- [6] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析への 3 次元 Hilbert 変換の適用; 日本流体力学会年会 2006 講演要旨集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai2006/ronbun.html>), AM06-16-003 (2006).
- [7] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析における 3 次元界面磁場方程式; 日本流体力学会 2005 年会講演論文集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai/cd-rom/paper/>), AM05-16-014 (2005).
- [8] 水田 洋: 磁性流体自由表面の非線形波動解析における解析性; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象のメカニズムと数理解」, 1209, p.46 (2001).
- [9] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field; J. Fluid Mech., 82, p.401 (1977).
- [10] E.E.Twombly and J.W.Thomas: Bifurcating instability of the free surface of a ferrofluid; SIAM J. Math. Anal., 14, p.736 (1983).
- [11] J.-C.Bacri, A.Cebers, J.-C.Dabadie, S.Neveu and R.Perzynski: Threshold and marginal curve of magnetic Faraday instability; Europhys. Lett., 27, p.437 (1994).